Kapitel II: Konvexe Polygone

2.1. Einführung:

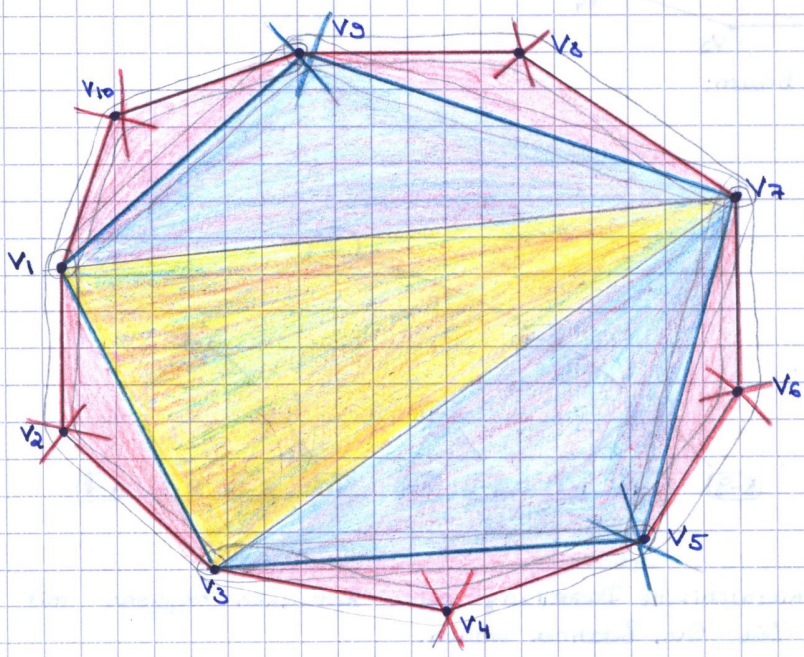
2.1.1. Ziel: Datenstruktur für konvexe Polygone, die verschiedene Operationen effizient unterstützt. → Hierarchische Darstellung.

2.1.2. Idee: Investiere Zeit und Platz $O(n)$ in Aufbau dieser Struktur, um nachfolgende Operationen billig zu machen.
Lohnt sich nur, wenn mit demselben Polygon viele Operationen durchgeführt werden.
Hierarchische Darstellung: Konstruiere Folge von Teilpolygonen, die das Polygon immer genauer beschreiben.

2.1.3. Def: Sei P konvexes Polygon mit n Ecken $v_1 .. v_n$.
Eine Folge $P_0, P_1, ..., P_k$ von konvexen Polygonen heißt (innere) hierarchische Darstellung von P, wenn gilt:

1) P_0 hat ≤ 4 Ecken
2) $P_k = P$, $P_i \neq P_{i+1}$ $\forall i \in \{0..k\}$
3) Jede Ecke von P_i ist Ecke von P_{i+1} und von vier aufeinanderfolgenden Ecken von P_{i+1} ist mindestens eine und höchstens drei von P_i. (für $0 \leq i \leq k$).

2.1.4. Beispiel:



$P = v_1 .. v_{10} = P_2$
$P_1 = v_1 v_3 v_5 v_7 v_9$
$P_0 = v_1 v_3 v_7$
$\Rightarrow \{P_i\}_{i=0}^{2}$ ist die Hierarchische Darstellung von P.

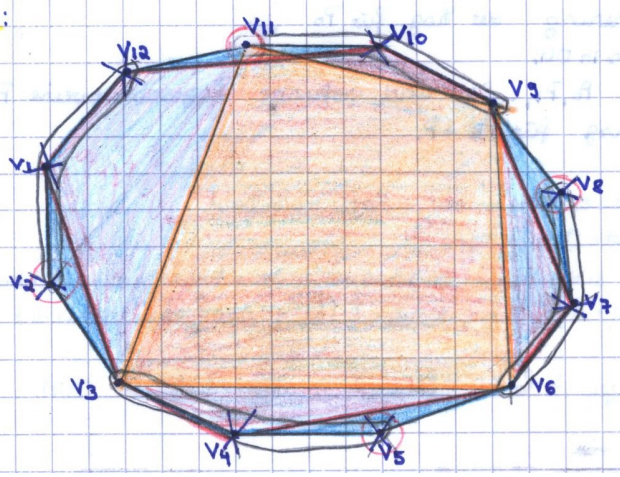
Bea: P_0 kann auch $v_1 v_3$ sein.
Dann wäre die Darstellung bzgl der Hierarchie noch tiefer.
$P_k = P_2$ $|P_2| = 10$
$|P_{k-1}| = |P_1| = 5$

2.1.5 Bemerkung: P_{i-1} entsteht also aus P_i durch entfernen einiger Ecken.
- von jeweils drei aufeinander folgenden Ecken von P_i wird mindestens eine entfernt.
- es werden nie vier aufeinanderfolgende entfernt.

2.1.6. Eigenschaften:

1) Beim Übergang von $P_{i+1} \to P_i$ verlieren wir mindestens einen konstanten Bruchteil der Ecken ($1/3$)
2) P_{i+1} ist ähnlich zu P_i, da wir nie mehr als drei aufeinanderfolgende Ecken entfernen.

