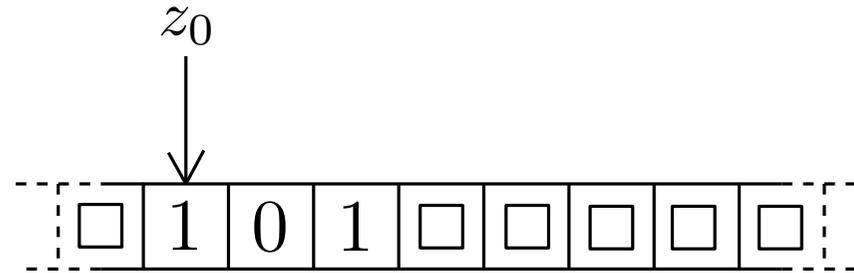


Übung 1: Turing-Maschinen

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$z_0 101$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

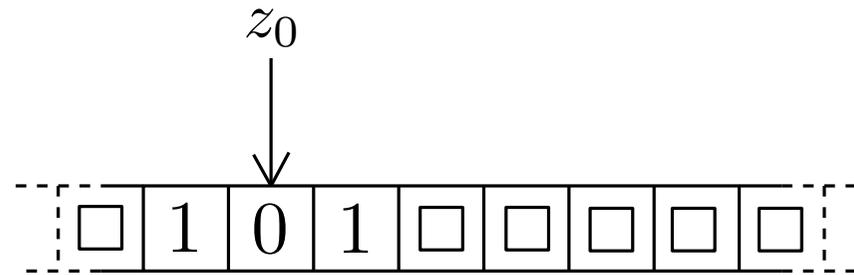
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$$z_0 101 \vdash 1z_0 01$$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

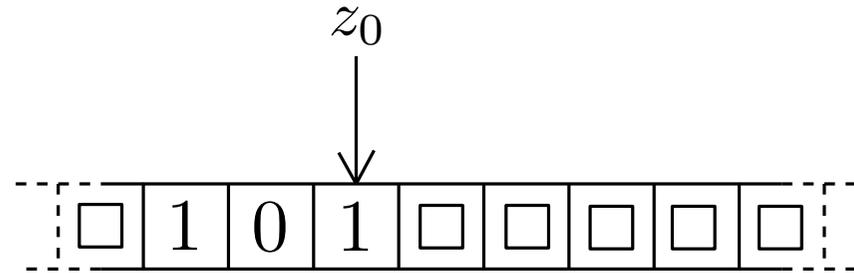
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$z_0101 \vdash 1z_001 \vdash 10z_01$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

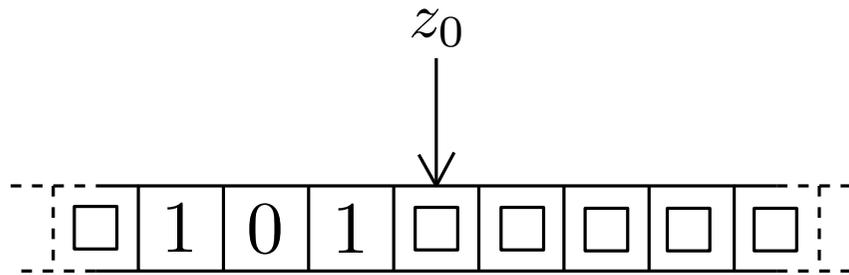
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$z_0101 \vdash 1z_001 \vdash 10z_01$

$\vdash 101z_0\Box$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

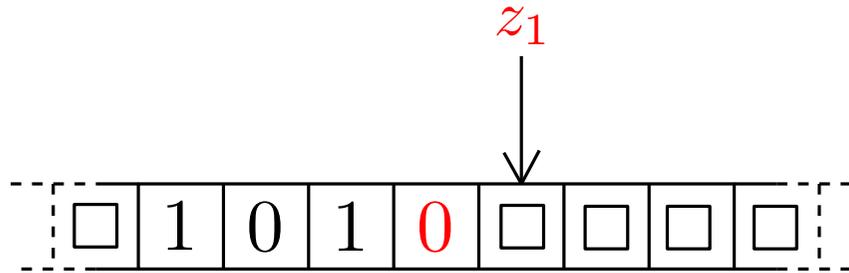
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \Box\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\Box
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \Box, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$z_0 101 \vdash 1z_0 01 \vdash 10z_0 1$

$\vdash 101z_0 \square \vdash 1010z_1 \square$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

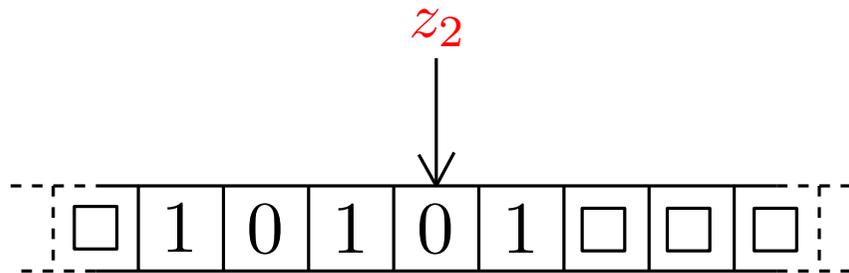
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$z_0 101 \vdash 1z_0 01 \vdash 10z_0 1$

$\vdash 101z_0 \square \vdash 1010z_1 \square \vdash 101z_2 01$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

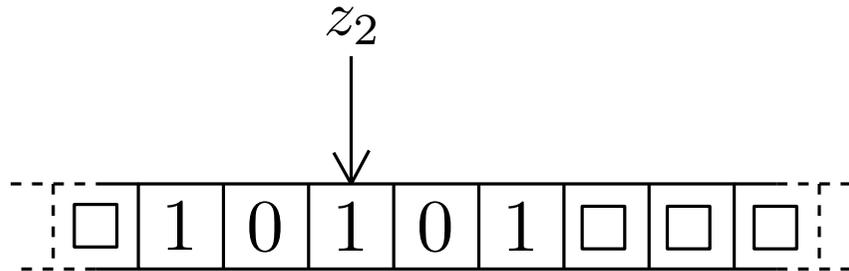
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$z_0 101 \vdash 1z_0 01 \vdash 10z_0 1$
 $\vdash 101z_0 \square \vdash 1010z_1 \square \vdash 101z_2 01$
 $\vdash 10z_2 101$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

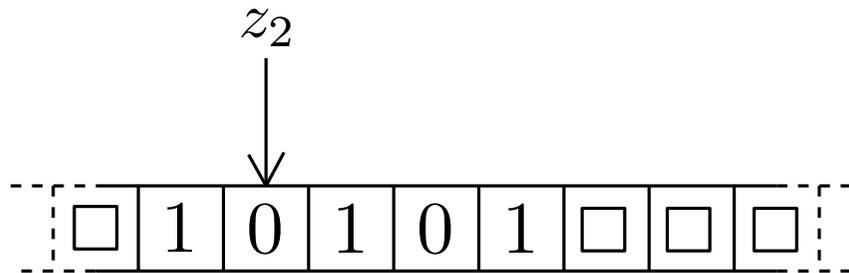
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$z_0 101 \vdash 1z_0 01 \vdash 10z_0 1$
 $\vdash 101z_0 \square \vdash 1010z_1 \square \vdash 101z_2 01$
 $\vdash 10z_2 101 \vdash 1z_2 0101$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

