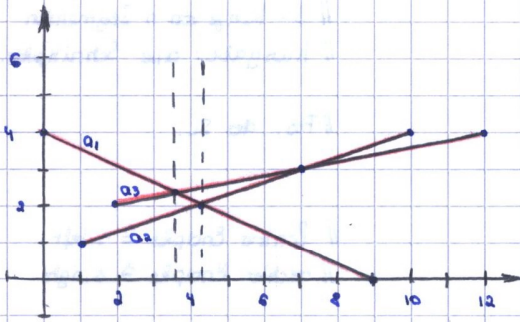


Beispiel zum Alg.:



$$X = \{(0,4), (1,1), (2,2), (3,0), (10,4), (12,4)\}$$

$p = (0,4)$ , linker Endpunkt

$$\Rightarrow Y = \{a_1\}, s_1 = s_2 = \emptyset, X = \{(1,1), (2,2), (3,0), (10,4), (12,4)\}$$

$p = (1,1)$ , linker Endpunkt

$$\Rightarrow Y = \{a_2, a_1\}, s_1 = a_1, s_2 = \emptyset, X \leftarrow s_1 \cap s_2 = a_1 \cap a_2 \approx (4.2, 2)$$

$$\Rightarrow X = \{(2,2), (4.2, 2), (3,0), (10,4), (12,4)\}$$

$p = (2,2)$ , linker Endpunkt.

$$\Rightarrow Y = \{a_2, a_3, a_1\}, s_1 = a_1, s_2 = a_2, X \leftarrow X \setminus (4.2, 2), X \leftarrow a_1 \cap a_3 \approx (3.5, 2.5), X \leftarrow a_2 \cap a_3 \approx (7, 3)$$

$$\Rightarrow X = \{(3.5, 2.5), (7, 3), (3,0), (10,4), (12,4)\}$$

$p = (3.5, 2.5)$  Schnittpunkt von  $a_1$  und  $a_2$

$$\Rightarrow s'_1 = a_1, s'_2 = a_3, s_1 = \emptyset, s_2 = a_2, Y = \{a_2, a_1, a_3\}$$

$$X \leftarrow X \setminus a_2 \cap a_3, X \leftarrow a_1 \cap a_2 \approx (4.2, 2)$$

$$\Rightarrow X = \{(4.2, 2), (3,0), (10,4), (12,4)\}$$

"Ausgabe:  $p = a_1 \cap a_3$ "

$p = (4.2, 2)$  Schnittpunkt von  $a_1$  und  $a_2$

$$\Rightarrow s'_1 = a_1, s'_2 = a_2, s_1 = a_3, s_2 = \emptyset, Y = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$X \leftarrow X \setminus a_1 \cap a_3, X \leftarrow a_2 \cap a_3 \approx (7, 3)$$

$$\Rightarrow X = \{(7, 3), (3,0), (10,4), (12,4)\}$$

"Ausgabe:  $p = a_1 \cap a_2$ "

$p = (7, 3)$  Schnittpunkt von  $a_2$  und  $a_3$

$$\Rightarrow s'_1 = a_3, s'_2 = a_2, s_1 = \emptyset, s_2 = a_1, Y = \{a_1, a_3, a_2\}$$

$$X \leftarrow X \setminus a_1 \cap a_2 \quad // \text{ ist links von } s_L, \text{ also nicht mehr in } X$$

$$X \leftarrow a_1 \cap a_3 \quad // \text{ links von } s_L \Rightarrow \text{ nicht einfügen}$$

$$\Rightarrow X = \{(9,0), (10,4), (12,4)\}$$

"Ausgabe:  $p = a_2 \cap a_3$ "

