Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2022/2023

Aufgabenblatt 3

Abgabe: 22. November 2022 um 12 Uhr (in der Übung)

Definition(en)

- Die Cantor'sche Bijektion $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist definiert als:

$$\langle x, y \rangle = y + \left(\sum_{i=1}^{x+y} i \right) = y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

- Die k-stellige Cantor'sche Bijektion $\langle \cdot \rangle : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist definiert als:

$$\langle x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \rangle = \langle x_1, \langle \ldots \langle x_{k-1}, x_k \rangle \ldots \rangle$$

Weiter bezeichnen p_1, ..., p_k die Umkehrfunktion(en) der Cantor'schen Bijektion, sodass $\langle p_1(z), \ldots, p_k(z) \rangle = z$ gilt.

- Die Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A(0, y) &= y + 1 \\ A(x+1, 0) &= A(x, 1) \\ A(x+1, y+1) &= A(x, A(x+1, y)) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1 *(2 + 2 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine While-berechenbare, injektive, totale Funktion.

a) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion f^{-1} von f ebenfalls While-berechenbar ist.

b) Gilt das gleiche auch für Loop-berechenbare Funktionen? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe 3.2 *(2 + 2 Punkte)*

a) Gilt $\langle 1, 2, 3 \rangle \leq \langle 2, 2, 2 \rangle$? (Begründen Sie kurz.)

b) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{N}$, sodass $\langle a, b, c \rangle = 102$.

Aufgabe 3.3 *(2 + 3 + 2 Punkte)*

a) Implementieren Sie die Ackermann-Funktion in einer Programmiersprache Ihrer Wahl! (Die gewählte Sprache sollte "lesbar" sein – Brainfuck, Malbolge oder sonstige esoterische Programmiersprachen werden wahrscheinlich nicht korrigiert.)

b) Modifizieren Sie Ihre Implementierung aus dem vorigen Teil so, dass diese nicht rekursiv arbeitet, sondern die Rekursion durch einen Stack auflöst.

c) Schreiben Sie ein While-Programm, welches die Ackermann-Funktion berechnet.

(*Hinweis:* Implementieren Sie den Stack im While-Programm mithilfe der Cantor'schen Bijektion. Sie dürfen $\langle x, y \rangle$, p_1 und p_2 im While-Programm nutzen, ohne diese selbst zu implementieren.)