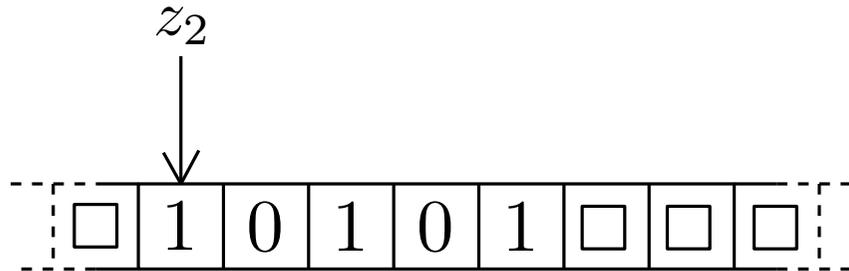
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$$z_0 101 \vdash 1z_0 01 \vdash 10z_0 1$$

$$\vdash 101z_0 \square \vdash 1010z_1 \square \vdash 101z_2 01$$

$$\vdash 10z_2 101 \vdash 1z_2 0101 \vdash z_2 10101$$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

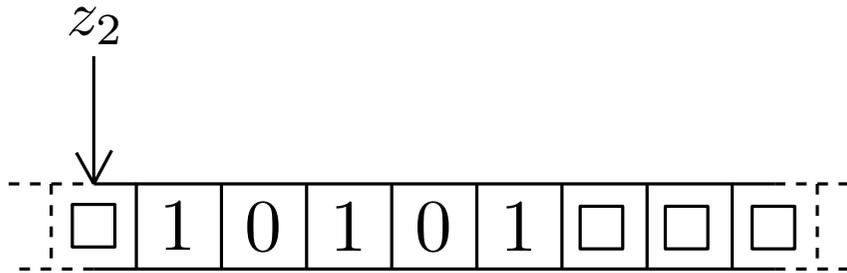
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	\square
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	(z_e, \square, R)

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$$z_0 101 \vdash 1z_0 01 \vdash 10z_0 1$$

$$\vdash 101z_0 [] \vdash 1010z_1 [] \vdash 101z_2 01$$

$$\vdash 10z_2 101 \vdash 1z_2 0101 \vdash z_2 10101$$

$$\vdash z_2 [] 10101$$

$$M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, [], F)$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$$

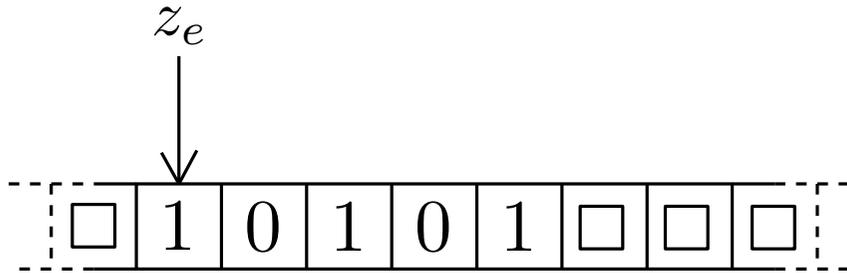
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, []\}$$

$$F = \{z_e\}$$

$\delta(z, w)$	0	1	[]
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, R)$
z_1	$(z_1, 0, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_e, [], R)$

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$$z_0 1 0 1 \vdash 1 z_0 0 1 \vdash 1 0 z_0 1$$

$$\vdash 1 0 1 z_0 \square \vdash 1 0 1 0 z_1 \square \vdash 1 0 1 z_2 0 1$$

$$\vdash 1 0 z_2 1 0 1 \vdash 1 z_2 0 1 0 1 \vdash z_2 1 0 1 0 1$$

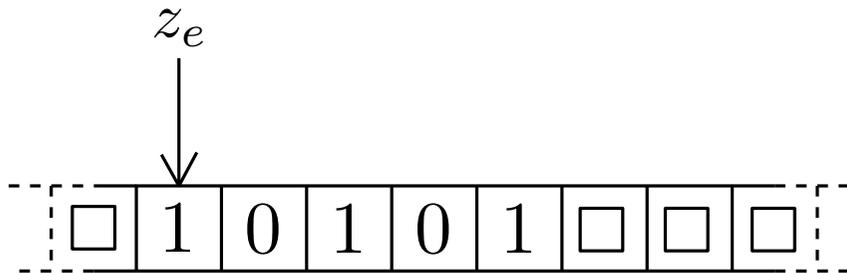
$$\vdash z_2 \square 1 0 1 0 1 \vdash z_e 1 0 1 0 1$$

Welche Funktion wird berechnet?

$$s : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Aufgabe 1



Konfigurationen:

$$\begin{aligned} & z_0 1 0 1 \vdash 1 z_0 0 1 \vdash 1 0 z_0 1 \\ \vdash & 1 0 1 z_0 \square \vdash 1 0 1 0 z_1 \square \vdash 1 0 1 z_2 0 1 \\ \vdash & 1 0 z_2 1 0 1 \vdash 1 z_2 0 1 0 1 \vdash z_2 1 0 1 0 1 \\ \vdash & z_2 \square 1 0 1 0 1 \vdash z_e 1 0 1 0 1 \end{aligned}$$

Welche Funktion wird berechnet?

$$s : w \rightarrow w \cdot 01$$

$$f : n \rightarrow 4n + 1$$

Aufgabe 2

a) Konstruieren einer TM mit Kopfbewegungen aus $\{L, R\}$.

Idee: Bewege Schreib-Lese-Kopf einen Schritt nach links und danach einen Schritt nach rechts.

$$\delta(z_i, w) = (z_j, v, N) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \delta(z_i, w) &= (z'_j, v, L) \\ \delta(z'_j, w) &= (z_j, w, R) \end{aligned}$$

b) Konstruieren einer TM, die nur rechtsseitig unendlich ist.

Idee 1: Schiebe Wort auf Arbeitsband nach rechts, sobald der linke Rand erreicht wird.



Aufgabe 2

b) Konstruieren einer TM, die nur rechtsseitig unendlich ist.

Idee 2: Teile das Band in zwei Spuren auf.

