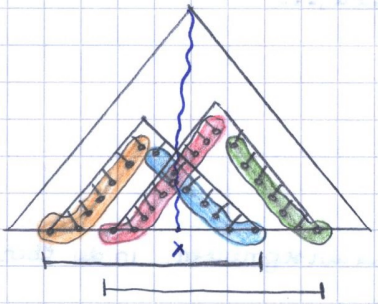
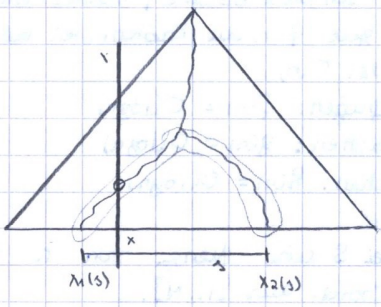
dh. die Knotenlisten auf dem Suchpfad nach x enthalten die Segmente, die von der vertikalen Geraden durch x geschnitten werden.





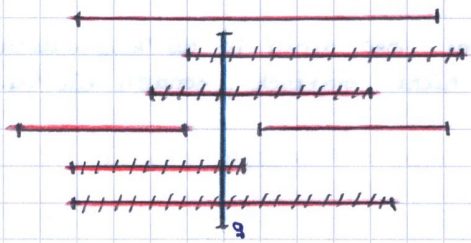
5.1.5. Laufzeit: $S(x) := \{s \in S : x_1(s) \le x \le x_2(s)\}$ kann in Zeit $O(\log N + m)$ berechnet werden, wobei $m := |S(x)|$, dh. die Größe der Ausgabe.

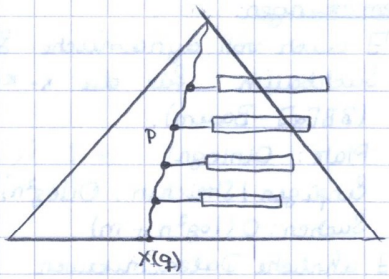
den Pfad durchlaufen ↑ in jedem Knoten in den kleineren Baum gehen und alle Knoten des kleineren Baumes (= die gesuchten Segmente) ausgeben. Für jede Ausgabe Const. Zeit Gesamt m Ausgaben ⇒ $O(\log N + m)$.

5.1.6. Problem:

Geg: das vertikale Segment q

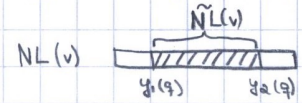
Ges: berechne $S(q) = \{s \in S : s \cap q \neq \emptyset\}$.





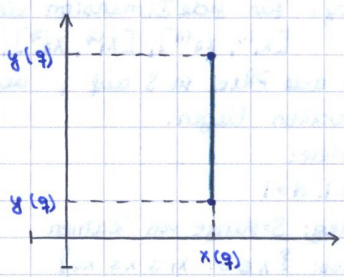
$\tilde{NL}(v) := \{s \in NL(v) : y_1(q) \le y(s) \le y_2(q)\}$

Dann ist $S(q) = \{s \in S : x_1(s) \le x(q) \le x_2(s) \text{ und } y_1(q) \le y(s) \le y_2(q)\} = \bigcup_{v \in P} \tilde{NL}(v)$



5.1.7 Algorithmus zur Berechnung des Problems:

1. P ← Suchpfad nach x(q)
2. Forall v ∈ P do
3. Lokalisiere $y_1(q)$ und $y_2(q)$ in NL(v)
4. gib alle Segmente davor aus
5. od.



5.1.8. Laufzeit:

Damit kostet die Berechnung von S(q): $O(\log N \cdot f(n) + m)$ Zeit, wobei $f(n)$ die Suchzeit in einer Knotenliste der Länge n ist.