$p = (9,0)$  rechter Endpunkt

$$\Rightarrow s_2 = a_3, s_1 = \emptyset, Y = \{a_3, a_2\}$$

$$\Rightarrow X = \{(10,4), (12,4)\}$$

$p = (10,4)$  rechter Endpunkt

$$\Rightarrow s_2 = \emptyset, s_1 = a_3, Y = \{a_3\}$$

$$\Rightarrow X = \{(12,4)\}$$

$p = (12,4)$  rechter Endpunkt

$$\Rightarrow s_1 = s_2 = \emptyset, Y = \emptyset, X = \emptyset$$



### 3.2.11. Geometrische Primitive (Prädikate Operatoren).

#### 1. Schritt von zwei Segmenten:

• Test + Berechnung

#### 2. Lineare Ordnung auf Y-Struktur.

• abh. von xpos der SL

• Datenstruktur (binärer blatt orientierter Suchbaum)

verwendet eine Fkt. compare zum Vergleich von zwei Segmenten.

Suchbaum: lookup(s), compare(s, s')

Mögl. Implementierung:

compare(s1, s2) // berechne y-Koordinaten der Schnittpunkte der Geradengleichungen v. s1 und s2 mit SL.

$$y_1 \leftarrow f_1(x_{pos})$$

$$y_2 \leftarrow f_2(x_{pos})$$

wobei  $f_1(x) = a_1x + b_1 \wedge f_2(x) = a_2x + b_2$  Keine Vertikalen.

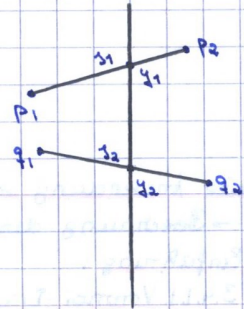
return compare(y1, y2)

Übung: verwende nur orientation-Aufrufe.

1. sg: if (orientation(p1, p2, s2) > 0)  $\Rightarrow y_1 > y_2$

if (orientation(q1, q2, s1) > 0)  $\Rightarrow y_2 > y_1$

"=" gibt es nicht...



#### 3. Lineare Ordnung auf X-Struktur.

= lexik. xy-Ordnung von Pkten.

(Vergleich zweier Pkte p und q)

$\rightarrow$  compare(p, q)

$$\Delta x \leftarrow |q.x_{coord}() - p.x_{coord}();$$

if ( $\Delta x \neq 0$ ) then

return sign( $\Delta x$ )

else

return sign(|q.y\_{coord}() - p.y\_{coord}|)

#### 4. Test, ob Pkt p rechts von SL

Initial

if (SL, p, p.x\_{coord}) < 0  $\Rightarrow$  rechts von SL

> 0 links

= 0 auf.

### 3.2.12 Bem:

Bisher Segmente in allgemeiner Lage

a) keine drei Segmente schneiden sich in einem Pkt

b) Alle Endpunkte haben verschiedene x-Koordinaten.

c) keine vertikalen Segmente.

In der Praxis unrealistisch!

$\rightarrow$  Lösung: Modifizierter Alg., der mit degenerierten Eingaben umgehen kann.

$\rightarrow$  siehe Übung dazu.

### 3.2.13 Varianten des Problems:

#### $\rightarrow$ 3.2.13.1. Red/Black-Intersection Problem:

Haben zwei Mengen von Segmenten  $S_1$  und  $S_2$

Aufgabe ist: Berechne Schnittpkte  $s_1 s_2 \forall s_1 \in S_1 \wedge \forall s_2 \in S_2$

#### $\rightarrow$ 3.2.13.2 Kurvensegmente:

z.B. Kreisbögen

$\rightarrow$  Übung

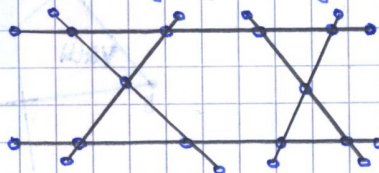
#### $\rightarrow$ 3.2.13.3 Berechnung der planaren Unterteilung der Ebene

$\rightarrow$  planarer Graph.

$$G = (V, E)$$

V = Endpunkte und Schnittpkte

E = Intervalle durch Zerlegung der Segmente durch V





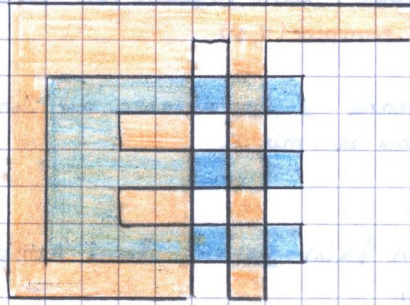
### 3.3 Erste Anwendung von Plane Sweep:

→ Schnitt von beliebigen Polygonen.