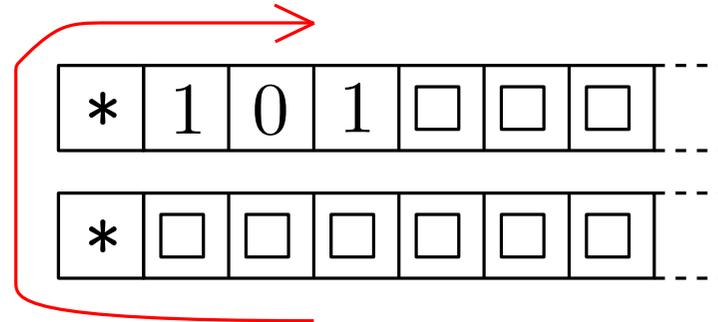


Symbol für Markierung
des linken/rechten Randes

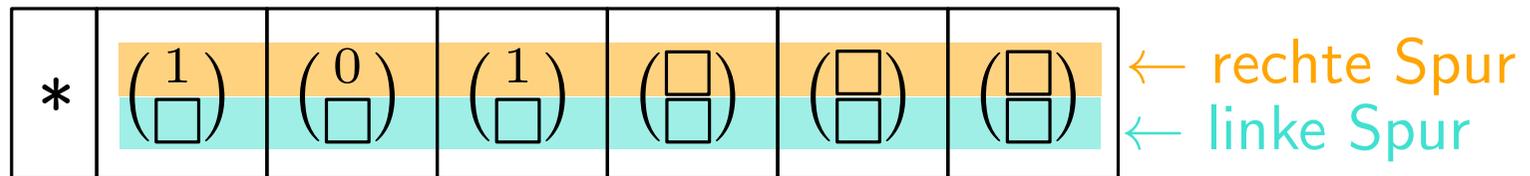
Aufgabe 2

b) Konstruieren einer TM, die nur rechtsseitig unendlich ist.

Idee 2: Teile das Band in zwei Spuren auf.



Ersetze Arbeitsalphabet Γ durch Γ^2 :



Führe zu jedem Zustand z_i einen weiteren Zustand z'_i ein.

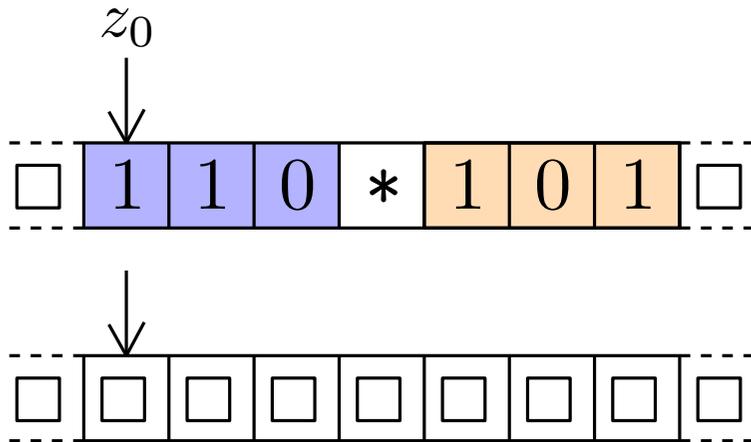
z_i : betrechte rechte Bandhälfte

z'_i : betrechte linke Bandhälfte

→ Wechsel bei Symbol *

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

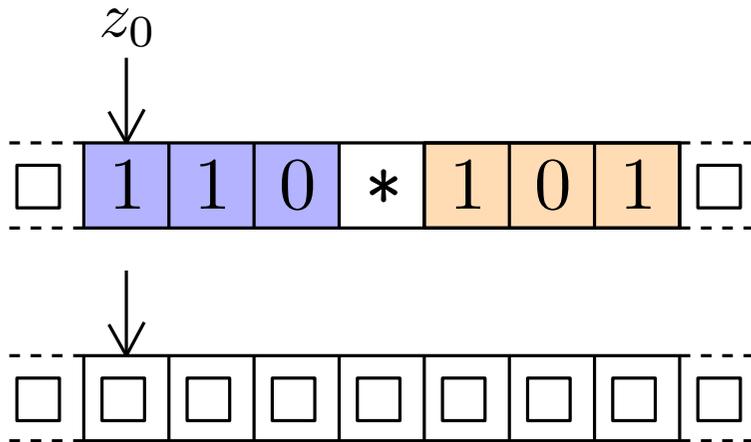


Idee:

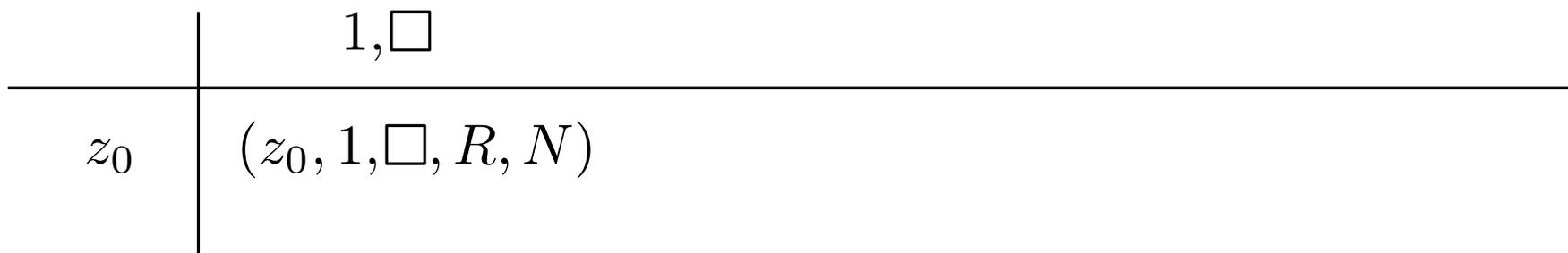
1. übertrage y auf das untere Band
2. vergleiche beide Zahlen. Betrachte dabei die folgenden Fälle:
 - 2.1 x und y haben unterschiedliche Länge
→ die längere Zahl ist die größere.
 - 2.2 x und y haben die gleiche Länge
→ vergleiche einzelne Positionen (von links nach rechts)
3. Ersetze Bandinhalt mit Lösung