Unterschied:

1). Man wandert den Pfad entlang und bei jedem Knoten gibt man seine Knotenliste NL(v) aus.
⇒ Kosten für Ausgabe im Knoten 1: $C \cdot |NL(v_1)|$
Kosten für Ausgabe im Knoten 2: $C \cdot |NL(v_2)|$
usw.
Gesamt m Ausgaben ⇒ $C \cdot |NL(v_1)| + C \cdot |NL(v_2)| + \ldots = C \cdot \underbrace{(|NL(v_1)| + |NL(v_2)| + \ldots)}_{= m} = C \cdot m$
weil alle ausgeg. werden!
⇒ $O(\log N + m)$
// Bem: nicht kennen!!!
// Anzahl der Elemente i.d Knotenlist i.a. verschieden
// ⇒ $\log N \cdot \underbrace{C_i \cdot |NL(v)|}_{=: f(n)}$ geht nicht!!! geht nur wenn
// Dann aber nicht mehr genau und nicht mehr output sensitiv und viel größere obere Schranke!!!

2). Man wandert den Pfad entlang und bei jedem Knoten sucht man nach entspr. Segmenten in Zeit $f(n)$ (= die größte Zeit, die es geben kann)
Höhe $\log N$, in jedem Knoten $f(n)$
⇒ $\log N \cdot f(n)$!

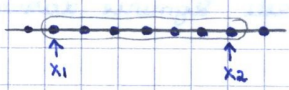
5.1.9. Realisierung der Knotenlisten.
→ durch Binäre balancierte Suchbäume. (Keine Gitterbäume!)
z.B. rot-schwarz Bäume, BB[α]-Bäume, AVL-Bäume, ...
Dann gilt für die Knotenlisten der Länge n:
- Platz: O(n)
- Einfügen: $f(n) = O(\log n)$
- Streichen: $g(n) = O(\log n)$
- Suchen: $R(n) = O(\log n)$.

5.1.10 Satz: Sei S eine Menge von n horizontalen Liniensegmenten in der Ebene mit x-Koord. aus $\{1..N\}$.
Dann gilt:
a). Ein Segmentbaum für S braucht Platz $O(N + n \log N)$.
b). Einfügen / Streichen eines Segments kostet: $O(\log n \log N)$
c) Suchen nach allen von einem vertikalen Suchsegment geschnittenen Segmenten
Kosten $O(\log n \cdot \log N + m)$
(Suchen in Knotenliste · Pfad · Ausgabe.)

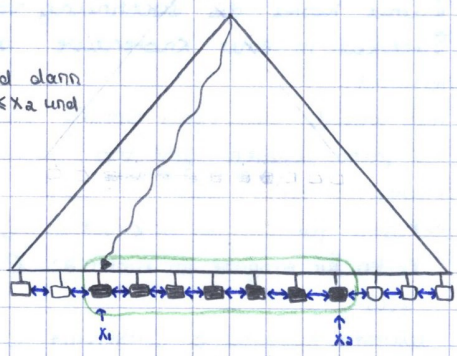
5.1.11. Bemerkungen:
1) ∃ auch voll dynamische Segmentbäume. Bei denen ist der zugrundeliegende Suchbaum für die x-Koordinaten nicht statisch, sondern ein bel. Baum. (BB[α]-Baum).
Platz: $O(n \log n)$ ← Da keine Gitterbäume mehr ⇒ Höhe: $\log n$
Einfügen / Streichen: $O(\log^2 n)$
Suchen: $O(\log^2 n + m)$
2) ∃ ähnliche Datenstrukturen für bel. (nicht notwendig horizontale) Segmente → Partition Tree.

5.2 Range-Tree (Bereichsabfragebaum).
5.2.1. Def: Range-Tree speichert Menge von Pkten im $\mathbb{R}^d$
Query: für jede Dimension ein Intervall.
$[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}], [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}], \ldots, [x_1^{(d)}, x_2^{(d)}]$.
Liste alle Pkte in S auf, dessen Koordinaten jeweils in den entsprechenden Intervallen liegen.