- setzt sich zusammen aus Flächen der planaren Unterteilung.
- Flächen können best. boolesche Operationen zugeordnet werden.

→ Bestimmung der planaren Unterteilung

→ Übung (Konstruktion des Graphen...)



### 3.4 Zweite Anwendung von Plane Sweep:

→ Berechnung des Voronoi-Diagramms.

#### 3.4.1 Einführung:

##### → 3.4.1.1. Voronoi-Diagramm:

- (wichtigste geom. Struktur)
- $\subseteq \mathbb{R}^2$
- Datenstr. zur Lsg. des sog. "Post Office P"

##### → 3.4.1.2. Problem:

Geg: Menge  $S$  von  $n$  Orten in einer Ebene (z.B. Postämter)

Aufgabe: Finde  $\forall p \in \mathbb{R}^2$  den Ort  $x \in S$ , so, dass  $\text{dist}(p, x)$  minimal.

##### → 3.4.1.3. Mögl. Variationen:

Orte: Pkte, Segmente, Kreise, Polygone

Abstand: • Euklidischer

- Manhattan-Metrik
- $L_\infty$
- gewichtet

...

Wir betrachten hier pktförmige Orte mit dem eukl. Abstand im  $\mathbb{R}^2$ .

##### → 3.4.1.4. Idee:

1) Berechne für jeden Ort  $x \in S$  das Gebiet aller Pkte, deren Abstand zu  $x$  kleiner oder gleich ist als zu allen anderen Orten.

→ man bekommt eine planare Unterteilung und diese heißt Voronoi-Diagramm von  $S$ .

2) Teste für Eingabepkt  $p \in \mathbb{R}^2$ , in welchem Gebiet des Voronoi-Diagramms er liegt

→ Teilproblem: Point-Location.

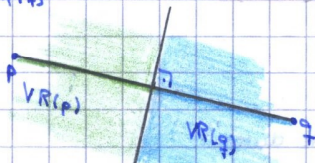
### 3.4.2. Voronoi-Diagramm:

#### → 3.4.2.1. Definition: Geg $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

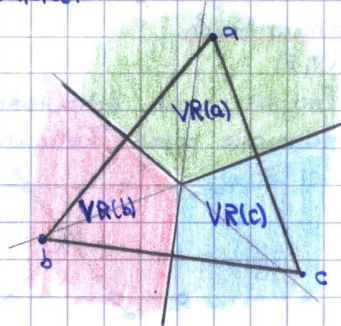
$VR(x_i) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x_i) \leq \text{dist}(p, x_j), \forall x_i \neq x_j\}$  heißt Voronoi-Region für  $x_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ )

#### → 3.4.2.2. Beispiele:

a)  $S = \{p, q\}$



b)  $S = \{a, b, c\}$





→ 3.4.2.3 Bem: Allgemein für  $x, y \in S$  ist  $H(x, y) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, y)\}$  ein Halbraum bzw. Halbebene definiert durch Mittelsenkrechte.  
 Dann ist  $\forall$  Orte  $x \in S: VR(x) = \bigcap_{y \in S, y \neq x} H(x, y)$  Schnitt von Halbkreisen.

⇒  $VR(x)$  ist konvexes Polygon.

→ 3.4.2.4 Definition: Das Voronoi-Diagramm für eine Menge  $S$  von  $n$  Orten  $VD(S)$  ist die planare Unterteilung der Ebene, die durch die Menge der Voronoi-Regionen  $VR(x), x \in S$ , definiert wird.

→ Graph dessen Flächen die Voronoi-Regionen darstellen.