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

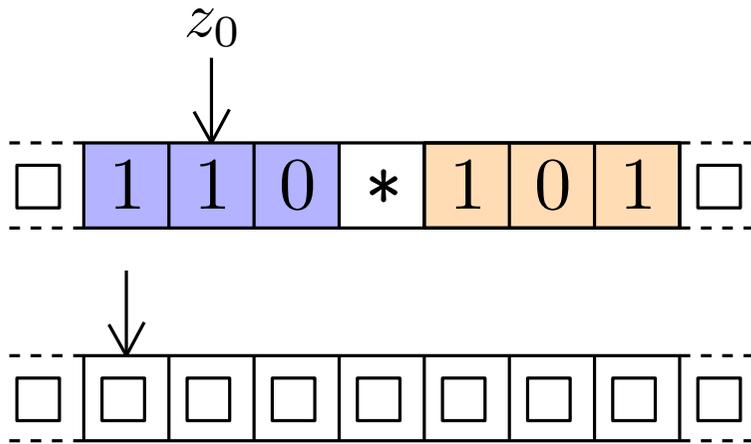


1. übertrage y auf das untere Band



Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

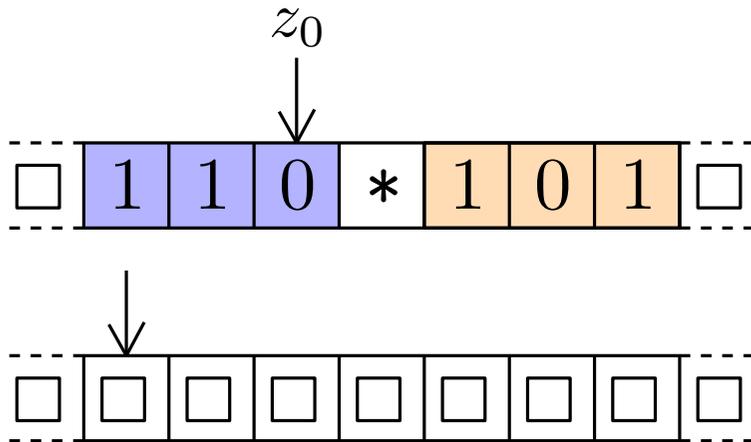


1. übertrage y auf das untere Band



Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

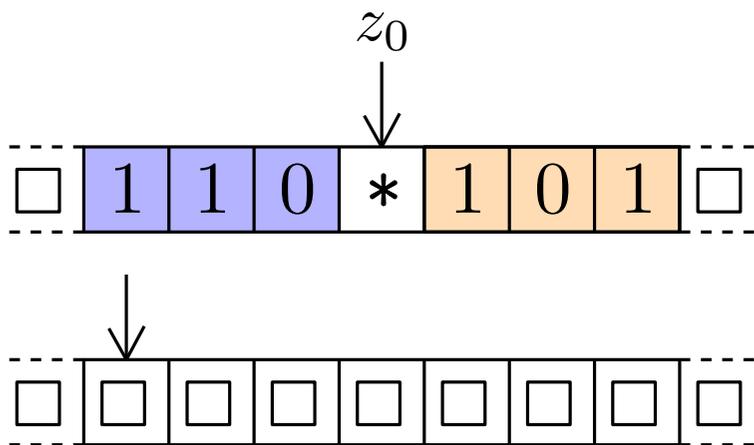


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □
z_0	$(z_0, 1, \square, R, N)$	$(z_0, 0, \square, R, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

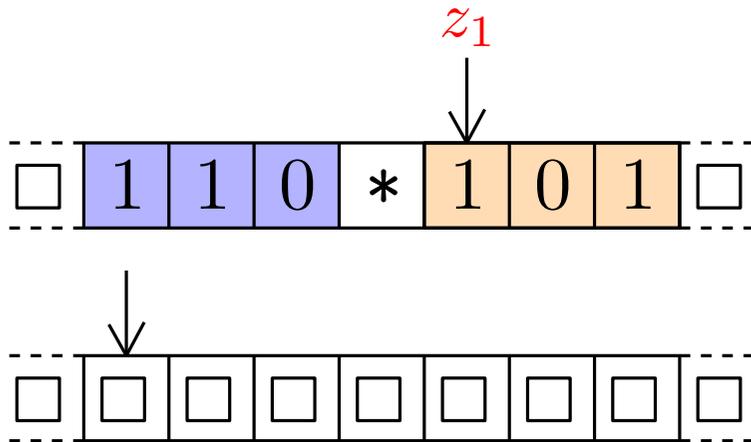


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_0	$(z_0, 1, \square, R, N)$	$(z_0, 0, \square, R, N)$	$(z_1, *, \square, R, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

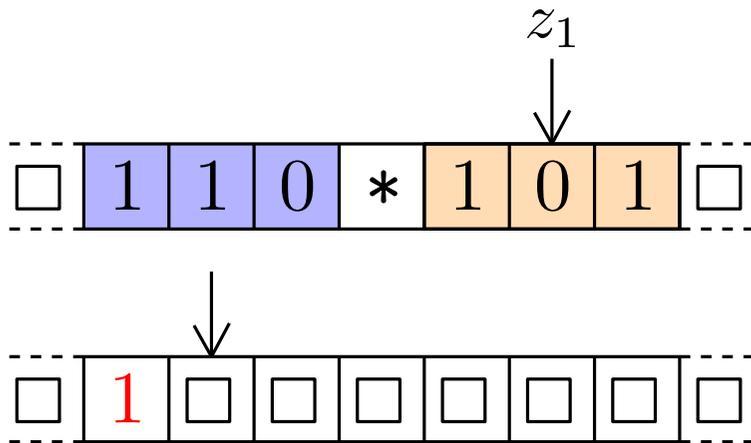


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_0	$(z_0, 1, \square, R, N)$	$(z_0, 0, \square, R, N)$	$(z_1, *, \square, R, N)$
	1, □		
z_1	$(z_1, 1, 1, R, R)$		

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

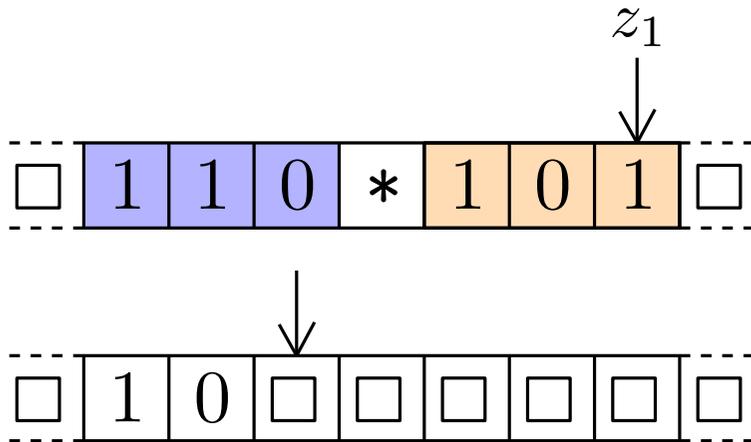


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_0	$(z_0, 1, \square, R, N)$	$(z_0, 0, \square, R, N)$	$(z_1, *, \square, R, N)$
	1, □	0, □	
z_1	$(z_1, 1, 1, R, R)$	$(z_1, 0, 0, R, R)$	

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

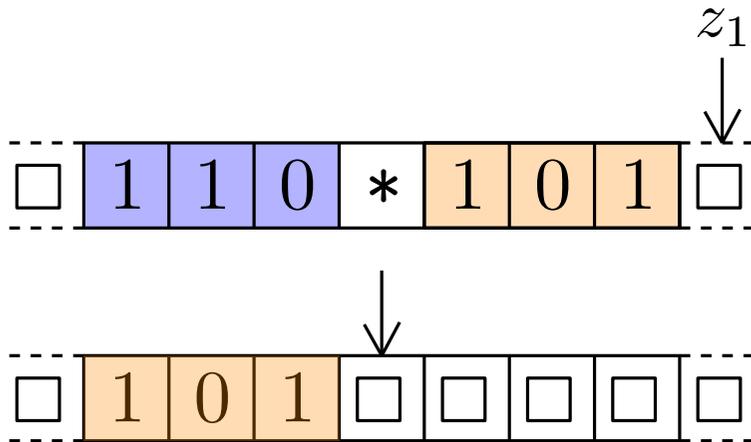


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_0	$(z_0, 1, \square, R, N)$	$(z_0, 0, \square, R, N)$	$(z_1, *, \square, R, N)$
	1, □	0, □	
z_1	$(z_1, 1, 1, R, R)$	$(z_1, 0, 0, R, R)$	