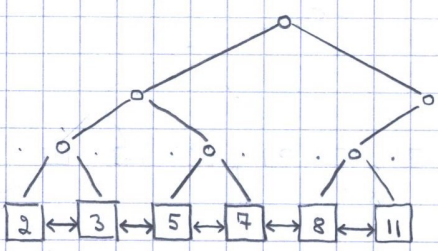
5.2.2 Beispiele:
→ 5.2.2.1. d=1
Geg: S=Menge von Zahlen
Ges: $\{x \in S : x_1 \le x \le x_2\}$



Datenstruktur: blattorientierter Suchbaum, wobei Blätter verkettet. (Hier kein Gitterbaum!)
(= 1-dim. Range-Tree).
Platz: O(n) weil bin. Baum.
Zeit Query: $O(\log n + k)$ wandere Pfad nach x_1 ($\log n$) und dann wandere über die verketteten Blätter solange $x \le x_2$ und gebe sie aus (k).
$n = |S|$
Insert / Delete: $O(\log n)$



Bsp: $S = \{2, 5, 3, 8, 11, 7\}$



5.2.2.2. d = 2.

Geg: $S \subset \mathbb{R}^2$ von n Pkten.

Ges: $\{q \in S : x_1 \le q_x \le x_2 \wedge y_1 \le q_y \le y_2\}$

Datenstruktur: blattorientierter Suchbaum, wobei Blätter verkettet.

Zunächst x-Koord. aus $\{1..N\}$. ⇒ Gitterbaum.

Ein 2 dim. Range-Tree besteht aus einem blattorientierten Suchbaum T für $\{1..N\}$.
Jeder Knoten v speichert eine nach y-Koord. sortierte Folge NL(v) (Knotenliste) von Pkten.
Die Pkte aus S werden wie folgt in einen anfangs leeren Baum T eingefügt:
Sei $p \in S$ mit $p = (p_x, p_y)$, dann wird p in jede Knotenliste NL(v) auf dem Suchpfad nach p_x gespeichert.

↑ Hier auch: blattorientierte Suchbäume, aber keine Gitterbäume!

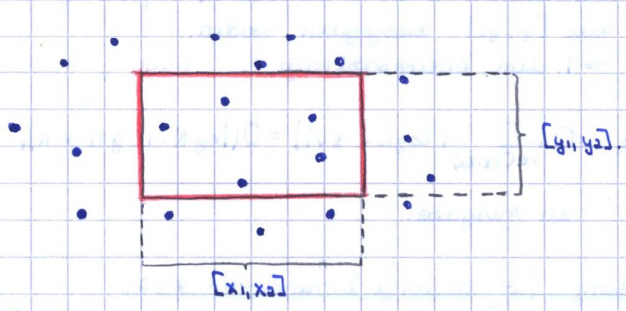
Jeder Pkt wird in log N Knoten gespeichert. $|S| = n \Rightarrow n \cdot \log N$.

Platz: $O(N + n \log N)$

Insert/Delete: $O(\log N \cdot \log n)$

↑ jeder NL(v) ist balancierter Baum (1. dim. Range Tree).

2-dim. Range Query:



gib alle Pkte $p \in S$ aus mit:
$x_1 \le p_x \le x_2 \wedge y_1 \le p_y \le y_2$

Vorgehen:

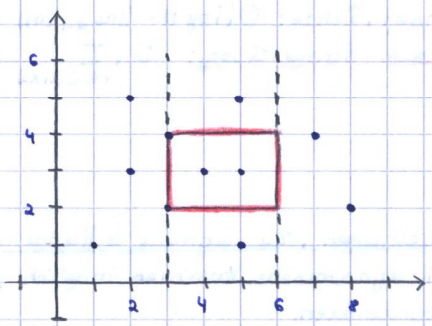
1. Schritt: Betrachte Pkte im unendlichen Streifen zw. x_1, x_2.

Beh: Die Knotenlisten NL(v) mit $v \in C(x_1, x_2)$ enthalten genau die gesuchten Pkte.