2.1.7. Beispiel:



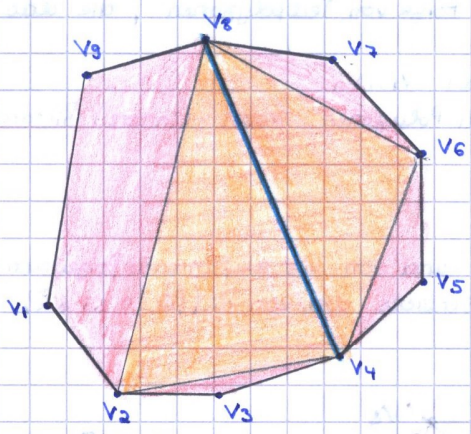
Blau: P_0, $|P_0| = 12$
rot: P_{k-1}: es wurden möglichst wenig Ecken entfernt.
$|P_{k-1}| = 8$
$P_k \to P_{k-1}$ wurden $\frac{1}{3} \cdot |P_k| = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ entfernt!
orange: P_{k-1}: es wurden möglichst viele Ecken entfernt.
$|P_{k-1}| = 4$
$P_k \to P_{k-1}$ wurden 8 Ecken entfernt!

2.1.8 Alternative Darstellung beim Zeichnen:

balancierte Baum über Kanten von P_i $(0 \le i \le n)$.
(muß kein binärer Baum sein).

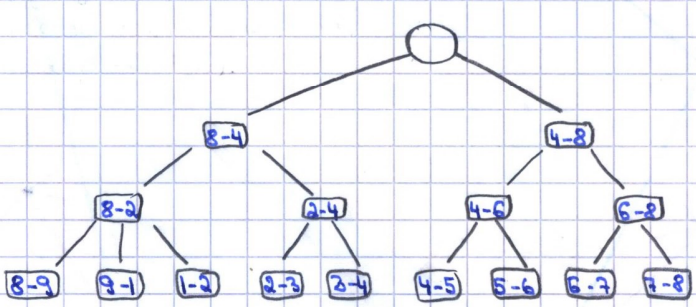
2.1.9 Beispiel:

1) wie vorhin:



$P_0 = v_4v_8$, $|P_0| = 2$
$P_1 = v_8v_9v_1v_2v_3v_4v_5v_6$, $|P_1| = 4$
$P_2 = P = v_1 \dots v_9$, $|P| = 9$.

2) durch balancierten Baum:



2.1.10 Lemma: Könnte man zB mit ähnlichem Alg wie bei Triangulierungsmethode machen.

1) Eine balancierte hierarchische Darstellung eines konvexen Polygons mit n Ecken kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.
2) benötigt Speicherplatz $O(n)$
3) die Tiefe k dieser Darstellung ist $O(\log n)$

Beweis: Alle Teile folgen unmittelbar aus 2.1.6. i). bzw. Baumdarstellung.

zu 2) von $P_i \to P_{i-1}$ verlieren mind $\frac{1}{3}$ der Knoten

$$\Rightarrow \#\text{Knoten} \le n + \tfrac{2}{3}n + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{3}n\right) + \dots = n\left(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{9} + \dots\right) = n \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^\nu \le n \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \left(\tfrac{2}{3}\right)^\nu =$$

$$= n \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = n \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{3}} = n \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = n \cdot 3 \cdot \underbrace{\left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}_{\le 1} \le 3n = O(n)$$

2.2. Anwendungen der hierarchischen Darstellung.

verwenden immer dieselbe Strategie:

2.2.1. Strategie:

1). Wir berechnen eine Annäherung der Lsg (des Problems) für P_0
Da P_0 maximal 4 Ecken $\Rightarrow$ in $O(1)$
2) Dann durchlaufe die Folge $P_0, P_1, \dots P_k$ und verfeinere Lösungsschrittweise $P_i \to P_{i+1}$.
3) Am Ende haben wir die Lsg für $P_k = P$.

zu 2.1.10 3): $\text{Höhe}(T) \le \underbrace{\text{Höhe}(\tilde{T})}_{=O(\log n)}$, wobei $\tilde{T}$ binärer Baum mit entspr. Hierarch. Darst.
$\Rightarrow$ Höhe $(T) = O(\log n)$.

zu 2.1.10. 1) Sei $c_1 :=$ Arbeit, um einen Knoten in den Baum zu schreiben (4 Stk); $c_2 :=$ Arbeit, um einen Knoten zu streichen