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

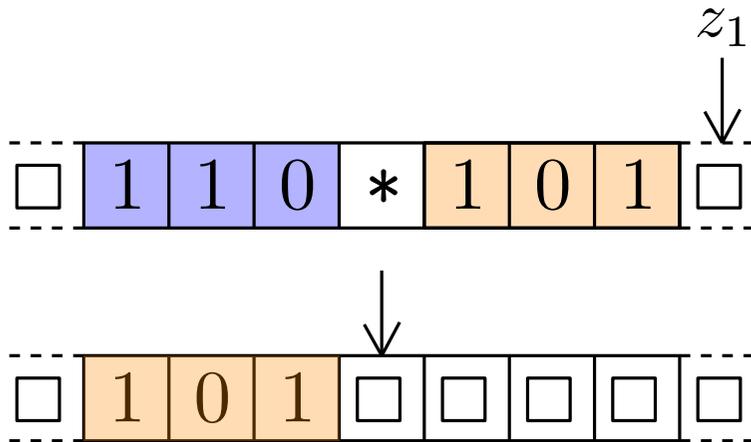


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_0	$(z_0, 1, \square, R, N)$	$(z_0, 0, \square, R, N)$	$(z_1, *, \square, R, N)$
	1, □	0, □	
z_1	$(z_1, 1, 1, R, R)$	$(z_1, 0, 0, R, R)$	

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

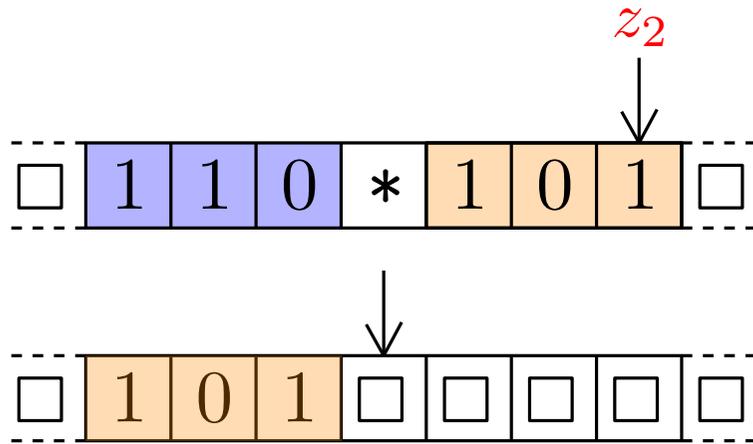


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_0	$(z_0, 1, \square, R, N)$	$(z_0, 0, \square, R, N)$	$(z_1, *, \square, R, N)$
	1, □	0, □	□, □
z_1	$(z_1, 1, 1, R, R)$	$(z_1, 0, 0, R, R)$	$(z_2, \square, \square, L, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

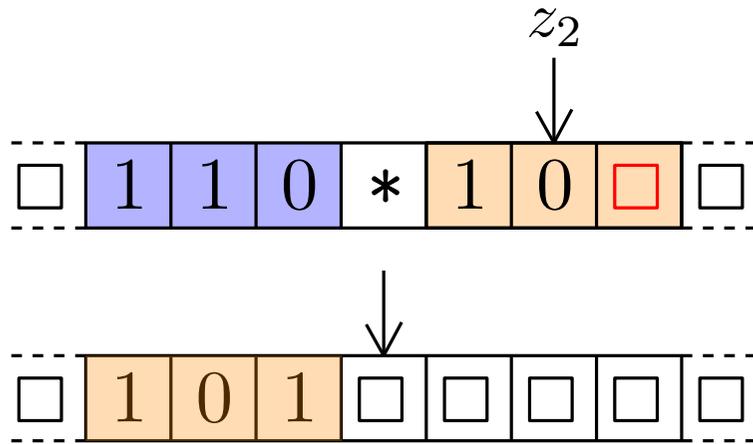


1. übertrage y auf das untere Band



Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

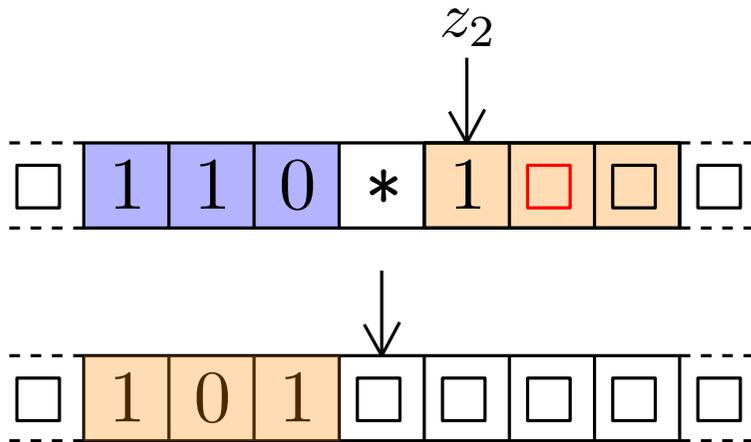


1. übertrage y auf das untere Band

	1, \square	0, \square
z_2	$(z_2, \square, \square, L, N)$	$(z_2, \square, \square, L, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

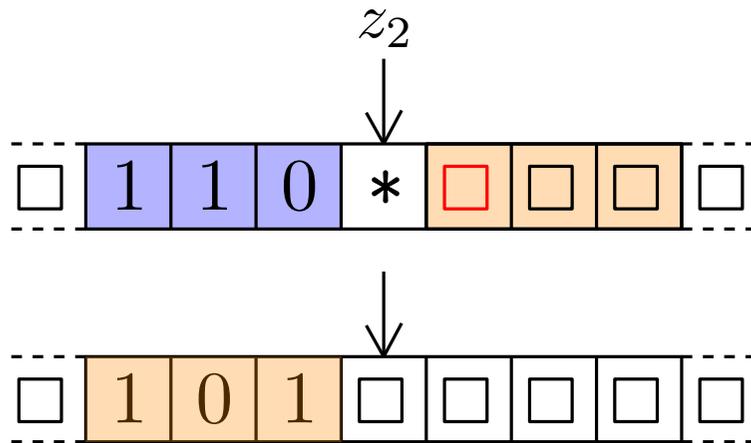


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □
z_2	$(z_2, \square, \square, L, N)$	$(z_2, \square, \square, L, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