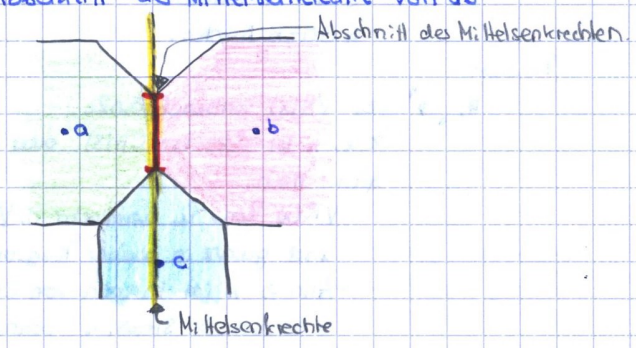
→ 3.4.2.5 Def: Voronoi-Knoten:

def. durch mind. drei Orte  $a, b, c$  zu denen sie gleichen Abstand haben

⇒ sie sind Mittelpkte von Kreisen durch  $a, b, c$ .

Voronoi-Kanten:

def. durch zwei Orte  $a, b$ ; Abschnitt der Mittelsenkrechte von  $\overline{ab}$

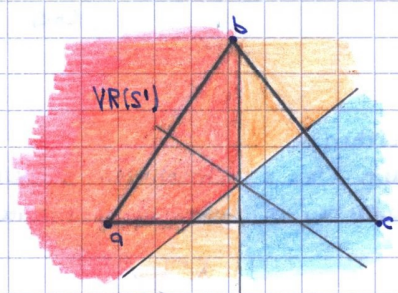


→ 3.4.2.6 Bem:

Verallgemeinerung für Mengen  $S' \subseteq S$ :

$$VR(S') = \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, y) \forall x \in S' \wedge y \in S \setminus S'\} = \bigcap_{x \in S'} H(x, y)$$

→ 3.4.2.7 Bsp:  $S = \{a, b, c\}, S' = \{a, b\}$ .



$$VR(S') = \{p : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, c), x \in S'\}$$

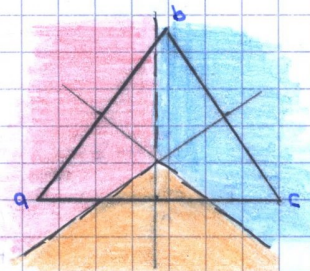
→ 3.4.2.8 Def:

Voronoi-Diagramm der Ordnung k  $k \leq n$

$$VD_k(S) := \{VR(S') : S' \subseteq S \text{ mit } |S'| = k\}$$

→ 3.4.2.9 Bsp:

$S = \{a, b, c\}$   
 $k = 2$

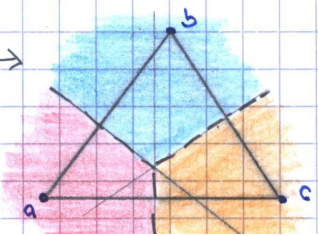


$$\Rightarrow VD_2(S) := \{VR(S') : S' \subseteq \{a, b, c\}, |S'| = 2\}$$

←  $VD_2(S)$   $VD_2(S) = \{\text{Mengen } VR(S')\}$

beachte den Unterschied!

Dies ist  $VD_1(S)$ !



←  $VR$ 'en  
 Jede einzelne  $VR = \{\text{Pkte } p : \dots\}$



→ 3.4.2.10 Spezialfälle:

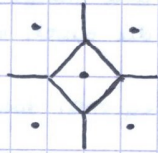
1) "normales" Voronoi-Diagramm:  $VD(S) = VD_1(S)$ . [closest point VD]

2)  $VD_{n-1}$  [farthest point VD]

↑ Voronoi-Regionen sind hier Mengen von Pkten, die von einem Ort weitest entfernt sind als von allen anderen.

Ab jetzt:  $VD(S) = VD_1(S)$

Typisches Bsp:



→ 3.4.2.11 Lemma:

a)  $\forall$  Orte  $x \in S$  gilt:  $VR(x)$  ist unbeschränkt  $\Leftrightarrow x$  ist Ecke von  $CH(S)$  oder auf dem Rand von  $CH(S)$

b) Voronoi-Diagramm für  $n$  Orte hat:

$\leq 2n-4$  Knoten

$\leq 3n-6$  Kanten.

