Übung 4: Entscheidbarkeit

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Aufgabe 1

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen

zu zeigen: $L_1 \circ L_2$ ist ebenfalls entscheidbar

$$\boxed{L_1 \circ L_2 := \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1 \land w_2 \in L_2\}}$$

$L_1 \circ L_2$ entscheidbar $\iff$ $\chi_{L1 \circ L_2}$ berechenbar

Sei $w = a_1 ... a_n$ mit $a_1, ..., a_n \in \Sigma$

Es gilt:

$$
\begin{array}{lcclcl}
w \in L_1 \circ L_2 & \equiv & & \varepsilon \in L_1 & \land & a_1 ... a_n \in L_2 \\
 & & \lor & a_1 \in L_1 & \land & a_2 ... a_n \in L_2 \\
 & & \lor & ... & & \\
 & & \lor & a_1 ... a_{n-1} \in L_1 & \land & a_n \in L_2 \\
 & & \lor & a_1 ... a_n \in L_1 & \land & \varepsilon \in L_2 \\
 & \equiv & & \chi_{L_1}(\varepsilon) = 1 & \land & \chi_{L_2}(a_1, ..., a_n) = 1 \\
 & & \lor & ... & & \\
 & & \lor & \chi_{L_1}(a_1, ..., a_n) = 1 & \land & \chi_{L_2}(\varepsilon) = 1
\end{array}
$$

$$\equiv \chi_{L_1}(\varepsilon) \cdot \chi_{L_2}(a_1, ..., a_2) + ... + \chi_{L_1}(a_1, ..., a_2) \cdot \chi_{L_2}(\varepsilon) \geq 1$$

Es folgt:

$\chi_{L1 \circ L_2}$ ist berechenbar,

da Verknüpfung

berechenbarer Funktionen

Aufgabe 2

Seien $A, \bar{A} \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbare Sprachen.
zu zeigen: A ist entscheidbar

Sei M_1 die TM, die χ_A berechnet
Sei M_2 die TM, die $\chi_{\bar{A}}$ berechnet

Konstruiere neue TM M:

Simuliere einen Rechenschritt (bzw. Zustandsübergang) von M_1

Simuliere einen Rechenschritt (bzw. Zustandsübergang) von M_2

Wiederhole die abwechselnden Rechenschritte der TMs
bis eine in den Endzustand übergeht
(Da $w \in A$ oder $w \in \bar{A}$, hält mindestens eine der beiden Maschinen)

Realisierung z.B. über Zweiband-TM.
Erstes Band simuliert M_1, zweites Band simuliert M_2

Aufgabe 3

$A, B \in \mathbb{N}$ semi-entscheidbar.
Sind $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B$ ebenfalls semi-entscheidbar?

1. $A \cup B$

$$
\begin{aligned}
A \text{ ist semi-entscheidbar} \quad & \Rightarrow A \text{ ist rekursiv aufzählbar} \\
& \Rightarrow \exists f_A : \mathbb{N} \to A, A = \{f(1), f(2), f(3), ...\}
\end{aligned}
$$

function $\chi_{A \cup B}(x)$
    $i \leftarrow 1$
    $inA, inB \leftarrow false$
    while $\neg(inA \vee inB)$ **do**
        if $f_A(i) = x$ **then**
            $inA \leftarrow true$
        if $f_B(i) = x$ **then**
            $inB \leftarrow true$
    return $true$

Aufgabe 3

$A, B \in \mathbb{N}$ semi-entscheidbar.

Sind $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B$ ebenfalls semi-entscheidbar?

1. $A \cap B$

A ist semi-entscheidbar $\Rightarrow$ A ist rekursiv aufzählbar

$\Rightarrow \exists f_A : \mathbb{N} \to A, A = \{f(1), f(2), f(3), ...\}$

function $\chi_{A \cup B}(x)$

$\quad i \leftarrow 1$

$\quad inA, inB \leftarrow false$

$\quad$ **while** $\neg(inA \wedge inB)$ **do**

$\qquad$ **if** $f_A(i) = x$ **then**

$\qquad\quad inA \leftarrow true$

$\qquad$ **if** $f_B(i) = x$ **then**

$\qquad\quad inB \leftarrow true$

$\quad$ **return** 1

Aufgabe 3

$A, B \in \mathbb{N}$ semi-entscheidbar.
Sind $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B$ ebenfalls semi-entscheidbar?

3. $\bar{A}$

Sei A semi-entscheidbar aber nicht *entscheidbar*.

Annahme: $\bar{A}$ ist semi-entscheidbar.

$A, \bar{A}$ semi-entscheidbar $\Rightarrow$ A entscheidbar

$\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$ $\bar{A}$ ist im Allgemeinen nicht semi-entscheidbar

Aufgabe 3

$A, B \in \mathbb{N}$ semi-entscheidbar.
Sind $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B$ ebenfalls semi-entscheidbar?

4. $A \setminus B$

Angenommen $A \setminus B$ ist semi-entscheidbar

Dann wäre insbesondere auch $\mathbb{N}^k \setminus B = \bar{B}$ semi-entscheidbar.

Das Komplement ist jedoch im Allgemeinen nicht semi-entscheidbar (vgl. vorigen Punkt)

$\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$ $A \setminus B$ ist im Allgemeinen nicht semi-entscheidbar

Aufgabe 4

a) $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p$ ist eine Primzahl.$\}$ ist entscheidbar.

```
if p ≤ 1 then
    return 0
i ← 2
while i < p do        ← testen aller potentiellen Teiler
    if p (mod i) = 0 then
        return 0  ← Teiler gefunden, keine Primzahl
    i ← i + 1
return 1    ← kein Teiler in {2, ..., p − 1} gefunden
```

Aufgabe 4

b) $\{n \in \mathbb{N}$: Es gibt eine Primzahl p
sodass $p+1, ..., p+n$ keine Primzahlen sind.$\}$
ist semi-entscheidbar.

$\texttt{for each}\ p \in \mathbb{P}\ \texttt{do}$
$\quad \texttt{if}\ \{p+1, ..., p+n\} \cap \mathbb{P} = \emptyset\ \texttt{then}$
$\quad\quad \texttt{return}\ true$