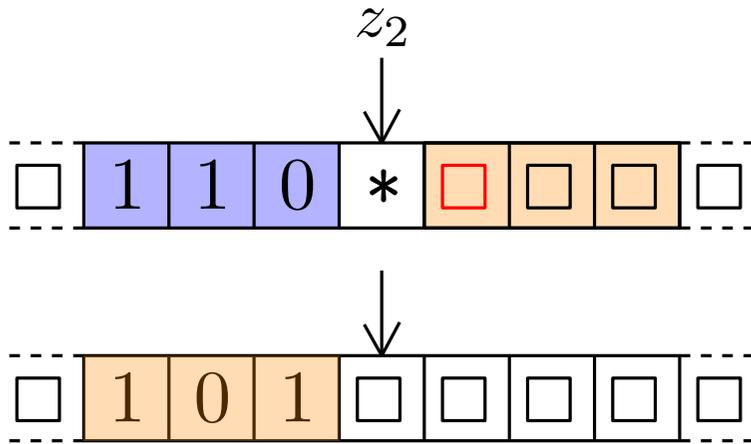


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □
z_2	$(z_2, \square, \square, L, N)$	$(z_2, \square, \square, L, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

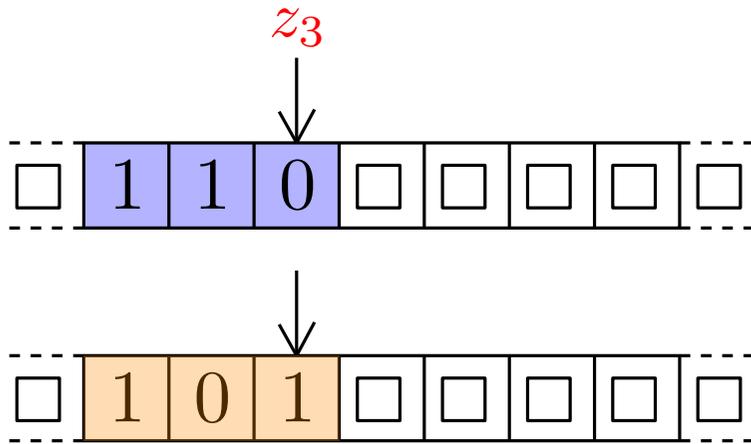


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_2	$(z_2, \square, \square, L, N)$	$(z_2, \square, \square, L, N)$	$(z_3, \square, \square, L, L)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

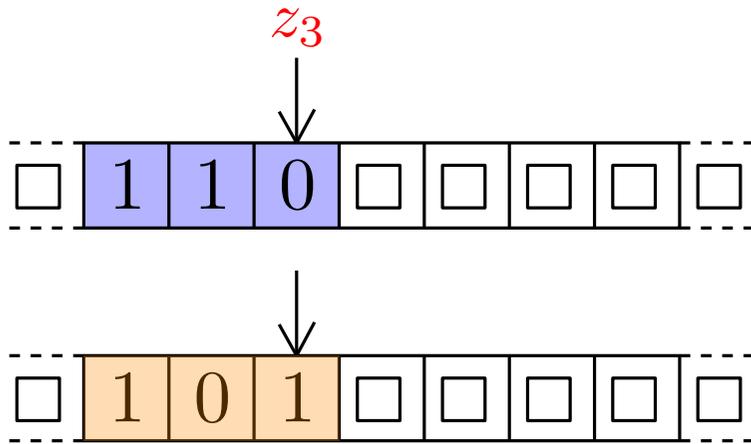


1. übertrage y auf das untere Band

	1, □	0, □	*, □
z_2	$(z_2, \square, \square, L, N)$	$(z_2, \square, \square, L, N)$	$(z_3, \square, \square, L, L)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

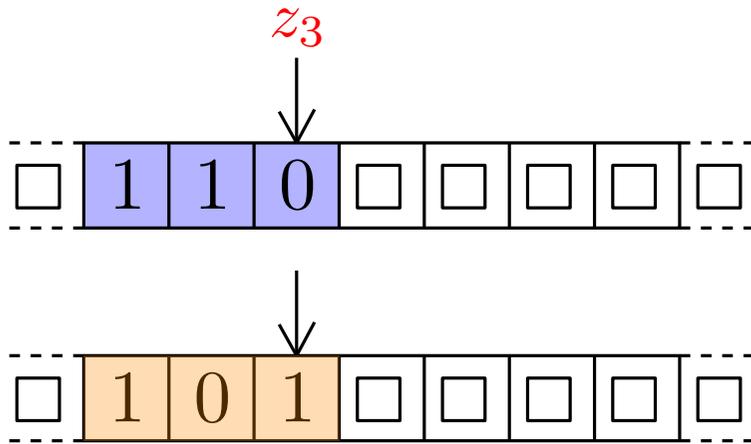


2.1. Vergleiche die Länge von x und y ($i, j \in \{0, 1\}$)

	i, j	i, \square	\square, j	\square, \square
z_3	(z_3, i, j, L, L)	(z_4, i, \square, L, L)	(z_5, \square, j, L, L)	$(z_6, \square, \square, R, R)$
		$x > y$	$x < y$	$ x = y $

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

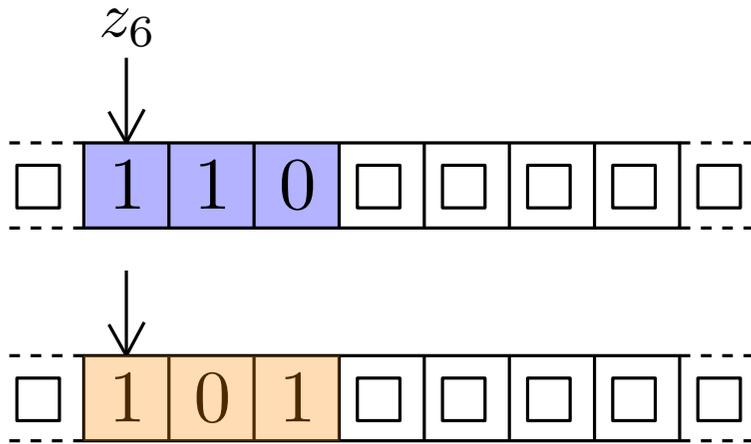


2.1. Vergleiche die Länge von x und y ($i, j \in \{0, 1\}$)

	i, j	i, \square	\square, j	\square, \square
z_3	(z_3, i, j, L, L)	(z_4, i, \square, L, L)	(z_5, \square, j, L, L)	$(z_6, \square, \square, R, R)$
		$x > y$	$x < y$	$ x = y $

