

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 1

Abgabe: 12. November 2021 um 12 Uhr

Bitte beachten Sie die folgenden Vorgaben für die Abgabe: Geben Sie nur eine *einzelne* Datei ab. Diese Datei sollte vorzugsweise im **pdf**-Format sein. Falls Ihre Abgabe aus mehr als einer Datei besteht, dann packen Sie diese bitte zusammen in ein **zip**-Archiv. Notieren Sie auf Ihrer Abgabe die Namen und Matrikelnummern aller an der Abgabe beteiligten Personen. Achten Sie darauf, dass Ihre Datei leserlich ist – insbesondere bei Fotos einer handschriftlichen Abgabe. Bezeichnen Sie die abzugebende Datei nach dem folgenden Muster:

Nachname_Vorname_Matrikelnummer.pdf (bzw. .zip)

Falls Sie als Gruppe abgeben reichen als Dateiname die Daten eines Gruppenmitglieds – die Daten der anderen Mitglieder stehen in der Lösung selbst. Zur Abgabe gibt es in *Moodle* einen passenden Abschnitt namens “Übung 1” in dem Sie Ihre Lösungen hochladen können.

Abgabetermin ist Freitag, der **12. November 2021 um 12 Uhr**.

Aufgabe 1.1 (2 + 3 Punkte)

Gegeben ist eine Turingmaschine $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$ mit Zustandsmenge $S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, \square\}$, Blanksymbol $\square$, Startzustand z_0 , Endzustandsmenge $F = \{z_e\}$ und Zustandsüberföhrungsfunktion δ mit:

$\delta(z, w)$	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_e, \square, R)$

- Geben Sie die Folge der Konfigurationen an, die M bei Eingabe 101 durchläuft.
- Welche Funktion $s : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ und welche Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet M ?

Aufgabe 1.2 (2 + 3 Punkte)

- Zeigen Sie, dass man zu jeder Turingmaschine eine neue Turingmaschine konstruieren kann, die in jedem Schritt den Schreib-Lese-Kopf entweder eine Position nach links oder eine Position nach rechts bewegt. (D. h. der Kopf darf in keinem Schritt stehen bleiben – die Kopfbewegungen sind aus $\{L, R\}$.)
- Zeigen Sie, dass man zu jeder Turingmaschine eine neue Turingmaschine konstruieren kann, die keine Felder links der *initialen Eingabe* benutzt. D. h. das Arbeitsband ist nur rechtsseitig unendlich; die linke Seite besitzt einen Rand.

(*Hinweis:* Bei beiden Teilaufgaben reicht jeweils eine Beweisskizze – es sind keine formalen Beweise gefordert. Überlegen Sie sich bei der ersten Teilaufgabe, wie Sie das “Stehenbleiben” mithilfe von zusätzlichen Zuständen umgehen können. Überlegen Sie sich bei der zweiten Teilaufgabe, wie Sie sicherstellen können, dass die TM links vom aktuellen Wort immer ein freies Feld für weitere Symbole hat.)

Aufgabe 1.3 (4 + 1 Punkte)

Als Erweiterung der in der Vorlesung eingeföhrten Turingmaschine kann man *Zweiband-Turingmaschinen* (ZTM) definieren. Eine ZTM besitzt zwei Arbeitsbänder mit jeweils eigenen Schreib-Lese-Köpfen. Formal ist eine ZTM auch ein 7-Tupel $(S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, \square, F)$. Der Unterschied ist, dass die Übergangsfunktion alle Arbeitsbänder betrachtet, also als $\delta: S \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow S \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, N, R\} \times \{L, N, R\}$ definiert ist.¹

- Konstruieren Sie eine Zweiband-Turingmaschine, welche als Eingabe zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ bekommt und ausgibt, ob beide Zahlen gleich sind, ob die erste Zahl kleiner als die zweite Zahl ist, oder ob sie größer als die zweite Zahl ist. Formal soll die ZTM also die folgende Funktion berechnen:

$$f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \{-1, 0, 1\}, (x, y) \mapsto \begin{cases} -1, & x < y \\ 0, & x = y \\ 1, & x > y \end{cases}$$

Nehmen Sie ruhig an, dass die beiden Zahlen binär kodiert sind und durch ein Trennzeichen getrennt auf dem ersten Arbeitsband als Eingabe stehen.

- Welchen Vorteil bietet eine ZTM gegenüber einer TM?

¹Man kann die Definition allgemein auf k Bänder erweitern.