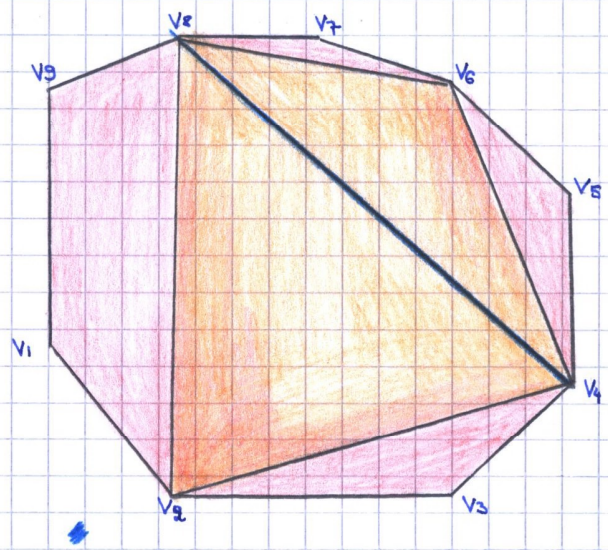
$$\Rightarrow \text{Arbeit} \le c_1 \cdot n + c_2 \cdot \tfrac{1}{3}n + c_1 \cdot \tfrac{2}{3}n + c_2 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 n + c_1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 n + \dots \le n c_1 \cdot \sum_{0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^\nu + c_2 n \sum_{0}^{n} \left(\tfrac{1}{3}\right)^\nu \le 3c_1 \cdot n + \tfrac{3}{2} \cdot c_2 n = O(n)$$

Aus Listen dann in Baum einfügen $\Rightarrow$ Kostet #Element in allen Listen $\Rightarrow O(n)$.

2.1.8. Alternative Darstellung:

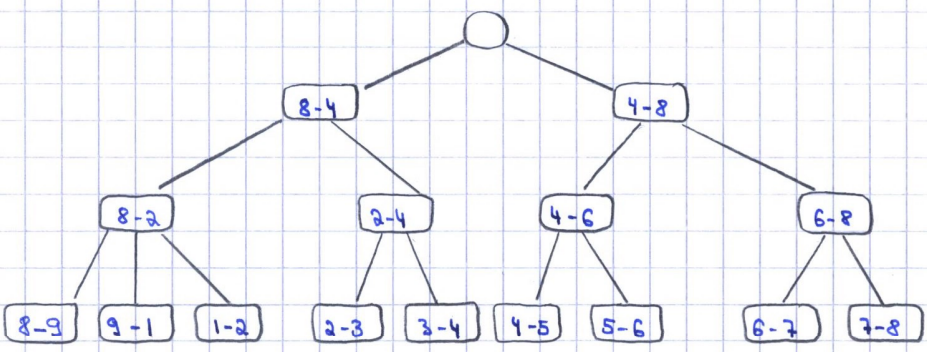
→ balancierter Baum über Kanten von P_i $(0 \le i \le n)$
(muß kein binärer Baum sein.)

2.1.9. Beispiel:



$P_0 = \{v_4, v_8\}$, $|P_0| = 2$
$P_1 = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$, $|P_1| = 4$
$P_2 = \{v_1 .. v_9\}$, $|P_2| = 9$

Darstellung durch einen balancierten Baum:



2.1.10 Lemma:

1. Eine balancierte hierarchische Darstellung eines konvexen Polygons mit n Ecken kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.
2. benötigt Speicherplatz $O(n)$
3. die Tiefe k dieser Darstellung ist $O(\log n)$.

Beweis: Alle Teile folgen unmittelbar aus 2.1.6 i) bzw. Baumdarstellung.

Beachte:

zu 1):

→ könnte man zB. mit ähnlichem Alg. wie bei der Triangulierungsmethode machen

$$c \cdot n + c \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right) \cdot n + c \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot n + \ldots =$$

$$= c \cdot n \cdot \sum_{\nu=0}^{\log n} \left(\tfrac{2}{3}\right)^\nu \le c \cdot n \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^\nu = c \cdot n \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} =$$

$$= c \cdot n \cdot 3 \cdot \underbrace{\left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}_{\substack{n \to \infty \\ \to 0}} \le \underbrace{M}_{\text{const}} \cdot n = O(n).$$

zu 2):

$\#\text{Knoten} = O(n)$

zu 3): $\text{Höhe}(T) \le \underbrace{\text{Höhe}(\tilde{T})}_{= O(\log n)}$, wobei $\tilde{T}$ binärer Baum.

2.2. Anwendung der Kirkpatrickschen Darstellung:

→ verwenden immer dieselbe Strategie:

2.2.1. Strategie:

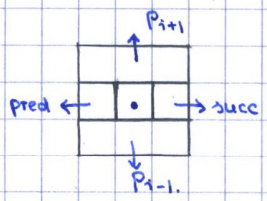
1). Wir berechnen eine Annäherung der Lösung für P_0.
Da P_0 maximal vier Ecken ⇒ in $O(1)$.

2). Dann durchlaufe die Folge $P_0, P_1 .. P_k$ und verfeinere die Lösung schrittweise $P_i \to P_{i+1}$.

3) Am Ende haben wir die Lsg für $P_k = P$.

2.2.2. Darstellung im Rechner:

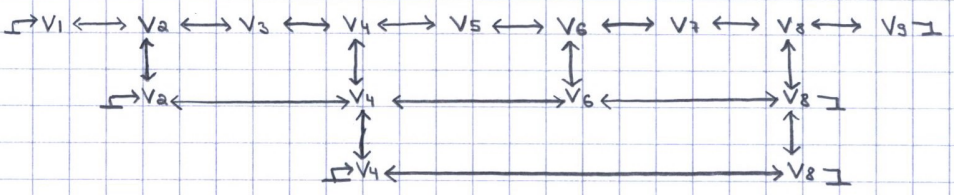
- P_i, $0 \le i \le k$ als doppelt verkettete Liste der Ecken und jede Ecke von P_i zeigt zusätzlich auf ihre Kopie in P_{i+1} und umgekehrt.