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



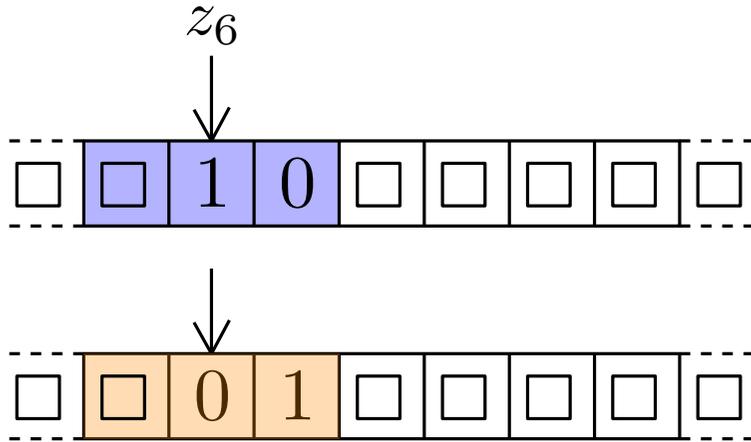
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



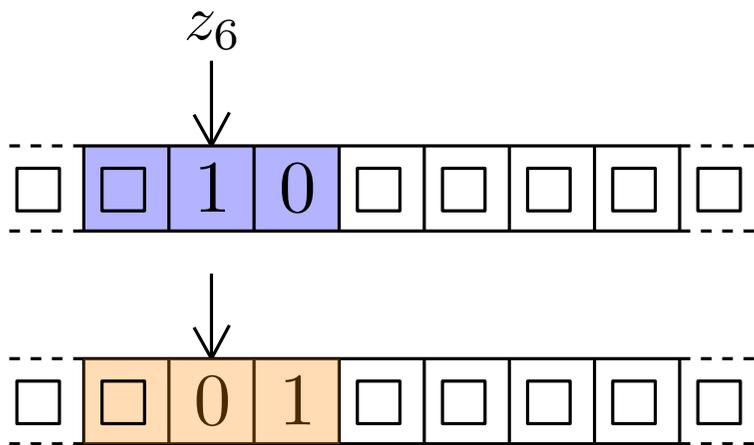
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



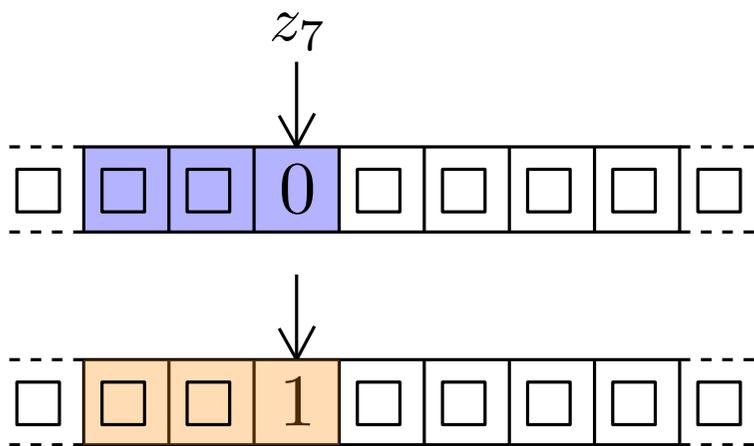
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$
		$x > y$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



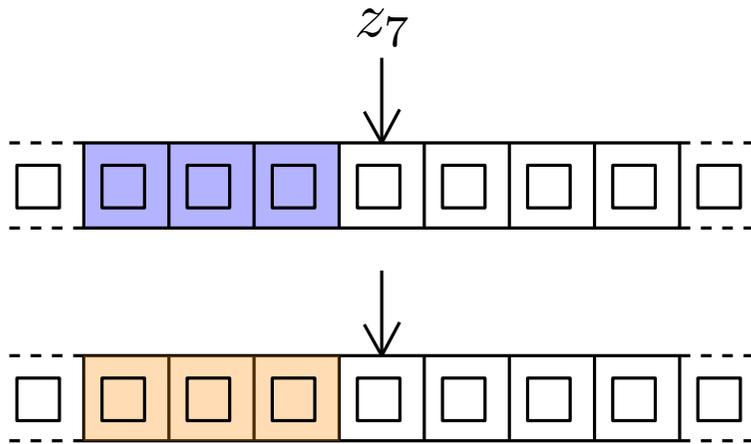
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$
		$x > y$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



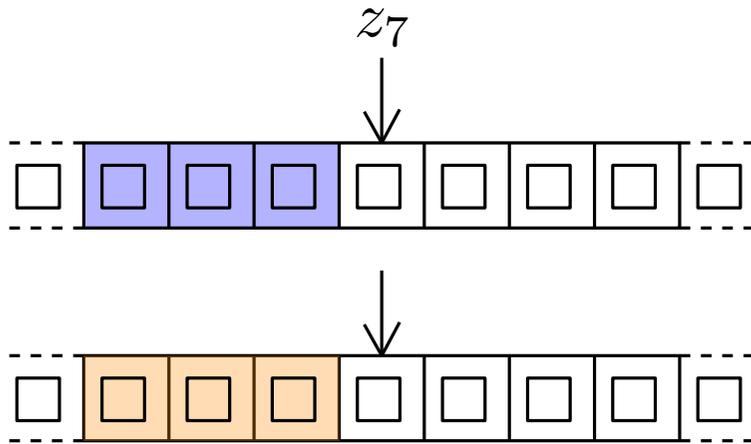
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$
		$x > y$
	i, j	
z_7	$(z_7, \square, \square, R, R)$	

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



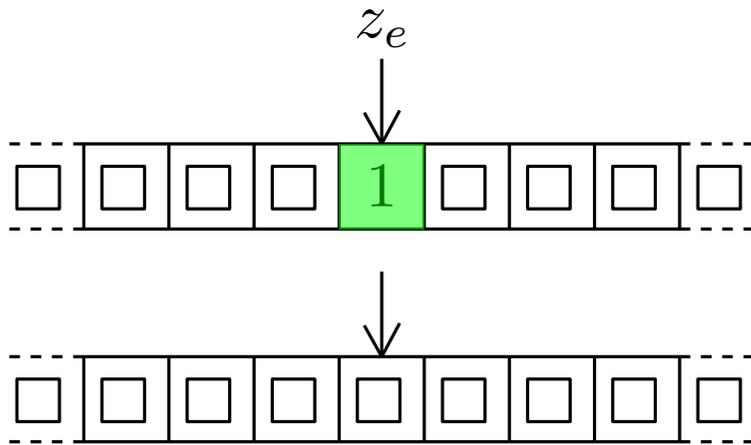
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$
		$x > y$
	i, j	\square, \square
z_7	$(z_7, \square, \square, R, R)$	$(z_e, 1, \square, N, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



