Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 5

Abgabe: 10. Dezember 2021 um 12 Uhr

Definition(en)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ beliebige Mengen. A heißt *reduzierbar* auf B ($A \leq B$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt mit: $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

Aufgabe 5.1 *(3 Punkte)*

Sei $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ eine *totale* Funktion mit der Eigenschaft: Falls für ein $w \in \Sigma^*$ die TM M_w angesetzt auf w hält, dann geschieht dies in weniger als $f(w)$ Schritten. Zeigen Sie: f ist nicht berechenbar.

Lösung

Da f total, gilt für alle $w \in \Sigma^* : f(w) \in \mathbb{N}$. Das heißt, falls M_w angesetzt auf w hält, dann liefert $f(w)$ eine Obergrenze an die Anzahl der Rechenschritte. Falls M_w angesetzt auf w nicht hält, dann liefert die Funktion nur eine nichtssagende natürliche Zahl. Sei nun $w \in \Sigma^*$ beliebig. Angenommen f ist berechenbar. Betrachte folgenden Algorithmus:

1. Berechne $f(w)$.
2. Lasse M_w auf w angesetzt laufen und zähle die Rechenschritte mit.
3. Falls M_w nach $f(w)$ Schritten noch immer nicht hält, dann stoppe und gib FALSCH aus.
4. Sonst gib WAHR aus.

Dieser Algorithmus entscheidet das spezielle Halteproblem. Dies ist ein Widerspruch. Also kann f nicht berechenbar sein.

Aufgabe 5.2 *(2 + 1 + 2 + 1 Punkte)*

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei beliebige Sprachen und sei A auf B reduzierbar mittels Funktion f. Zeigen Sie:

(i) B entscheidbar $\Rightarrow$ A entscheidbar

(ii) A nicht entscheidbar $\Rightarrow$ B nicht entscheidbar

(iii) B semi-entscheidbar $\Rightarrow$ A semi-entscheidbar

(iv) A nicht semi-entscheidbar $\Rightarrow$ B nicht semi-entscheidbar

Lösung

(Die folgenden Lösungen könnte man auch in eine Lösung zusammenfassen – im Prinzip nutzen alle vier Teilaufgaben die selbe Äquivalenzkette.)

a) Sei B entscheidbar, dann ist χ_B berechenbar. Da f nach Definition der Reduzierbarkeit ebenfalls berechenbar ist, ist auch die Komposition $\chi_B \circ f$ berechenbar. In dem Fall gilt für $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = 1 &\equiv x \in A && \triangleright \text{ Def. char. Funktion} \\ &\equiv f(x) \in B && \triangleright A \text{ ist reduzierbar auf } B \\ &\equiv \chi_B(f(x)) = 1 && \triangleright \text{ Def. char. Funktion} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = 0 &\equiv x \notin A && \triangleright \text{ Def. char. Funktion} \\ &\equiv f(x) \notin B && \triangleright A \text{ ist reduzierbar auf } B \\ &\equiv \chi_B(f(x)) = 0 && \triangleright \text{ Def. char. Funktion} \end{aligned}$$

Damit gilt $\chi_B \circ f = \chi_A$. Und da B entscheidbar ist (also χ_B berechenbar ist) ist auch χ_A berechenbar und somit A entscheidbar.

b) Angenommen B sei entscheidbar, dann wäre χ_B berechenbar. Da f nach Definition der Reduzierbarkeit ebenfalls berechenbar ist, ist auch die Komposition $\chi_B \circ f$ berechenbar. In dem Fall gilt für $x \in \Sigma^*$ (genau wie im vorigen Aufgabenteil):

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = 1 &\equiv x \in A && \triangleright \text{ Def. char. Funktion} \\ &\equiv f(x) \in B && \triangleright A \text{ ist reduzierbar auf } B \\ &\equiv \chi_B(f(x)) = 1 && \triangleright \text{ Def. char. Funktion} \end{aligned}$$

Der andere Fall ($\chi_A(x) = 0$) folgt ebenfalls wieder analog. Damit gilt $\chi_B \circ f = \chi_A$. Das heißt χ_A ist berechenbar und A entscheidbar, was einen Widerspruch zur Prämisse (A nicht entscheidbar) darstellt.

(Alternativ kann man hier auch kürzer über Kontraposition argumentieren. Nach Aufgabenteil (i) gilt B entscheidbar $\Rightarrow$ A entscheidbar und das ist äquivalent zu Aussage (ii).)

c) Analog zum vorigen Aufgabenteil gilt für $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} \chi'_A(x) = 1 &\equiv x \in A && \triangleright \text{ Def. eingeschränkte char. Funktion} \\ &\equiv f(x) \in B && \triangleright A \text{ ist reduzierbar auf } B \\ &\equiv \chi'_B(f(x)) = 1 && \triangleright \text{ Def. eingeschränkte char. Funktion} \end{aligned}$$

Der andere Fall ($\chi'_A(x) = \text{undefiniert} \equiv \chi'_B(f(x)) = \text{undefiniert}$) gilt analog. D. h. man kann A mithilfe von B "semi-entscheiden".

d) Hier kann man wieder wie im ersten Aufgabenteil einen Widerspruch zeigen, oder ausnutzen, dass Aussage (iii) und (iv) äquivalent sind (*Kontraposition*).

Aufgabe 5.3 *(2 + 2 + 2 Punkte)*
Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ beliebige, nicht-leere Mengen. Zeigen Sie:

a) $A \leq B$ genau dann, wenn $\bar{A} \leq \bar{B}$.

b) Aus $A \leq B$ und $B \leq C$ folgt $A \leq C$.

c) A ist entscheidbar genau dann, wenn A semi-entscheidbar ist und $A \leq \bar{A}$.

Lösung

Im Folgenden sind $f, g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ totale und berechenbare Funktionen, die für die jeweiligen Reduktionen passend sind.

a) $$\begin{aligned} A \leq B &\equiv \exists f : w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \\ &\equiv \exists f : \neg(w \in A) \Leftrightarrow \neg(f(w) \in B) \\ &\equiv \exists f : w \in \bar{A} \Leftrightarrow f(w) \in \bar{B} \\ &\equiv \bar{A} \leq \bar{B} \end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} A \leq B &\equiv \exists f\colon w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B && \triangleright \text{ Def. Reduzierbarkeit} \\ B \leq C &\equiv \exists g\colon w \in B \Leftrightarrow g(w) \in C && \triangleright \text{ Def. Reduzierbarkeit} \end{aligned}$$

Wir definieren eine neue Funktion $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, $h(w) = g(f(w))$. h ist berechenbar und total, weil f und g es auch sind. Weiter folgt aus den Reduzierbarkeiten zwischen A und B bzw. B und C, dass $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow g(f(w)) \in C$, also $A \leq C$.

c) "$\Rightarrow$":

Seien $a \in A$ und $b \notin A$ beliebig. Wir definieren $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit

$$f(w) = \begin{cases} a, & w \notin A \\ b, & w \in A \end{cases}$$

Damit gilt dann $w \in A \equiv f(w) \notin A \equiv f(w) \in \bar{A}$ und da A entscheidbar ist f berechenbar und total.

"$\Leftarrow$":

A semi-entscheidbar und $A \leq \bar{A}$

$\Rightarrow$ A semi-entscheidbar und $\bar{A} \leq A$ (folgt aus Teil a) zusammen mit $\bar{\bar{A}} = A$)

$\Rightarrow$ A semi-entscheidbar und $\bar{A}$ semi-entscheidbar (Aussage (iii) aus der vorigen Aufgabe)

$\Rightarrow$ A entscheidbar. (Siehe Aufgabe 4.2)