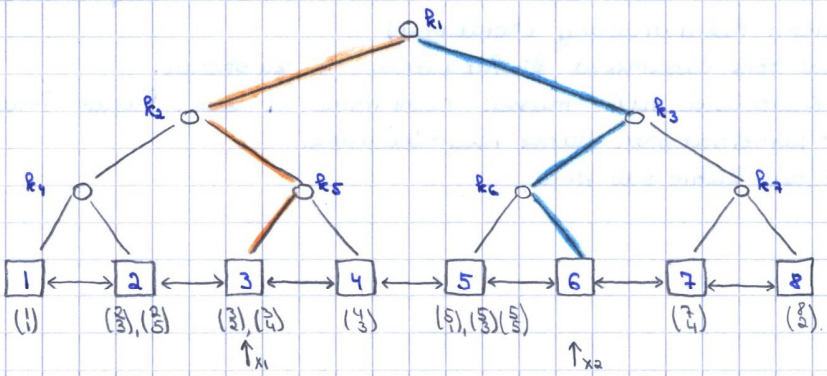
Bsp. zu Veranschaulichung:

$S = \{(1,1), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5), (7,4), (4,3), (8,2)\}$.

$x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $y_1 = 2$, $y_2 = 4$.



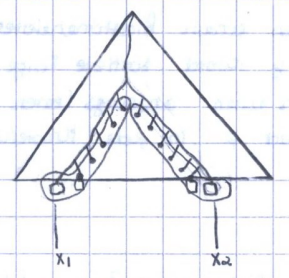
$p_1 = S$
$p_2 = \{(1,1), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5), (7,4), (4,3)\}$
$p_3 = \{(5,1), (5,3), (5,5), (7,4), (8,2)\}$
$p_4 = \{(1,1), (3,3), (3,5)\}$
$p_5 = \{(3,3), (5,3), (4,3)\}$
$p_6 = \{(5,1), (5,3), (5,5),$
$p_7 = \{(7,4), (8,2)\}$



$C(x_1, x_2) = \{3, 4, 5, 6\}$
⇒ NL(3), NL(4), NL(5), NL(6) enthalten die gesuchten Pkte
⇒ $\{(3,3), (3,4), (4,3), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

Begründung für die Behauptung:

Für beliebigen Knoten v enthält $NL(v)$ genau die Pkte, deren Suchpfad (nach x-Koord.) durch v geht, dh. alle Pkte im Bereich der Blätter des Unterbaumes von v.



Die Bereiche der Knoten $v \in C(x_1, x_2)$ bilden eine Partition des Intervalls $[x_1, x_2]$.

2. Schritt: Zur Beantwortung der eigentlichen Bereichsabfrage müssen wir nun die Knotenlisten $NL(v)$ $\forall v \in C(x_1, x_2)$ filtern, so dass nur Pkte mit y-Koord. aus $[y_1, y_2]$ ausgegeben werden.

→ 1. dim. Bereichsabfrage. nach y-Koord.!

⇒ Laufzeit: $O\left(\sum_{v \in C(x_1,x_2)} (\log n + K_v)\right) = O(\log N \cdot \log n + K)$, wobei $K := \sum_{v \in C(x_1,x_2)} K_v$ = Gesamtgröße der Ausgabe.

5.2.3 Verallgemeinerung für beliebige Dimensionen $d \geq 2$:

d-dim. Range-Tree besteht aus einem blattorientierten Suchbaum T für die erste Koordinate. Jeder Knoten v speichert $NL(v)$ als $(d-1)$-dim. Range-Tree. (Bzgl. Koord. 2..d).

Jeder Pkt $p \in S$ wird in allen $NL(v)$ für v auf dem Suchpfad nach 1. Koord. von p gespeichert.

Zuerst: Jede Dimension hat Koord. $\{1..N\}$ außer der letzten.

