Algorithmische Geometrie

Gesellschaft für Informatik - Fachgruppe 0.1.2 Algorithmische Geometrie

Was ist Algorithmische Geometrie?

Bereits im Altertum haben sich Wissenschaftler wie Pythagoras und Euklid mit geometrischen Problemen beschäftigt. Ihr Interesse galt der Entdeckung geometrischer Sachverhalte und deren Beweis. Sie operierten ausschließlich mit geometrischen Figuren (Punkten, Geraden, Kreisen etc.). Erst die Einführung von Koordinaten durch Descartes machte es möglich, geometrische Objekte durch Zahlen zu beschreiben.

Heute gibt es in der Geometrie verschiedene Richtungen, deren unterschiedliche Ziele man vielleicht an folgendem Beispiel verdeutlichen kann. Denken wir uns eine Fläche im Raum, etwa das Paraboloid, das durch Rotation einer Parabel um seine Symmetrieachse entsteht. In der *Differentialgeometrie* werden mit analytischen Methoden Eigenschaften wie die Krümmung der Fläche an einem Punkt definiert und untersucht.

Die *Algebraische Geometrie* faßt das Paraboloid als *Nullstellenmenge* des Polynoms $p(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 - Z$ auf; hier würde man zum Beispiel den Durchschnitt mit einer anderen algebraischen Menge, etwa dem senkrechten Zylinder $(X - x_0^2) + (Y - y_0^2) - r^2$ betrachten und sich fragen, durch welche Gleichungen der Durchschnitt beschrieben wird.

Aus der Mathematik sind uns solche Fragestellungen von einfachen Beispielen vertraut: In der Analysis werden Tangenten an Kurven betrachtet, und in der linearen Algebra immerhin Durchschnitte von Objekten, die sich durch *lineare Gleichungen* beschreiben lassen.

Die *Algorithmische Geometrie*, verfolgt andere Ziele. Ihre Aufgaben bestehen in

Existenz v. effiz. Lsgsverfahren + Konkrete Angabe der Algorithmen.

- der Entwicklung von *effizienten* und *praktikablen* Algorithmen zur Lösung geometrischer Probleme, und in

  Angabe der unteren Schranke + Konstr. v. Alg., der diese Schranke nicht überschreitet.

- der Bestimmung der *algorithmischen Komplexität* geometrischer Probleme.

Die untersuchten Probleme haben meistens sehr *reale Anwendungshintergründe*. Bei der *Bahnplanung für Roboter* geht es darum, eine Bewegung von einer Anfangskonfiguration in eine Endkonfiguration zu planen, die Kollisionen mit der Umgebung vermeidet und außerdem möglichst effizient ist. Wer je eine Leiter durch verwinkelte Korridore getragen hat, kann sich ein Bild von der Schwierigkeit dieser Aufgabe machen. Sie wächst noch, wenn der Roboter seine Umgebung noch gar nicht kennt, sondern sie während der Ausführung erkunden muß.

Beim *computer aided geometric design (CAGD)* kommt es unter anderem darauf an, Durchschnitt und Vereinigung von dreidimensionalen Körpern schnell zu berechnen. Oder es sollen interpolierende Flächen durch vorgegebene Stützpunkte konstruiert werden.

Bei der Arbeit mit *geographischen Daten*, die in der Regel in Datenbanken gespeichert sind, müssen

Zusammenfassung von Algorithmische Geometrie.

Kapitel 0: Vorbemerkungen:

Inhalt der Vorlesung: Algorithmen und Datenstrukturen zur Lösung geometrischer Probleme.

Beispiele: Robotik / Bewegungsplanung, Computergrafik, CAD, VLSI

Typische Probleme:
- konvexe Hülle
- Zerlegung in einfache konvexe Teile (zB. Triangulierung).
- Schnittprobleme (zB. Segmente, Polygone)
- Suchprobleme (Memberanfrage in Pktmenge, Nearest-Neighbor, Range-Abfragen).
- Bewegungsplanung (Roboter)
- Hidden Line / Surface (Elimination).

Grundlegende Ansätze bzw. Vorgehensweisen:
- Devide & Conquer
- Plane Sweep.
- Hierarchische Darstellung
- Dualität
- Randomisierte Algorithmen.
- Rundungsfehler u. degenerierte Eingaben.

Kapitel I: Konvexe Hüllen.

1.1 Konstruktion der konvexen Hülle einer Pktmenge im $\mathbb{R}^2$ – Grundlagen.

1.1.1. Def: Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ Pktmenge.

S heißt konvex : $\Leftrightarrow \forall\, p, q \in S$ gilt: $\overline{pq} \subset S$.

konvexe Hülle einer Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ ($CH(S)$) ist die kleinste konvexe Menge, die S enthält.

Wir betrachten nun endliche Pktmengen, dh. $|S| = n \in \mathbb{N}$.

Anm: Der Rand von $CH(S)$ ist ein konvexes Polygon mit Ecken aus S.

Bew. Übung.

Konvexe Hülle-Problem für endl. Menge $S \subset \mathbb{R}^2$:

Berechne die Folge der Ecken von $CH(S)$ gg. den Uhrzeigersinn (pos. orientiert).

$\rightarrow q_1, \dots q_\ell \in S$. (Anordnung definiert Kanten der Fläche).

Degenerierte Fälle: $\ell = 2$ (alle Pkte sind colinear)

$\ell = 1$ (alle Pkte in S sind gleich).

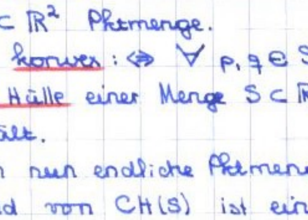
Problem im $\mathbb{R}^3$ analog, $CH(S)$ ist konvexes Polyeder mit Ecken aus S.

1.1.2. Satz: Berechnung der konvexen Hülle von n Pktn. im $\mathbb{R}^2$ ist mind. so schwer wie das Sortieren von n Zahlen.

Bew. siehe Üb. (Idee: Führe Sortieren von $x_1 .. x_n$ zurück auf $CH(\{p_1 .. p_n\})$.).

1.1.3. Korollar: Im Allgemeinen braucht die Berechnung von $CH(S)$ Zeit $\Omega(n \log n)$.

1.1.4. Bsp:



$S = \{1 .. 12\}$, $CH(S) =$ 8,7,3,1,4,9
(Jeder zyklische Shift)

1.1.5. Wdh: Lexikografische Ordnung (siehe Strings) für Pkte im $\mathbb{R}^2$:

Lexikogr. Sortierung nach kartesischen (x,y)-Koordinaten, dh. für zwei Pkte in der Ebene, also $p, q \in \mathbb{R}^2$ gilt: $p < q :\Leftrightarrow p_x < q_x \vee (p_x = q_x \wedge p_y < q_y)$

Dh. Sortierung von links nach rechts bzw. von unten nach oben (bei gleicher x-Koordinate).