(?)

Beweis:

a)  $\Rightarrow$  " sei  $VR(x)$  unbeschränkt.

z.z.  $x$  ist Ecke von  $CH(S)$  oder auf Rand von  $CH(S)$

Ann.: nein.

$VR(x)$  konv u. unbeschr. n.V.  $\Rightarrow \exists$  Strahl  $s$ , der in  $x$  startet

hier notwendig, dass  $x$  nicht auf Kante!  $\rightarrow$  und ganz in dieser Region  $VR(x)$  verläuft.

Ann  $\Rightarrow x$  im Inneren von  $CH(S)$

S endlich  $\Rightarrow$  Strahl  $s$  schneidet den Rand von  $CH(S)$  in einer Kante  $(y,z)$  oder in Pkt  $z=y$ . (da  $CH(S)$  auch dann endlich)

$\exists p \in s$  (genügend weit entfernt von  $x$ ), der näher zu  $y$  oder  $z$  ist als zu  $x$

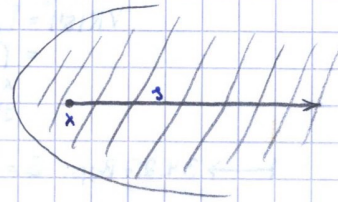
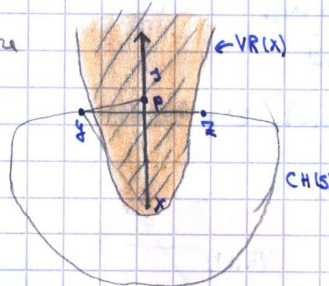
$\Rightarrow z$  zu  $p \in VR(x)$

dh.  $z$  zu  $z$ : das orangefarbene

ist  $VR(x)$

dh.  $z$  zu  $VR(x)$  ist

unbeschränkt.



$\Rightarrow$  Beh

" $\Leftarrow$  Sei nun  $x$  Ecke von  $CH(S)$ .

Betrachte Kegel  $K$  zwischen

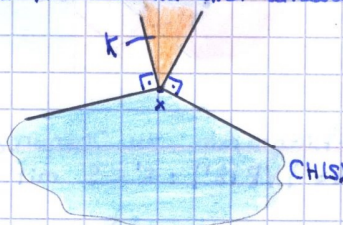
den Senkrechten auf dem zu  $x$  betrachteten Kanten.

Alle Pkte in  $K$  liegen näher zu  $x$  als zu allen anderen Orten.

$\Rightarrow K \subseteq VR(x)$

$\Rightarrow VR(x)$  unbeschränkt

(da  $K$  unbeschränkt)



Sei nun  $x$  auf dem Rand von  $CH(S)$

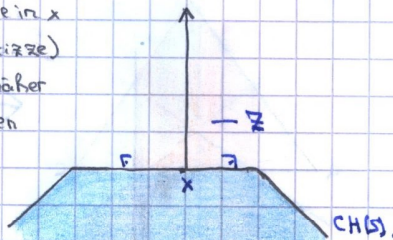
Betrachte senkrechte Gerade die in  $x$  startet und hoch zeigt (wie Skizze)

Alle Pkte auf Gerade  $G$  liegen näher zu  $x$  als zu allen anderen Orten

$\Rightarrow G \subseteq VR(x)$

$\rightarrow VR(x)$  unbeschränkt

(da  $K$  unbeschränkt)