Platzbedarf: $O(\log N \cdot Platz_{d-1}(n) + N) = O(n \cdot \log^{d-1} N + N)$ ✓

Insert / Delete: $O(\log N \cdot Ins_{d-1}(n)) = O(\log^{d-1} N \cdot \log n)$

d-dim. Range-Query: $O\left(\sum_{v \in C(x_1,x_2)} (Query_{d-1}(n) + K_v)\right) = O(\log^{d-1} N \cdot \log n + K)$. ✓

5.2.4 Bemerkungen (zu Segment- & Range-Trees)

1). Voll dynamische Varianten möglich, dh. kein Gitter $\{1..N\}$ sondern beliebige, reelle Koordinaten.

Dazu: dynamischer Gerüstbaum T, dh. beim Einfügen und Löschen von Pkten (Segmenten) muss eventuell Blatt (mit entsprechender x-Koordinate) in T eingefügt oder entfernt werden. neben den Insert / Delete-Operationen auf Knotenlisten.

Problem: Rebalancierung (Rotationen)

Lösbar ohne Gesamtzeit für Rebalancierung zu erhöhen.

2). Die Knotenlisten $NL(v)$ müssen nicht immer 1-dim. Range-Trees (Suchbäume) sein.

- Kombinationen Range / Segmentbäume.
- nur Zähler oder Werte

5.3. Priority - Search - Tree:

5.3.1. Def: Sei $S \subset \mathbb{R}^2$

Ein Priority - Search - Tree (PST) T ist primärorientierter Suchbaum nach den x-Koord. der Pkte aus S.

5.3.2. Speichern der Pkte:

Ann: paarw. verschiedene x-Koordinaten.

$p \in S$ wird in einem Knoten auf Suchpfad nach p_x gespeichert und zwar so, dass T bzgl. der y-Koord. einen Maximumsheap bildet.

⇒ Auf jedem Pfad werden y-Koord. kleiner

⇒ Wurzel enthält Knoten mit max. y-Koord.

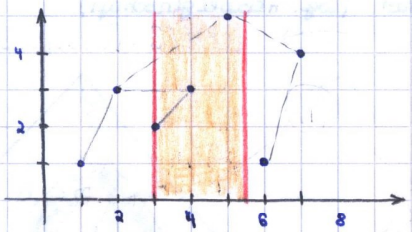
PST hat zwei Eigenschaften:
- Suchbaum nach x-Koord. der Pkte
- Heap nach y-Koord. der Pkte.

Aufbau (rekursiv):

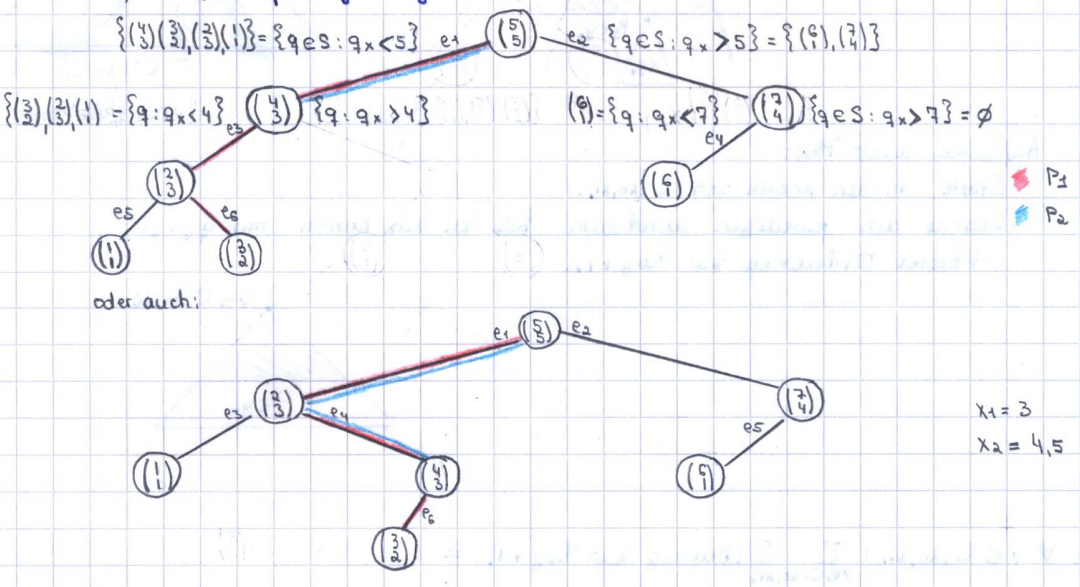
Wurzel w speichert $p \in S$ mit max. y-Koord.
- linker Unterbaum T_ℓ von w ist PST für $\{q \in S : q_x < p_x\}$
- rechter Unterbaum T_r von w ist PST für $\{q \in S : q_x > p_x\}$.