- explizite Speicherung des Kantenbaumes
→ Dynamisierung (Ecken einfügen | löschen)
(wie bei Suchbäumen).

2.2.3 Beispiel:

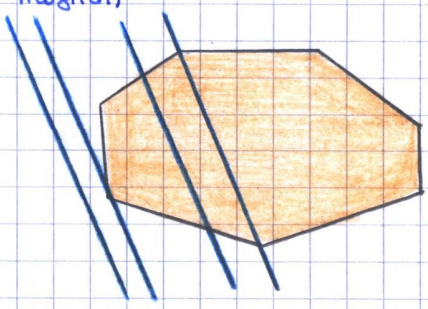
Sei P gegeben wie in 2.1.9.
⇒



2.24. Anwendung: Schnitt mit einer Geraden:

⟶ 2.2.4.1. Ziel:

Geg: Hierarchische Darstellung $P_0 \dots P_k$ eines konvexen Polygons P und eine Gerade g
Ausgabe: $P \cap g$
Konvexität ⇒ $P \cap g$ = Strecke (wenn nicht leer und Ecke)
⇒ Es genügt Schnittpkte a, b mit den Randsegmenten zu berechnen.
Fälle: 1) $a \neq b$ (allg. Fall, Ecken möglich)
2) $a = b$ (eine Ecke)
3) ex. nicht! $P \cap g = \emptyset$.

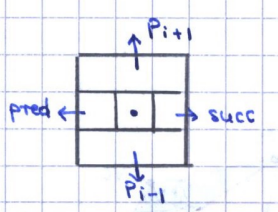


⟶ 2.24.2. Idee für Algorithmus:

1). Schnittest mit P_0:
2 Fälle: a) $P_0 \cap g = \emptyset$
b) $P_0 \cap g \neq \emptyset$
Im Fall B) → STOP
Im Fall a):
sei $g_0 \in P_0$ mit minimalem Abstand zu g.

2.2.2. Darstellung im Rechner:

- P_i , $0 \le i \le k$ als doppelt verkettete Liste der Ecken + jede Ecke von P_i zeigt zusätzlich auf ihre Kopie in P_{i+1} und umgekehrt

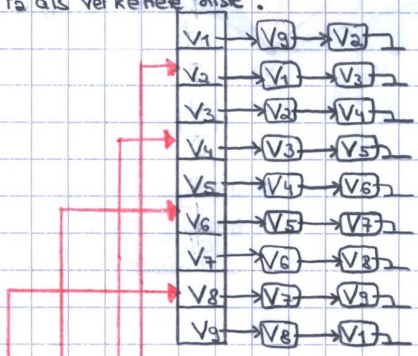


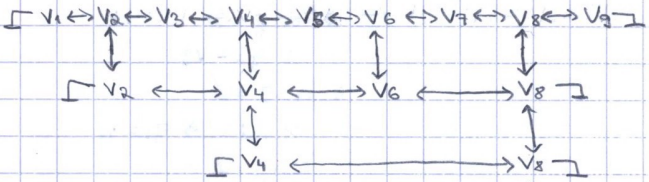
- explizite Speicherung des Kantenbaumes
  → Dynamisierung (Ecken einfügen / löschen)
  (wie bei Suchbäumen)

2.2.3 Beispiel:

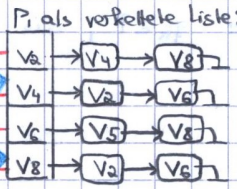
Sei P gegeben wie in 2.1.9.

P_2 als verkettete Liste:





P_1 als verkettete Liste:



P_0 als verkettete Liste:

2.2.4. Anwendung: Schnitt mit einer Geraden:

→ 2.2.4.1. Ziel:

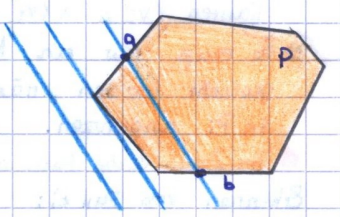
Geg: Hierarchische Darstellung $P_0 .. P_k$ eines konvexen Polygons P und eine Gerade g.

Ausgabe: $P \cap g$

Konvexität → $P \cap g$ = Strecke

→ Es genügt Schnittpkte a, b mit den Randsegmenten zu berechnen.

