

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 4

Abgabe: 3. Dezember 2021 um 12 Uhr

Bitte beachten Sie die folgenden Vorgaben für die Abgabe: Geben Sie nur eine *einzelne* Datei ab. Diese Datei sollte vorzugsweise im pdf-Format sein. Falls Ihre Abgabe aus mehr als einer Datei besteht, dann packen Sie diese bitte zusammen in ein zip-Archiv. Notieren Sie auf Ihrer Abgabe die Namen und Matrikelnummern aller an der Abgabe beteiligten Personen. Achten Sie darauf, dass Ihre Datei leserlich ist – insbesondere bei Fotos einer handschriftlichen Abgabe. Bezeichnen Sie die abzugebende Datei nach dem folgenden Muster:

Nachname_Vorname_Matrikelnummer.pdf (bzw. .zip)

Falls Sie als Gruppe abgeben reichen als Dateiname die Daten eines Gruppenmitglieds – die Daten der anderen Mitglieder stehen in der Lösung selbst. Zur Abgabe gibt es in *Moodle* einen passenden Abschnitt namens “Übung 4” in dem Sie Ihre Lösungen hochladen können.

Abgabetermin ist Freitag, der **3. Dezember 2021 um 12 Uhr**.

Definition(en)

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen. Wir definieren die *Konkatenation von Sprachen* als $L_1 \circ L_2 := \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$.

Aufgabe 4.1 (3 Punkte)

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen. Zeigen Sie, dass $L_1 \circ L_2$ ebenfalls entscheidbar ist.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Seien $A, \bar{A} \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbare Sprachen (wobei $\bar{A} = \Sigma^* \setminus A$ das Komplement von A bezeichnet).

Zeigen Sie: A ist entscheidbar.

(*Hinweis:* Für ein beliebiges $w \in \Sigma^*$ hält mindestens eine der beiden Turingmaschinen, die die jeweilige charakteristische Funktion berechnen. Überlegen Sie sich, wie Sie diese beiden Turingmaschinen “parallel” laufen lassen können.)

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ semi-entscheidbare Mengen. Welche der Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$ und $A \setminus B$ sind ebenfalls semi-entscheidbar? Und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4.4 (2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist entscheidbar.
- b) $\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt eine Primzahl } p, \text{ sodass } p+1, \dots, p+n \text{ keine Primzahlen sind}\}$ ist semi-entscheidbar.