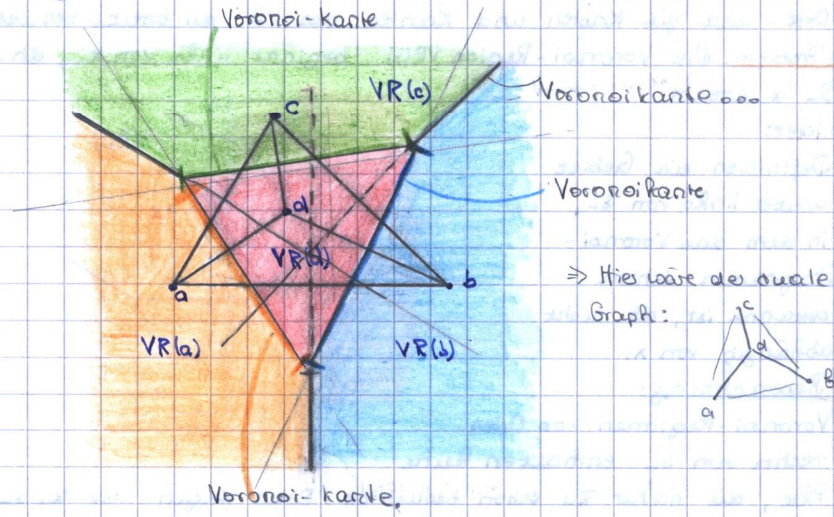


b). VD ist ein Graph, das  $\mathbb{R}^2$  in Voronoi-Regionen unterteilt.

( $\rightarrow$  Voronoi-Knoten + Voronoi-Kanten).

Sei  $G=(V,E)$  der duale Graph zu VD(S), d.h.

$V=S$  (allg. Flächen (Regionen)) und  $(x,y) \in E \Leftrightarrow VR(x)$  und  $VR(y)$  haben gemeinsame Voronoi-Kante.



$G$  ist ein planarer Graph und jede Kante  $e \in E$  entspricht genau einer Voronoi-Kante (siehe Konstruktion von  $G$ ).

(c,d) entspricht grün, (a,d) entspricht orange und (b,d) entspricht blau.

Graphentheorie  $\Rightarrow$  Jeder planare Graph mit  $n$  Knoten hat maximal  $3n-6$  Kanten.

$\Rightarrow$  Voronoi-Kanten  $\leq 3n-6$ .

Außerdem hat jeder Voronoi-Knoten mind. Grad 3 (da er durch mind. drei Orte definiert wird, von denen er gleiche Distanz hat).

$\forall v \in V: \text{Grad}(v) \geq 3$

$\Rightarrow \forall v \in V, |v|=1: \text{Grad}(v) \geq 3$

$\Rightarrow \forall v \in V: 3 \cdot |v| \leq \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow \sum_{v \in V} 3 \cdot |v| \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow 3 \cdot \# \text{Knoten} \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow$  Es gilt:  $\sum_{v \in V} \text{grad}(v) \geq 3 \cdot \# \text{V-Knoten} \wedge \sum_{v \in V} \text{grad}(v) = 2 \cdot |E|$

$\Rightarrow 3 \cdot \# \text{V-Knoten} \leq \sum \text{grad}(v) = 2 \cdot |E| \leq 2 \cdot (3n-6) = 6n-12$

$\Rightarrow \# \text{V-Knoten} \leq 2n-4$

3.4.2.12 Bemerkungen:

1). VD für  $n$  Orte hat lineare Größe in  $n$ .

2). Sei  $G=(V,E)$  dualer Graph zu VD(S), d.h.  $V=S$  und  $(x,y) \in E \Leftrightarrow VR(x)$  und  $VR(y)$  haben gemeinsame Voronoi-Kante.  $\checkmark$

$G$  heißt Delaunay-Triangulierung.

Eigenschaften: Jeder Umkreis eines Dreiecks enthält keinen Ort in seinem Inneren.

Bea: Gemeinsame Rand von zwei VR'nen heißt Voronoi-Kante

Und Endpunkte von Voronoi-Kanten sind die Voronoi-Knoten

$\Rightarrow v$  Vor. Knoten  $\Rightarrow \exists$  Orte  $a,b,c$  mit  $v$  Mittelpunkt von Kreis durch  $a,b,c$



$\Rightarrow$  Besser: andere Definition als 3.4.2.5!