Fälle: 1) $a \neq b$ (allg. Fall, Ecken möglich)
2) $a = b$ (eine Ecke)
3) ex. nicht!, Schnitt = $\emptyset$



2.2.4.2. Idee für Algorithmus:

1) Schnittest mit P_0:
   2 Fälle: a) $P_0 \cap g = \emptyset$ konst Operationen, weil $|P_0| \le 4$
   b) $P_0 \cap g \neq \emptyset$
   Ann: wir haben Fall a)
   → sei $p_0 \in P_0$ mit minimalen Abstand zu g
   Im Fall b → STOP

d). Durchlaufe die hierarchische Darstellung $P_1, P_2 \ldots$ und finde entweder:

a) $q_i \in P_i$ mit minimalen Abstand, falls $P_i \cap g = \emptyset$

oder

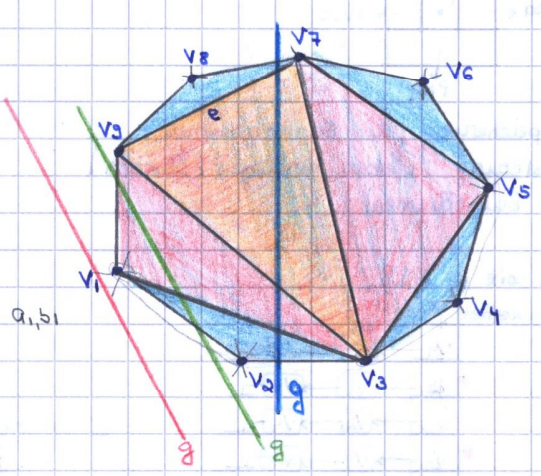
b) Schnittpkte a_i, b_i von P_i mit g.

Im Fall b) → STOP.

Bsp: $P = v_1 .. v_9 = P_2$

$P_1 = v_1 v_2 v_8 v_7 v_9$

$P_0 = v_2 v_7 v_9$



Im Alg.:

1) $P_0 \cap g = \emptyset$
   ⇒ $q_0 = v_9$
2) $P_1 \cap g \neq \emptyset$
   ⇒ Fall b) ⇝ finde a_1, b_1
   STOP

Im Alg.:

1) $P_0 \cap g = \emptyset$
   ⇒ $q_0 = v_9$
2) $P_1 \cap g \neq \emptyset$
   ⇒ Teil a) ⇒ $q_1 = v_1$

   $P_2 \cap g = \emptyset$ -
   ⇒ Teil a) ⇒ $q_2 = v_1$.

Im Alg.:

1) $P_0 \cap g \neq \emptyset$
   ⇒ STOP

Zwei mögliche Ausgänge: (wenn $i = k$)

a) $P_k \cap g = P_n \cap g = \emptyset$ und wir kennen Ecke $q_k \in P$, die g am nächsten

b) $P_i \cap g = (a_i, b_i)$ für $0 \leq i \leq k$

Im Bsp:

- ⇝ Ausgang b) ⇒ $P_1 \cap g = (a_1, b_1)$ für $i = 1$.
- ⇝ Ausgang a) ⇒ $P_n \cap g = \emptyset$, $q_2 = v_1 \in P$.
- ⇝ Ausgang b) ⇒ $P_0 \cap g = (a_0, b_0)$ für $i = 0$

Ausgang a) ⇒ fertig, $P_n \cap g = \emptyset$

Ausgang b) ⇒ Wir müssen Schnittpkte (a_i, b_i) später verfeinern bis (a_k, b_k) gefunden. } Phase 2.

Nun: Übergang von $q_i \to q_{i+1}$ (Fall a)) Bzw. Test, ob Fall b) gilt.

⟶ 2.2.4.3 Laufzeit:

Phase 1: Kandidaten für nächsten Pkt q_{i+1} sind schon genau die Ecken von P_{i+1} die Verfeinerungen der Nachbarkanten von q_i in P_i

Das folgt unmittelbar aus der Konvexität.

- Im Bsp: $i = 0$, $q_0 = v_9$, Kand. für q_1 ist Ecke von P_1 nämlich v_1
  Dies ist die Ecke der Verfeinerungen der Nachbarkanten von $q_0 = v_9$, nämlich der Kanten $(v_9, v_1) \wedge (v_1, v_3)$

⇒ Es muß nur ein Minimum in einer konstanten Zahl von Kandidaten gesucht werden, nämlich in den Verfeinerungen der Kanten, die an q_i in P_i angrenzen.

- Im Bsp: Suche Min. in (v_9, v_1), (v_1, v_3)

Erkennen von Fall b):

Teste in der Kandidatenmenge, ob ein Pkt auf der anderen Seite von g liegt. (Orientation)

⇒ (a_{i+1}, b_{i+1}) in Konst. Zeit denn Konst viele Kand

(Schnittberechnung mit Verfeinerungskanten).

- Im Bsp: $i = 0$, $q_0 = v_9$ ⇒ Kandidatenmenge: (v_9, v_1) und (v_1, v_3)

  v_1 liegt auf der anderen Seite von g, denn $\text{orient}(v_9, v_1, g) > 0$

  ⇒ Teil b) erkannt

  (bez: $\text{orient}(v_9, v_3, g) \leq 0$)

Laufzeit: • $O(1)$ pro Hierarchiestufe
• Haben nur $O(\log n)$ Stufen
$\Rightarrow O(\log n)$ für die erste Phase.

Nach Phase 1 haben wir zwei Fälle:
Fall a) $\Rightarrow$ fertig.
Fall b) $\Rightarrow$ machen weiter zu Phase 2.

