

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 9

Abgabe: 28. Januar 2022 um 12 Uhr

Bitte beachten Sie die folgenden Vorgaben für die Abgabe: Geben Sie nur eine *einzelne* Datei ab. Diese Datei sollte vorzugsweise im **pdf**-Format sein. Falls Ihre Abgabe aus mehr als einer Datei besteht, dann packen Sie diese bitte zusammen in ein **zip**-Archiv. Notieren Sie auf Ihrer Abgabe die Namen und Matrikelnummern aller an der Abgabe beteiligten Personen. Achten Sie darauf, dass Ihre Datei leserlich ist – insbesondere bei Fotos einer handschriftlichen Abgabe. Bezeichnen Sie die abzugebende Datei nach dem folgenden Muster:

Nachname_Vorname_Matrikelnummer.pdf (bzw. .zip)

Falls Sie als Gruppe abgeben reichen als Dateiname die Daten eines Gruppenmitglieds – die Daten der anderen Mitglieder stehen in der Lösung selbst. Zur Abgabe gibt es in *Moodle* einen passenden Abschnitt namens “Übung 9” in dem Sie Ihre Lösungen hochladen können.

Abgabetermin ist Freitag, der **28. Januar 2022 um 12 Uhr**.

Definition(en)

- Eine *Clique* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge von Knoten $V' \subseteq V$, die paarweise benachbart sind. Für alle $u, v \in V'$ (mit $u \neq v$) gilt also $uv \in E$. Als *Größe* der Clique bezeichnen wir die Anzahl der Knoten $|V'|$.
- k -CLIQUE (für $k \in \mathbb{N}$):
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
 - **gefragt:** Hat G eine Clique der Größe k ?
- CLIQUE:
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
 - **gefragt:** Hat G eine Clique der Größe k ?
- 2-SAT:
 - **gegeben:** Ein Boolesche Formel $\mathcal{F}$ in konjunktiver Normalform mit genau 2 Literalen pro Klausel (d. h. $\mathcal{F}$ ist von der Form $(\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2}) \wedge (\ell_{2,1} \vee \ell_{2,2}) \dots \wedge (\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2})$, wobei $\ell_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$).
 - **gefragt:** Hat $\mathcal{F}$ eine erfüllende Belegung?
- FÄRBBARKEIT:
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
 - **gefragt:** Gibt es eine Funktion $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, sodass für alle $v, u \in V$ (mit $vu \in E$) gilt: $f(v) \neq f(u)$?
(Anders ausgedrückt: Kann man die Knoten des Graphen so färben, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?)

Aufgabe 9.1 (2 + 2 + 2 Punkte)

- a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der eine 3-Clique, aber keine 4-Clique enthält.
- b) Zeigen Sie: $k\text{-CLIQUE} \in \text{P}$. (*Hinweis:* k ist Teil der Problemdefinition.)
- c) Zeigen Sie: $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$. (*Hinweis:* k ist Teil der Eingabe.)

Aufgabe 9.2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: $2\text{-SAT} \in \text{P}$. (Es ist kein formaler Beweis gefordert. Es reicht, wenn Sie Ihre Überlegungen kurz skizzieren.)

(*Hinweis:* Formen Sie die Klauseln zu je zwei Implikationen um. Überlegen Sie sich, was es für diese Implikationen bedeutet, wenn jeweils eines der beiden Literale auf *wahr* gesetzt wird und wie Sie diese Abhängigkeit in einem Graph darstellen können.)

Aufgabe 9.3 (2 + 2 Punkte)

- a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der sich *nicht* mit 3 Farben färben lässt.
- b) Zeigen Sie: $\text{FÄRBBARKEIT} \in \text{NP}$.