

Definition(en)

Die Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A(0, y) &= y + 1 \\ A(x + 1, 0) &= A(x, 1) \\ A(x + 1, y + 1) &= A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

Aussage 1

Es gelten die folgenden drei Aussagen:

- i) $A(1, y) = y + 2$
- ii) $A(2, y) = 2y + 3$
- iii) $A(3, y) = 2^{y+3} - 3$

Beweis

Alle drei Aussagen lassen sich induktiv zeigen.

- i) Induktionsanfang: $y = 0$

$$\begin{aligned} A(1, 0) &= A(0, 1) && \text{(Def. von A)} \\ &= 1 + 1 && \text{(Def. von A)} \\ &= 2 \\ &= 0 + 2 \\ &= y + 2 && (y = 0) \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $y \rightarrow y + 1$

$$\begin{aligned} A(1, y + 1) &= A(0, A(1, y)) && \text{(Def. von A)} \\ &= A(0, y + 2) && \text{(IA)} \\ &= y + 2 + 1 && \text{(Def. von A)} \\ &= (y + 1) + 2 \end{aligned}$$

- ii) Induktionsanfang: $y = 0$

$$\begin{aligned} A(2, 0) &= A(1, 1) && \text{(Def. von A)} \\ &= A(0, A(1, 0)) && \text{(Def. von A)} \\ &= A(1, 0) + 1 && \text{(Def. von A)} \\ &= A(0, 1) + 1 && \text{(Def. von A)} \\ &= 1 + 1 + 1 && \text{(Def. von A)} \\ &= 3 \\ &= 2 \cdot 0 + 3 \\ &= 2 \cdot y + 3 && (y = 0) \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $y \rightarrow y + 1$

$$\begin{aligned} A(2, y + 1) &= A(1, A(2, y)) && \text{(Def. von A)} \\ &= A(2, y) + 2 && \text{(i)} \\ &= 2y + 3 + 2 && \text{(IV)} \\ &= 2y + 2 + 3 \\ &= 2 \cdot (y + 1) + 3 \end{aligned}$$

iii) Induktionsanfang: $y = 0$

$$\begin{aligned} A(3, 0) &= A(2, 1) && \text{(Def. von A)} \\ &= 2 \cdot 1 + 3 && \text{(ii)} \\ &= 5 \\ &= 8 - 3 \\ &= 2^3 - 3 \\ &= 2^{2 \cdot 0 + 3} - 3 \\ &= 2^{2 \cdot y + 3} - 3 && (y = 0) \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $y \rightarrow y + 1$

$$\begin{aligned} A(3, y + 1) &= A(2, A(3, y)) && \text{(Def. von A)} \\ &= 2 \cdot A(3, y) + 3 && \text{(ii)} \\ &= 2 \cdot (2^{y+3} - 3) + 3 && \text{(IV)} \\ &= 2^{y+4} - 3 \\ &= 2^{(y+1)+3} - 3 \end{aligned}$$

Aussage 2

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Sei weiter $B_k: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $B_k(n) = A(k, n)$. Dann ist B_k primitiv-rekursiv.

Beweis

Um zu zeigen, dass B_k primitiv-rekursiv ist bietet sich Induktion über k an.

▷ *Induktionsanfang* ($k = 0$):

Für $k = 0$ gilt $B_k(n) = B_0(n) = A(0, n) = n + 1$. Diese Funktion ist offensichtlich primitiv-rekursiv. Genauer kann man argumentieren, dass $n + 1$ der Nachfolgerfunktion entspricht, also $B_0 = S$ ist. Und diese ist nach Voraussetzung primitiv-rekursiv.

▷ *Induktionsannahme*:

Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt: B_k ist primitiv-rekursiv.

▷ *Induktionsschritt* ($k \rightarrow k + 1$):

Wir können die Funktion wie folgt aufschreiben:

$$B_{k+1}(n) = \begin{cases} B_k(1) & (n = 0) \\ B_k(B_{k+1}(n - 1)) & (n > 0) \end{cases}$$

B_{k+1} bietet eine Fallunterscheidung nach dem einzigen Argument n . Das heißt, wir können B_{k+1} mit dem Rekursionsschema PRREK definieren, also $B_{k+1} := \text{PRREK}(g, h)$. Da B_{k+1}

einstellig ist, muss g nullstellig und h zweistellig (mit Argument $(n-1, B_{k+1}(n-1))$) sein. Wir definieren $g: \mathbb{N}_0^0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $g := \text{KOMP}(c_1^{(0)}, B_k) (= B_k(1))$. Weiter definieren wir $h: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $h := \text{KOMP}(pr_2^{(2)}, B_k) (= B_k(B_{k+1}(n-1)))$. Zusammengefasst ergibt sich also:

$$B_{k+1} := \text{PRREK}(\text{KOMP}(c_1^{(0)}, B_k), \text{KOMP}(pr_2^{(2)}, B_k))$$

Da $c_1^{(0)}$ und $pr_2^{(2)}$ nach Vorlesung und B_k nach Induktionsannahme primitiv-rekursiv sind und B_{k+1} mithilfe der Erzeugungsschemata aus diesen erzeugt wurde, ist B_{k+1} also auch primitiv-rekursiv.