### B4.3. Konstruktion von Voronoi-Diagrammen durch einen Plane Sweep Algorithmus.

Zunächst: allg. Lage der Orte

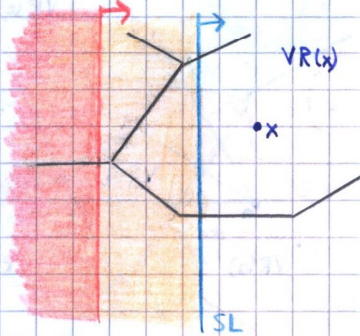
- keine 4 Orte liegen auf einem gemeinsamen Kreis
- paarweise verschiedene x-Koordinaten aller Orte und Events.

→ 3.4.3.1. Ziel: Bewege Senkrechte SL von links nach rechts über die Menge der Orte und gib Knoten und Kanten des VD der bereits besuchten Orte aus.

→ 3.4.3.2. Problem: Die Voronoi-Region  $VR(x)$  beginnt links von  $x$ , d.h. bevor SL  $x$  erreicht.

→ 3.4.3.3. Idee:

Definieren ein Gebiet weiter links von SL, in dem das Voronoi-Diagramm schon bekannt ist, d.h. nicht abhängig von  $x$ .



→ 3.4.3.4. Beobachtung:

Voronoi-Regionen von Orten rechts von SL enthalten keine Pkte, die näher zu schon besuchten Orten liegen als zu SL. Denn sonst würde ein solcher Pkt (unabh. von SL) näher zu einem anderen Ort liegen. Abstand zu SL ist nicht größer als Abstand zum nächsten Ort.

→ 3.4.3.5. Frage:

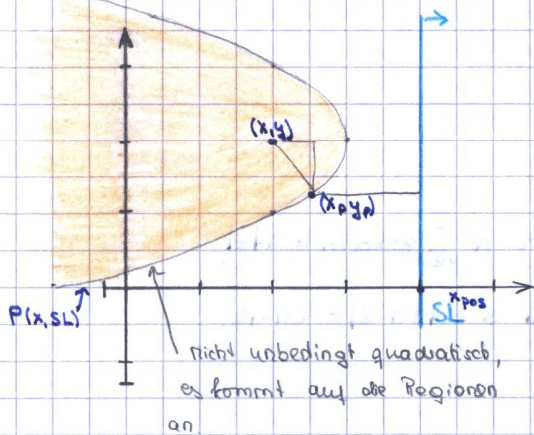
Betrachte das Gebiet  $L := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, SL)\}$  für einen schon besuchten Ort  $x$ .

⇒ Voronoi-Diagramm von  $S$  im Gebiet  $L$  hängt nicht von Ort  $x$  rechts von SL ab.

Welche Form hat  $L$ ?

→ 3.4.3.6. Beispiele:  $S' \leftarrow$  Menge der besuchten Orte.

1)  $S'$  besteht aus einem Ort  $x$ .



nicht unbedingt quadratisch, es kommt auf die Regionen an

→ Inneres der Parabel  $P(x, SL)$

ist die Menge der Pkte mit gleicher Distanz zu  $x$  und  $SL$ .

$(x, y)$  und  $SL$  bekannt

Wie sieht  $L$  aus?

→ Es muss gelten  $\forall (x_p, y_p) \in L$ :

$$(x_p - x_{pos})^2 \leq (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2$$

weil es muss eigentlich gelten:

$$x_p - x_{pos} = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}$$

→  $(x, y) = (2, 2)$ ,  $SL \equiv 4$  bekannt

$$\Rightarrow (x_p - 4)^2 = (x_p - 2)^2 + (y_p - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_p^2 - 8x_p + 16 = x_p^2 - 4x_p + 4 + y_p^2 - 4y_p + 4$$

$$\Leftrightarrow -4x_p + 8 = y_p^2 - 4y_p$$

$$\Leftrightarrow 4x_p = -y_p^2 + 4y_p + 8$$

$$\Leftrightarrow x_p = -\frac{1}{4}y_p^2 + y_p + 2$$

→ dies ist eine Parabelgleichung mit der Variablen  $y$

2) Im Allgemeinen wird  $L$  durch eine Folge von Parabelbögen nach rechts begrenzt