5.3.3. Beispiel:

$S = \{(1),(\frac{3}{2}),(\frac{2}{3}),(\frac{4}{3}),(\frac{6}{1}),(\frac{5}{5}),(\frac{7}{4})\}$.



Im Streifen: $(\frac{3}{2}),(\frac{4}{3}),(\frac{5}{5})$



oder auch:

$x_1 = 3$

$x_2 = 4{,}5$

5.3.4. Problem1 und Lösung:

Wo liegen alle Pkte aus einem vertikalen Streifen?

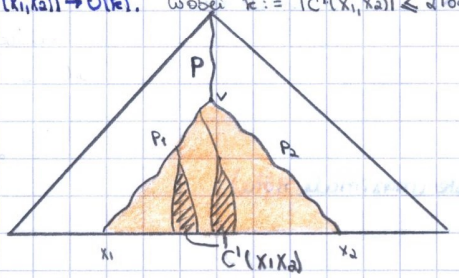
Antwort: auf P_1, P_2, P und allen Knoten zwischen P_1 und P_2!

Achtung: Auf den Pfaden P, P_1, P_2 können auch andere Pkte liegen.

Berechnung der Pkte:
- Filtere die Pkte auf Pfaden nach $[x_1, x_2]$ in Zeit $2 \cdot \log n + k$.
- Gib alle Pkte, die in Knoten zwischen P_1, P_2 gespeichert sind, aus $|C'(x_1,x_2)| \to O(\tilde{k})$. wobei $\tilde{k} := |C'(x_1,x_2)| \leq 2 \log n$

$2(\text{Höhe}(v) + 1 + O(k_1) + 1 + O(k_2) + \dots) =$
$= 2 \cdot (\text{Höhe}(v) + O(k_1) + O(k_2) + \sum 1) =$
$= 2 \cdot (\log n + \tilde{k})$

$\tilde{k}$:= # Knoten in orange.



Im Bsp: 1 Bild ⇒ $\{(\frac{5}{5}),(\frac{4}{3}),(\frac{2}{3}),(\frac{3}{2})\} \supset$ gesuchte Menge

2 Bild ⇒ $\{(\frac{5}{5}),(\frac{2}{3}),(\frac{4}{3}),(\frac{3}{2})\} \supset$ gesuchte Menge

Platz: $O(n)$!

Gesamtlaufzeit: $2\log n + k + O(\log n + \tilde{k}) =$
$= O(\log n + K)$

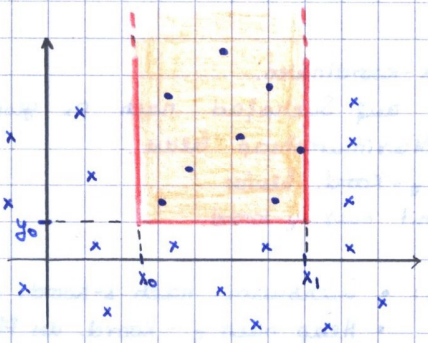
K = # Ausgaben. $(= k + \tilde{k})$

5.3.5 Problem 2 + Lösung:

Wozu Heap-Eigenschaft nach y-Koordinaten?
→ 1½-dimensionale Range Abfragen
(Halb offene oder 3 seitige).

