

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 10

Abgabe: –

Ankündigung: Dieses Übungsblatt wird nicht bewertet. Dennoch findet die Übung am 8. Februar statt um die Aufgaben zu besprechen.

Definition(en)

- FÄRBBARKEIT:
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
 - **gefragt:** Gibt es eine Funktion $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, sodass für alle $v, u \in V$ (mit $vu \in E$) gilt: $f(v) \neq f(u)$?
(Anders ausgedrückt: Kann man die Knoten des Graphen so färben, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?)
- EULERPFAD-Problem:
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
 - **gefragt:** Gibt es einen Pfad, der jede *Kante* im Graphen genau einmal besucht?
- RUCKSACK-Problem:
 - **gegeben:** Eine Kapazität $K \in \mathbb{N}$ und Gewichte $g_1, \dots, g_k \in \mathbb{N}$
 - **gefragt:** Gibt es eine Teilmenge $R \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in R} g_i = K$?
- s-t-ERREICHBARKEIT:
 - **gegeben:** Ein gerichteter Graph und zwei Knoten s und t
 - **gefragt:** Gibt es einen Pfad von s nach t ?
- FAKTORISIERUNG:
 - **gegeben:** Zwei natürliche Zahlen n und k
 - **gefragt:** Hat n einen Primfaktor, der kleiner als k ist?
- SUPERMARIOBROS:
 - **gegeben:** Ein beliebiges Level aus *Super Mario Bros.*
 - **gefragt:** Ist es möglich, das Ziel zu erreichen?
- SOKOBAN:
 - **gegeben:** Ein beliebiges *Sokoban*-Puzzle
 - **gefragt:** Ist es möglich, alle Kisten auf Zielfelder zu schieben?
- INFINITEMINESWEEPER:
 - **gegeben:** Ein beliebiges, teilweise gelöstes *Minesweeper*-Feld
 - **gefragt:** Ist es möglich die Lösung auf eine unendlich große Ebene auszuweiten?

Aufgabe 10.1 (0 Punkte)

- (i) Welche der folgenden Entscheidungsprobleme liegen in P?
- (ii) Welche liegen in NP? (Ohne, dass ein deterministischer Polynomzeitalgorithmus bekannt ist.)
- (iii) Für welche der Probleme ist noch nicht einmal ein nichtdeterministischer Polynomzeitalgorithmus bekannt?
- EULERPFAD-Problem
 - RUCKSACK-PROBLEM
 - s - t -ERREICHBARKEIT
 - FAKTORISIERUNG
 - k -FÄRBBARKEIT
 - SUPERMARIOBROS
 - SOKOBAN
 - INFINITEMINESWEEPER

Aufgabe 10.2 (0 Punkte)

- a) Geben Sie eine (Mehrband-)Turingmaschine M an, die die Funktion $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $g(n) = 11n$ berechnet. (*Hinweis:* Sie müssen nicht unbedingt das Binärsystem nutzen.)
- b) Geben Sie eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an, so dass $\text{time}_M(w) \leq f(|w|)$. (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe 10.3 (0 Punkte)

Gegeben ist eine Turingmaschine $M = (S, E, A, \delta, z_0, \square, F)$ mit Zustandsmenge $S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$, Eingabealphabet $E = \{0, 1\}$, Bandalphabet $A = \{0, 1, \square\}$, Blanksymbol $\square$, Startzustand z_0 , Endzustandsmenge $F = \{z_e\}$ und Zustandsüberföhrungsfunktion δ mit:

$\delta(z, w)$	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, \square, R)$	$(z_1, 1, R)$	$(z_2, 1, N)$
z_1	$(z_1, 0, R)$	$(z_1, 1, R)$	$(z_2, 1, N)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_e, 1, N)$

- a) Geben Sie die Folge der Konfigurationen an, die M bei Eingabe 010 durchläuft.
- b) Welche Funktion $s: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ und welche Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet M ?

Aufgabe 10.4 (0 Punkte)

Schreiben Sie ein LOOP- oder WHILE-Programm, das x^y berechnet. Vermeiden Sie die explizite Multiplikation.

Aufgabe 10.5 (0 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? (Begründen Sie Ihre Antworten.)

- i) Jede nicht-entscheidbare Menge enthält eine entscheidbare Teilmenge.
- ii) Jede Teilmenge einer entscheidbaren Menge ist entscheidbar.
- iii) Aus A entscheidbar und $A \cap B$ entscheidbar folgt B entscheidbar.
- iv) Die Menge $\{(w, x) \in E^* \times \mathbb{N} : M_w(x) = x^2\}$ ist entscheidbar.
- v) Für $h_M(w) : E^* \rightarrow \{0, 1\}$ mit $(h_M(w) = 1 \equiv M(w) \text{ hält})$ gilt $A = \{h_M(w)\}$ ist entscheidbar.

Aufgabe 10.6 (0 Punkte)

Sei h eine totale und surjektive Funktion, die als Bildbereich die *komplette* Menge aller einstelligen berechenbaren Zahlenfunktionen hat, also:

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f \text{ ist eine totale berechenbare Funktion}\}$$

Das heißt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $h(n)$ eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ und $h(n)(x)$ ist der Wert der Funktion $h(n)$ an Stelle x .

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion nicht berechenbar ist:

$$g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad g(n, x) = h(n)(x)$$

(*Hinweis:* Konstruieren Sie aus g eine einstellige totale Funktion, welche im Bildbereich von h liegen würde und zeigen Sie mithilfe von Diagonalisierung (ähnlich zu Kapitel 5 in den Folien) einen Widerspruch auf.)

Aufgabe 10.7 (0 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) $\{(n, k) \in \mathbb{N}^2 : n \text{ hat einen Primfaktor kleiner } k\}$ ist entscheidbar.
- b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : (\exists n \in \mathbb{N}) \ x^n + y^n = z^n\}$ ist semi-entscheidbar.