

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 5

Abgabe: 10. Dezember 2021 um 12 Uhr

Bitte beachten Sie die folgenden Vorgaben für die Abgabe: Geben Sie nur eine *einzelne* Datei ab. Diese Datei sollte vorzugsweise im pdf-Format sein. Falls Ihre Abgabe aus mehr als einer Datei besteht, dann packen Sie diese bitte zusammen in ein zip-Archiv. Notieren Sie auf Ihrer Abgabe die Namen und Matrikelnummern aller an der Abgabe beteiligten Personen. Achten Sie darauf, dass Ihre Datei leserlich ist – insbesondere bei Fotos einer handschriftlichen Abgabe. Bezeichnen Sie die abzugebende Datei nach dem folgenden Muster:

Nachname_Vorname_Matrikelnummer.pdf (bzw. .zip)

Falls Sie als Gruppe abgeben reichen als Dateiname die Daten eines Gruppenmitglieds – die Daten der anderen Mitglieder stehen in der Lösung selbst. Zur Abgabe gibt es in *Moodle* einen passenden Abschnitt namens “Übung 5” in dem Sie Ihre Lösungen hochladen können.

Abgabetermin ist Freitag, der **10. Dezember 2021 um 12 Uhr**.

Definition(en)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ beliebige Mengen. A heißt *reduzierbar* auf B ($A \leq B$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ gibt mit: $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

Aufgabe 5.1 (3 Punkte)

Sei $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ eine *totale* Funktion mit der Eigenschaft: Falls für ein $w \in \Sigma^*$ die TM M_w angesetzt auf w hält, dann geschieht dies in weniger als $f(w)$ Schritten. Zeigen Sie: f ist nicht berechenbar.

Aufgabe 5.2 (2 + 1 + 2 + 1 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei beliebige Sprachen und sei A auf B reduzierbar mittels Funktion f . Zeigen Sie:

- (i) B entscheidbar $\Rightarrow A$ entscheidbar
- (ii) A nicht entscheidbar $\Rightarrow B$ nicht entscheidbar
- (iii) B semi-entscheidbar $\Rightarrow A$ semi-entscheidbar
- (iv) A nicht semi-entscheidbar $\Rightarrow B$ nicht semi-entscheidbar

Aufgabe 5.3 (2 + 2 + 2 Punkte)

Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ beliebige, nicht-leere Mengen. Zeigen Sie:

- a) $A \leq B$ genau dann, wenn $\bar{A} \leq \bar{B}$.
- b) Aus $A \leq B$ und $B \leq C$ folgt $A \leq C$.
- c) A ist entscheidbar genau dann, wenn A semi-entscheidbar ist und $A \leq \bar{A}$.