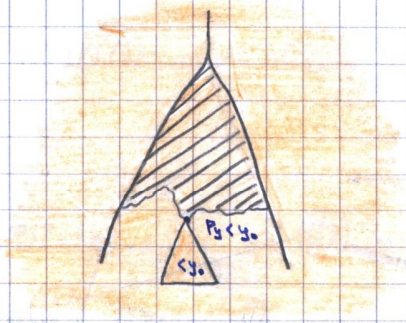
Geg: $x_0, x_1, y_0, \ldots, S \subset \mathbb{R}^2$

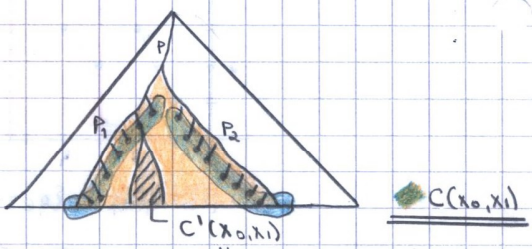
Ges: alle $p \in S$ mit
$x_0 \leq p_x \leq x_1$ und
$p_y \geq y_0$



Lösung:

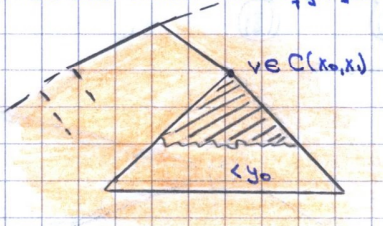
- Filtern der Pfade: $\forall$ Knoten $v \in P_1 \cup P_2 \cup P$ gib enthaltenen Pkt p aus, falls $x_0 \leq p_x \leq x_2 \wedge p_y \geq y_0$
  → Kostet Zeit $O(\log n)$. Mit Ausgabe kostet dies $O(\log n + k)$
- Rest der Ausgabe (normalerweise müssen alle $v \in P_1 \cup P_2 \cup P$ und zwischen P_1 und P_2 betrachtet werden. Oben nur $v \in P_1 \cup P_2 \cup P$, hier also die restlichen, dh. also: v zwischen P_1 und P_2) ist im oberen Bereich von $C'(x_0, x_1)$ gespeichert (wg. Heapeigenschaft)





{"alle kleinen Bäume"}

Auflisten dieser Pkte:
Starte in den Knoten von $C(x_0, x_1)$.
Scanne den jeweiligen Unterbaum bis zu den Knoten mit $p_y < y_0$
→ Kostet O(Beitrag zur Ausg + 1).



Laufzeit: $\forall v \in C(x_0, x_1)$: $\sum_{v \in C(x_0, x_1)} O$(Beitrag zur Ausg + 1) =

$= O(\log n + K')$, wobei K' = Beitrag zur Gesamtlösung von $C'(x_0 x_1)$

$\text{Höhe}(v) + 1 + O(\text{Beitr. zu Ausg}(v_1) + 1) + 1 + O(\ldots) + \ldots + \text{Höhe}(v) + 1 + O(\ldots) + \ldots = 2 \cdot \log n + \underbrace{\sum_{v \in C(x_0, x_1)} O(\text{Beitr. zu Ausg} + 1)}_{=: K'} = O(\log n + K')$

5.3.6. Satz (Zusammenfassung):

Der Priority-Search Tree verwaltet eine Menge von n Pkten im $\mathbb{R}^2$ unter folgenden Operationen und Laufzeiten:

- Insert / Delete: $O(\log n)$
- Drei-seitige Bereichsabfrage: $O(\log n + K)$, K = # Ausgaben.

und benötigt Speicherplatz: $O(n)$.

⇒ Gesamtlaufzeit: $a \log n + k + O(\log n + K') = \underline{O(\log n + \tilde{K})}$
$\tilde{K} = k + K'$, # Ausgaben.

5.3.7 Anwendung:

feste (maximale Höhe).

↑ Range-Abfragen mit PST (→ Übung).