Phase 2: Geg: $\{a_i, b_i\} = P \cap g$ für $i < k$ (sonst fertig) und es sind keine Ecken (sonst ebenfalls fertig).

Betrachte a_i (b_i analog):

a_{i+1} muss Schnittpkt sein mit einer Verfeinerungskante von e, wobei $a_i = e \cap g$

Im Bsp: Betrachte a_0, $i = 0 < 2$

a_1 ist Schnpkt mit Verfeinerungskante von e, wobei $a_0 = e \cap g$ und der Geraden g.

Die Verfeinerungskanten von e sind (v_9, v_8) und (v_8, v_7)

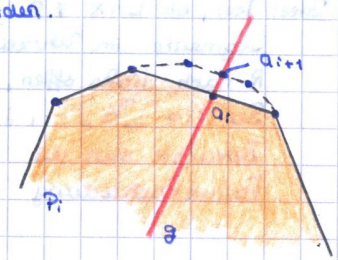
$\Rightarrow a_{i+1}$ kann in Zeit $O(1)$ aus a_i berechnet werden.

(b_{i+1} analog aus b_i)

Weil # Verf.kanten konst. Genauer ≤ 4.

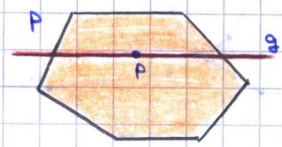
$\Rightarrow$ Laufzeit von Phase 2 auch $O(\log n)$.

$\Rightarrow$ Gesamte Laufzeit also $O(\log n)$!



2.2.5 Satz: Für ein konvexes Polygon P kann:
1) die Hierarchische Darstellung in Zeit $O(n)$ aufgebaut werden.
2) Braucht Platz $O(n)$
3) Für beliebige Gerade g kann $P \cap g$ mit Hilfe der Hierarchischen Darstellung in Zeit $O(\log n)$ Berechnet werden.

2.2.6 Bem.
1) Teil 3) $\Rightarrow$ Alternative $\log n$-Alg. zum Test, ob Pkt $p \in P$ ist.
Idee:



$p \in P \Leftrightarrow p \in P \cap g$
- Betr. Gerade g durch p parallel zu x-Achse
- Berechne hierar. Darst.
- Berechne Schnpkte
- Schaue ob $p_x \in [a_x, b_x]$

$\Rightarrow$ Zeit: $O(1) + O(n) + O(\log n) + O(1) = O(n)$!

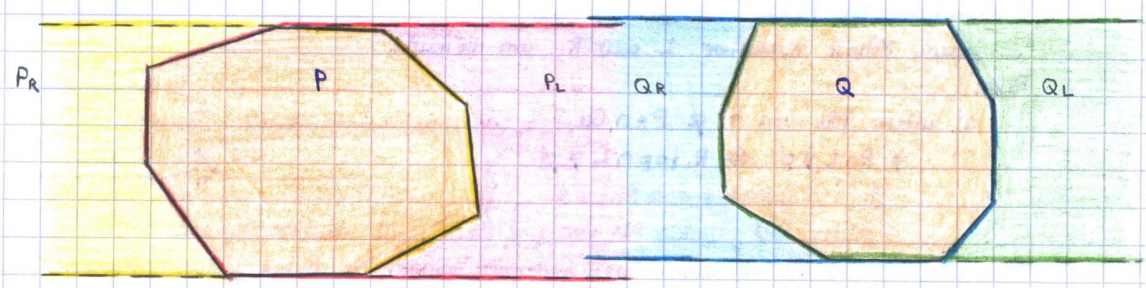
2) Hierar. Darstellung auch im $\mathbb{R}^3$ möglich, d.h. für konvexe Polyeder.
(dazu später mehr...).

2.3 Weiteres Problem auf konvexen Polygonen: Schnitt von zwei konvexen Polygonen.

2.3.1 Ziel: Geg: zwei konvexe Polygone P, Q
Test ob $P \cap Q \neq \emptyset$

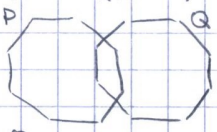
Anm. Wir wissen schon, wie man $P \cap Q$ in Zeit $O(n)$ Berechnet, wobei n = Gesamtzahl der Ecken.

2.3.2 Idee:
1) Betrachte ein einfacheres Problem: Test, ob sich zwei polygonale Ketten schneiden.
- Zerlege P in linken (P_L) & rechten (P_R) Rand durch Zerschneiden an Extremalpkten gemäß yx-Sortierung der Ecken.
- Erweitere durch entsprechende horizontale Strahlen.



Beobachtung: $P \cap Q \neq \emptyset \Leftrightarrow P_L \cap Q_R \neq \emptyset \wedge P_R \cap Q_L \neq \emptyset$

Beweis: $P \cap Q \neq \emptyset \Rightarrow P_R \cap Q_L \neq \emptyset \wedge P_L \cap Q_R \neq \emptyset$ klar.