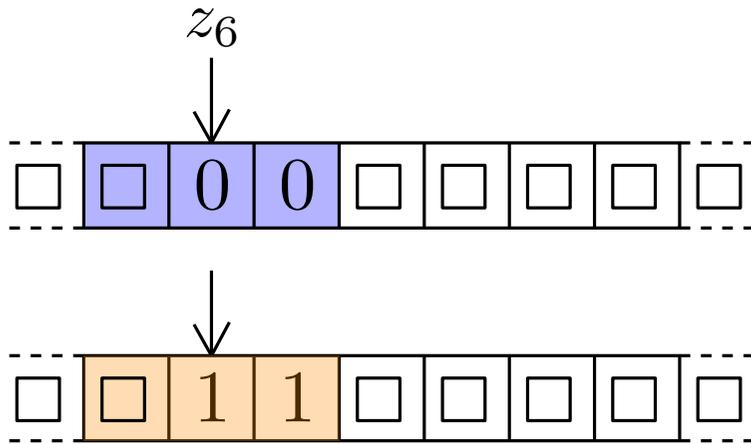
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$
		$x > y$
	i, j	\square, \square
z_7	$(z_7, \square, \square, R, R)$	$(z_e, 1, \square, N, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



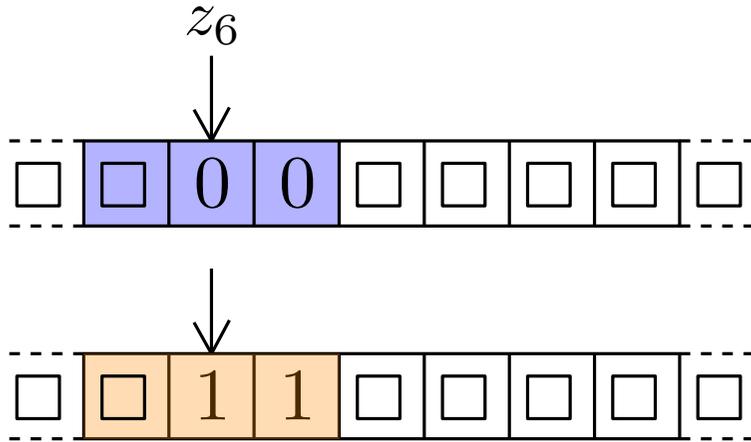
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$
		$x > y$
	i, j	\square, \square
z_7	$(z_7, \square, \square, R, R)$	$(z_e, 1, \square, N, N)$

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



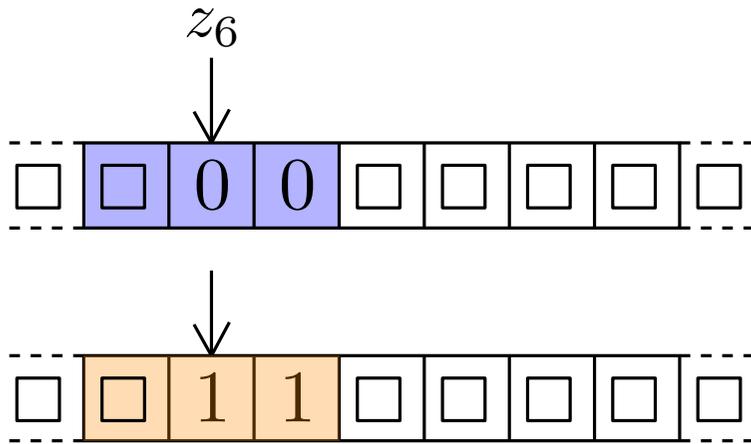
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$	$0, 1$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$	$(z_8, \square, \square, R, R)$
		$x > y$	$x < y$
	i, j	\square, \square	
z_7	$(z_7, \square, \square, R, R)$	$(z_e, 1, \square, N, N)$	

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



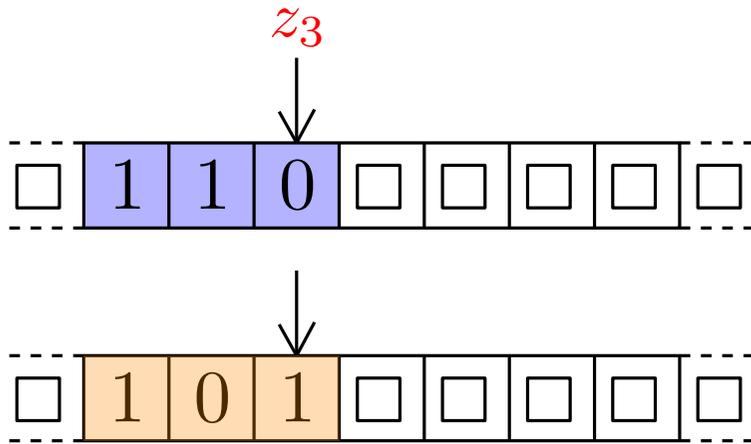
2.2. $|x| = |y|$

$(i, j \in \{0, 1\})$

	i, i	$1, 0$	$0, 1$
z_6	$(z_6, \square, \square, R, R)$	$(z_7, \square, \square, R, R)$	$(z_8, \square, \square, R, R)$
		$x > y$	$x < y$
	i, j	\square, \square	
z_8	$(z_8, \square, \square, R, R)$	$(z_e, -1, \square, N, N)$	

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.

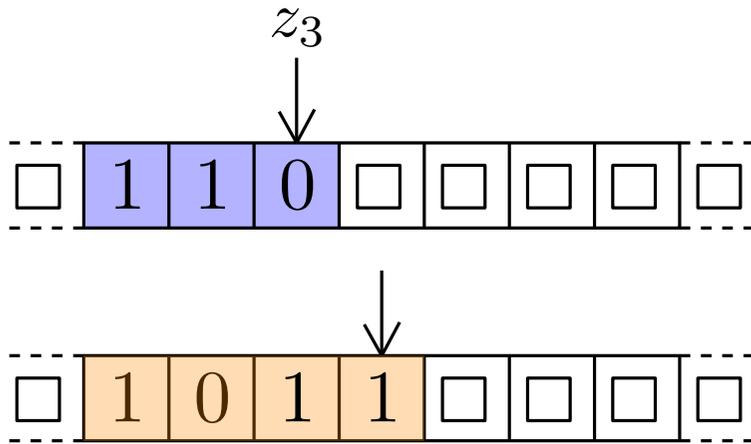


2.1. Vergleiche die Länge von x und y ($i, j \in \{0, 1\}$)

	i, j	i, \square	\square, j	\square, \square
z_3	(z_3, i, j, L, L)	(z_4, i, \square, L, L)	(z_5, \square, j, L, L)	$(z_6, \square, \square, R, R)$
		$x > y$	$x < y$	$ x = y $

Aufgabe 3

a) Konstruieren eine ZTM, welche zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ vergleicht.



2.1. Vergleiche die Länge von x und y ($i, j \in \{0, 1\}$)

	i, j	i, \square	\square, j	\square, \square
z_3	(z_3, i, j, L, L)	(z_4, i, \square, L, L)	(z_5, \square, j, L, L)	$(z_6, \square, \square, R, R)$
		$x > y$	$x < y$	$ x = y $

Aufgabe 3

b) Welche Vorteile bietet eine ZTM gegenüber einer TM?

- Arbeitsschritte können gleichzeitig ausgeführt werden
z.B. Vergleichen von zwei Symbolen in einem Schritt