

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 7

Abgabe: 14. Januar 2022 um 12 Uhr

Aufgabe 7.1 (6 + 5 Punkte)

Gegeben sei eine Turingmaschine $M = (\{z_0, z_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$ wobei δ wie folgt definiert ist:

$\delta(z, w)$	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_f, 0, N)$

Mit anderen Worten: M hängt ans Ende der Eingabe eine einzelne 0. Sei weiter $w \in \{0, 1\}^*$ das Wort, das diese Turingmaschine kodiert (also $M = M_w$).

- Geben Sie die Instanz des modifizierten Post'schen Korrespondenzproblems (MPCP) an, die sich gemäß der Reduktion $K \leq MPCP$ (Lemma 8.4, Seite 43 im Skript) aus dieser Turingmaschine ergibt.
- Angenommen $w = 101$. Geben Sie die Folge der Tupel Ihrer MPCP-Instanz an, die der Arbeitsweise der obigen Turingmaschine angewendet auf w entspricht.

Lösung

- Das Alphabet Σ für die MPCP-Instanz ergibt sich aus dem Arbeitsalphabet Γ und der Zustandsmenge Z der gegebenen TM und einem Trennsymbol. Es gilt also $\Sigma = \Gamma \cup Z \cup \{\#\} = \{0, 1, \square, z_0, z_f, \#\}$. Sei für die folgenden Tupel $w \in \{0, 1\}^*$ ein beliebiger Binärstring. Die Konstruktion der Reduktion teilt die Tupel in fünf Gruppen auf:

- Startwortpaar: $(\#, \# \square z_0 w \square \#)$
- Kopierregeln: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(\square, \square)$, $(\#, \#)$
- Überführungsregeln: $(z_0 0, 0 z_0)$, $(z_0 1, 1 z_0)$, $(z_0 \square, z_f 0)$, $(z_0 \#, z_f 0 \#)$
- Löschrregeln: $(0 z_f, z_f)$, $(1 z_f, z_f)$, $(\square z_f, z_f)$, $(z_f 0, z_f)$, $(z_f 1, z_f)$, $(z_f \square, z_f)$
- Abschlussregeln: $(z_f \# \#, \#)$

Da wir MPCP betrachten, muss das Startwortpaar auch das mit dem kleinsten Index sein, damit wir erzwingen, dass eine gültige Lösung mit dem Paar $(\#, \# \square z_0 w \square \#)$ beginnt. Sonst wären bspw. die Kopierregeln gültige Lösungen. Die Reihenfolge der anderen Tupel ist allerdings egal.

- Seien die Tupel wie vorhin definiert und wie folgt nummeriert: Startwortpaar $S1$, Kopierregeln $K1$, $K2$, $K3$ und $K4$, Überführungsregeln, $U1$, $U2$, $U3$ und $U4$ Löschrregeln $L1$, $L2$, $L3$, $L4$, $L5$ und $L6$ und Abschlussregel $A1$. Sei $w = 101$. Dann ergibt sich als Lösung die Indexfolge:

$S1, K3, U2, K1, K2, K3, K4, K3, K2, U1, K2, K3, K4, K3, K2,$
 $K1, U2, K3, K4, K3, K2, K1, K2, U3, K4, K3, K2, K1, L2, K1,$
 $K4, K3, K2, L1, K1, K4, K3, L2, K1, K4, K3, L4, K4, L3, K4, A1$

Es wird mit $S1$ gestartet. Da es jeweils eine Löschrregel für "Symbol-Zustand" und eine für "Zustand-Symbol" gibt, kann deren Reihenfolge (und damit auch die Reihenfolge der folgenden Tupel) variieren. Ansonsten gibt es keine Möglichkeiten, die Tupel anders zu wählen. Als Wörter aus dieser Tupelfolge ergeben sich dann:

$\# \square z_0 1 0 1 \square \# \square 1 z_0 0 1 \square \# \square 1 0 z_0 1 \square \# \square 1 0 1 z_0 \square \# \square 1 0 1 z_f 0 \square \# \square 1 0 z_f 0 \square \# \square 1 z_f 0 \square \# \square z_f 0 \square \# \square z_f \square \# z_f \square \square$
 $\# \square z_0 1 0 1 \square \# \square 1 z_0 0 1 \square \# \square 1 0 z_0 1 \square \# \square 1 0 1 z_0 \square \# \square 1 0 1 z_f 0 \square \# \square 1 0 z_f 0 \square \# \square 1 z_f 0 \square \# \square z_f 0 \square \# \square z_f \square \# z_f \square \square$

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Finden Sie Beispiele für Mengen $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subset B \subset C \subset D$, so dass A und C entscheidbar sind, B und D jedoch nicht. (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Lösung

Hier gibt es viele Lösungen. Zwei ähnliche Beispiele:

- Setze $A = \emptyset$. Eine TM, die immer FALSCH ausgibt entscheidet die leere Menge. Die leere Menge ist außerdem Teilmenge jeder Menge.
- Setze $B = H$ (also das Halteproblem). Ist nach VL nicht entscheidbar.
- Setze $C = \{\text{"Menge aller Turingmaschinen"}\}$. Ist entscheidbar, da man nur die "Syntax" überprüfen muss. Da jedes Element "im Halteproblem" eine TM ist, ist die Menge aller Turingmaschinen eine Obermenge zu B .
- Setze $D = C \cup PCP$. Das Post'sche Korrespondenzproblem ist nicht entscheidbar, also auch nicht die Menge D . Außerdem ist nach Konstruktion D eine Obermenge zu C .

Beim folgenden Beispiel bestehen Mengen B und C aus Tupeln um die Teilmengenbeziehung zu ermöglichen. Die zweite Komponente wird allerdings "ignoriert".

- Setze $A = \emptyset$. (siehe oben)
- Setze $B = \{(u, u) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : M_u(u) \text{ hält}\}$. Halteproblem ist nicht entscheidbar.
- Setze $C = \{(u, u) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : M_u \text{ ist eine TM}\}$. Wie oben. "Syntax" überprüfen ist entscheidbar und jede haltende TM ist eine TM, also gilt $B \subset C$.
- Setze $D = \{(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : M_u = M_v\}$. Das Äquivalenzproblem für Turingmaschinen ist nicht entscheidbar. Da allerdings für jede TM M_u gilt: $M_u = M_u$, gilt $C \subset D$.