Für 

mit $P_R \cap Q_L \neq \emptyset \Leftrightarrow P \cap Q \neq \emptyset$
(hierbei gilt auch $P_L \cap Q_R \neq \emptyset$)

Für 

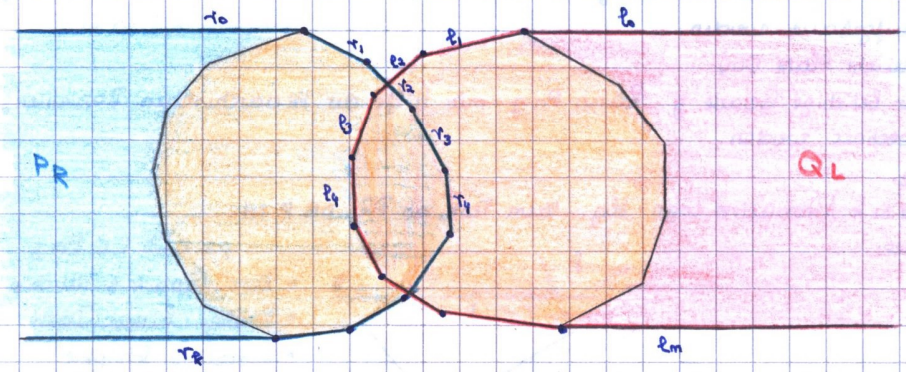
mit $Q_R \cap P_L \neq \emptyset \Leftrightarrow P \cap Q \neq \emptyset$
(hierbei gilt auch $Q_L \cap P_R \neq \emptyset$)

$\Rightarrow$ falls $P_R \cap Q_L \neq \emptyset \wedge P_L \cap Q_R \neq \emptyset \Rightarrow P \cap Q \neq \emptyset$

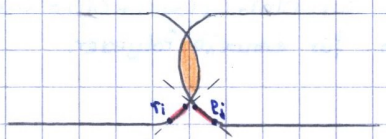
2). Lösung des einfacheren Problems:

Bea: Wir wissen nicht, ob P linkes und Q rechtes Polygon oder umgekehrt.

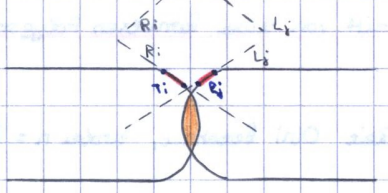
Idee: Test, ob $L \cap R \neq \emptyset$ in Zeit $O(\log n)$, wobei $R = r_0 .. r_k$ gegeben durch die Segmente im Uhrzeigersinn (r_0, r_k Strahlen) und $L = \ell_0 .. \ell_m$ analog gg. Uhrzeigersinn.
R nach links offen, L nach rechts offen.
Sei $i := \lfloor m/2 \rfloor$, $j := \lfloor k/2 \rfloor$
Betrachte nun die mittleren Segmente r_i und ℓ_j.
Fallunterscheidung gemäß der Lage von ℓ_j und r_i auf Geraden R_i und L_j.



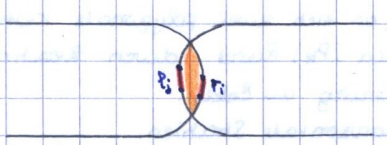
Es gibt nun mehrere Fälle:

1) 

← $P_R \cap Q_L$ oberhalb von den unteren Endpkten von r_i und ℓ_j

2) 

← $P_R \cap Q_L$ unterhalb von den oberen Endpkten von r_i und ℓ_j

3) 

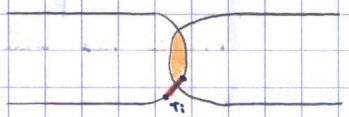
← Endpkte von r_i und $\ell_j \in P_R \cap Q_L$
(Bea: hierbei müssen sich die Polygone nicht notw. schneiden!)

Wir betrachten hier Fall 1

In jedem Schritt reduziere L oder R um die Hälfte.

Fälle:

a). unterer Pkt von $r_i \notin P_R \cap Q_L$



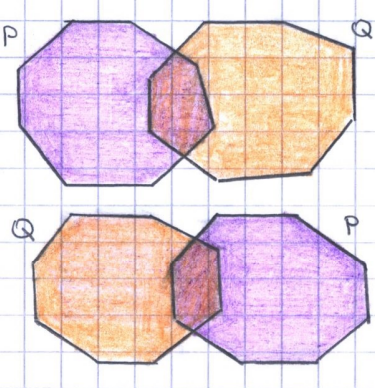
$\Rightarrow P \cap L \neq \emptyset \Leftrightarrow R.top \cap L \neq \emptyset$

"$\Leftarrow$": $R.top \cap L \neq \emptyset \Rightarrow R \cap L \neq \emptyset$

"$\Rightarrow$" $P \cap L \neq \emptyset$, unterer Pkt von $r_i \notin P_R \cap Q_L$, r_i mittleres Segment
$\Rightarrow$ da wir uns im Fall 1 befinden, können wir R.bot rausschmeissen.
$\Rightarrow R.top \cap L \neq \emptyset$.

Beobachtung: $P \cap Q \neq \emptyset \Leftrightarrow P_L \cap Q_R \neq \emptyset \wedge P_R \cap Q_L \neq \emptyset$.

Denn:



Hier: $P \cap Q \neq \emptyset \Leftrightarrow P_R \cap Q_L \neq \emptyset$

Beo: Man weiß in der Regel nicht, welches Polygon rechts und welches links liegt.

Hier: $P \cap Q \neq \emptyset \Leftrightarrow P_L \cap Q_R \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Insgesamt gilt also: falls $P_L \cap Q_R \neq \emptyset \wedge P_R \cap Q_L \neq \emptyset \Rightarrow P \cap Q \neq \emptyset$

„$\Leftarrow$" klar

$\Rightarrow$ die obige Beh.

2) Lösung des einfacheren Problems:

Idee: Test, ob $L \cap R \neq \emptyset$ in Zeit $O(\log n)$, wobei $R = \{r_0 \dots r_k\}$ und $L = \{\ell_0 \dots \ell_m\}$ gegeben durch die Segmente im Uhrzeigersinn (für R) und gegen Uhrzeigersinn (für L).

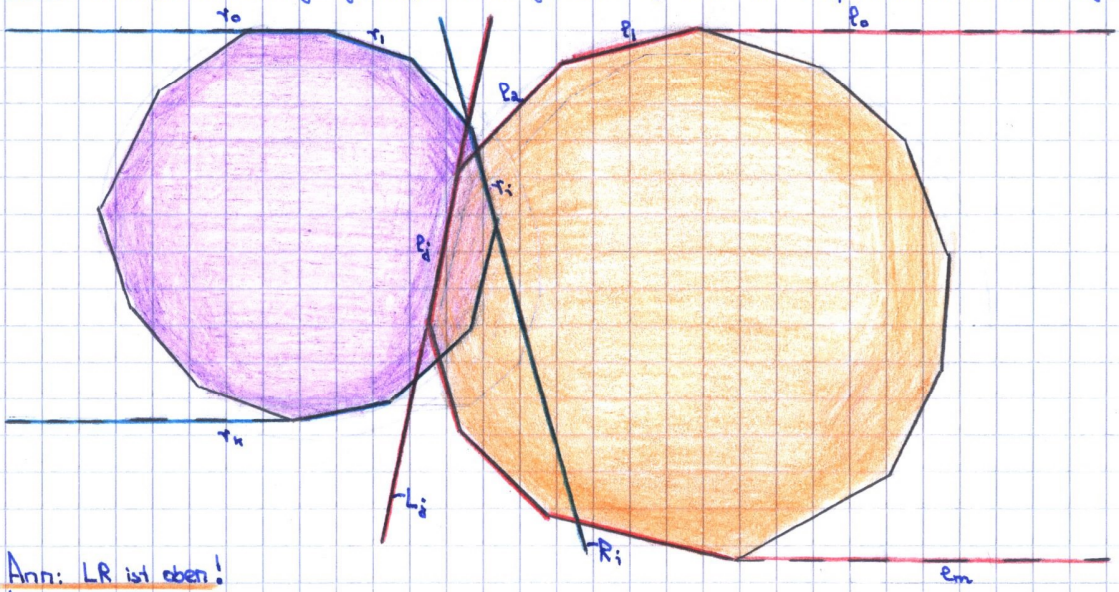
(r_0 und r_k bzw ℓ_0 und ℓ_m sind Strahlen).

R ist nach links offen und L nach rechts offen.

Sei $i := \lfloor m/2 \rfloor$ und $j := \lfloor k/2 \rfloor$

Betrachte nun die mittleren Segmente r_i und ℓ_j

Nun: Fallunterscheidung gemäß der Lage von ℓ_j und r_i auf Geraden R_i und L_j:



Ann: LR ist oben!

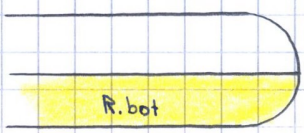
In jedem Schritt reduziere L oder R um die Hälfte.

Fälle:

a) unterer Pkt von r_i ist nicht in LR

$\Rightarrow R \cap L \neq \emptyset \Leftrightarrow R.top \cap L \neq \emptyset$

wobei:



b). unterer Pkt von ℓ_j ist nicht in LR.

$\Rightarrow R \cap L \neq \emptyset \Leftrightarrow R.L.top \neq \emptyset$

c) beide unteren Pkte sind in LR

(i) falls u_{r_i} unterhalb von u_{ℓ_j}

$\Rightarrow R \cap L \neq \emptyset \Leftrightarrow R.top \cap L \neq \emptyset$

(ii) falls u_{ℓ_j} unterhalb von u_{r_i}

$\Rightarrow R \cap L \neq \emptyset \Leftrightarrow R \cap L.top \neq \emptyset$

Hierbei: $u_{r_i} \hat{=}$ unterer Endpkt von r_i

$u_{\ell_j} \hat{=}$ unterer Endpkt von ℓ_j.

⇒ In Zeit $O(1)$ wird entweder L oder R auf die Hälfte reduziert.
Wiederhole nun bis l_j sich mit r_i schneidet oder bis nur noch konstante Größe von L und R.

2.3.3. Laufzeit: sei $k + m + 2 =: n$
⇒ der eigentliche Test, ob $L \cap R \neq \emptyset$ in Zeit $O(\log n)$.

Kleines Beispiel zur Veranschaulichung: