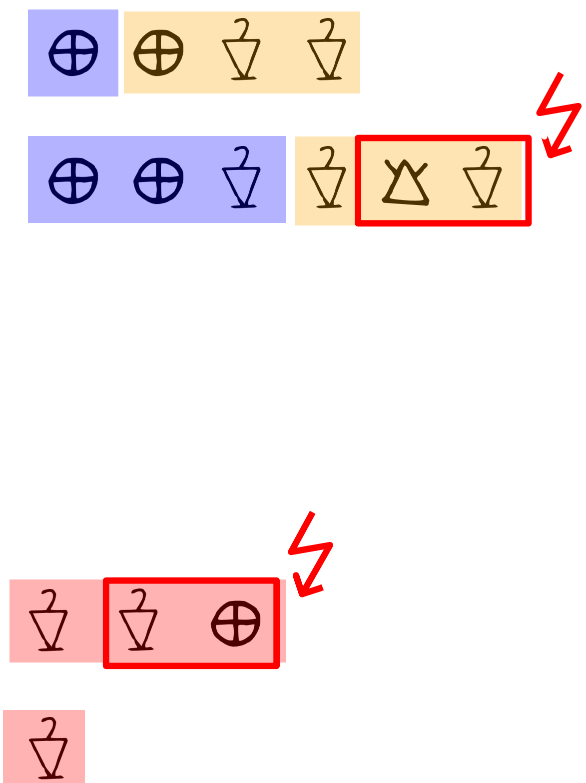
Übung 6: PCP

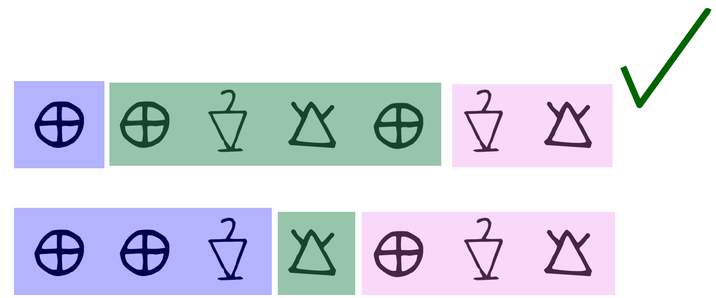
Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Aufgabe 1

$K_1 =$ 

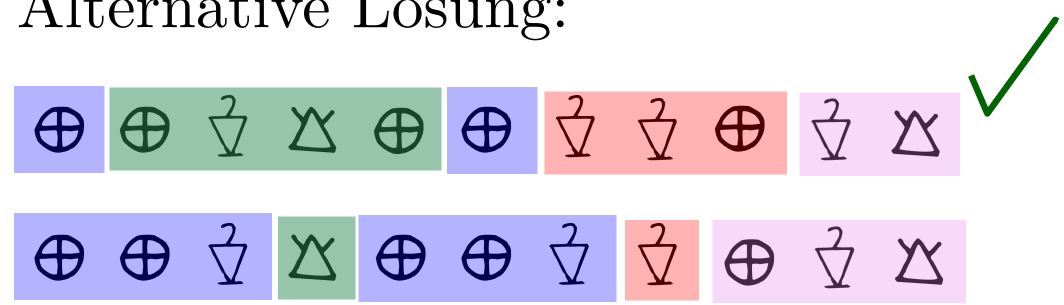
a) $K_1 \in PCP$?





$\Rightarrow K_1 \in PCP$

Alternative Lösung:



Aufgabe 1

$K_1 = (101, 10), (1, 01), (010, 10), (10, 0)$

b) $K_2 \in PCP$?

1 0 1 | 0 1 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 0 | 0 1 0 | 1 0 | 0 1 0 | 1 0

1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 1 0 | 0 | 1 0 | 0 …

Problem: erste Komponente immer länger als die zweite!

$\rightarrow$ wir müssen das Tupel $(1, 01)$ verwenden

Aber: $(1, 01)$ kann höchstens zweimal hintereinander verwendet werden

1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 0 | 1 | 1 | 0 1 0

1 0 | 1 0 | 1 0 | 0 1 | 0 1 | 1 0 …

$\Rightarrow K_2 \notin PCP$

Aufgabe 2

zu zeigen: 01-PCP ist unentscheidbar

$\rightarrow$ reduziere PCP auf 01-PCP

$$x \in PCP \Leftrightarrow f(x) \in \text{01-PCP}$$

$\rightarrow$ kodiere jedes Symbol $\alpha \in \Sigma$ als Binärstring

Achtung: $\alpha \rightarrow 0$

$\beta \rightarrow 00$

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \quad ⚡ \quad \begin{array}{cc} \beta & \\ \alpha & \alpha \end{array}$$

Stattdessen: Kodiere Symbole so, dass der „Rand"erkennbar ist.
z.B.: Für $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\} \rightarrow$ ersetze α_i durch 01^i

$\alpha \rightarrow 01$

$\beta \rightarrow 011$

0 1 1

0 1 0 $\leftarrow$ egal welches Symbol folgt,
hier steht immer 0

Aufgabe 3

zu zeigen: 1-PCP ist entscheidbar

Das Alphabet besteht nur aus einem Zeichen

$\Rightarrow$ es kommt nur auf die Länge der Teilworte an

Algorithmus:

1. Wenn für alle Paare (x_i, y_i) gilt: $|x_i| > |y_i|$, lehne ab.
2. Wenn für alle Paare (x_i, y_i) gilt: $|x_i| < |y_i|$, lehne ab.
3. Sonst akzeptiere Warum gilt das?

Fall 1: es gibt ein Paar (x_i, y_i) mit $|x_i| = |y_i|$
$\Rightarrow$ dieses Paar ist eine gültige Lösung

Fall 2: es gibt zwei Paare (x_i, y_i), (x_j, y_j) mit $|x_i| > |y_i|$ und $|x_j| < |y_j|$

Löse Gleichung: $n \cdot |x_i| + m \cdot |x_j| = n \cdot |y_i| + m \cdot |y_j|$

Aufgabe 3 (Continued)

Löse Gleichung: $n \cdot |x_i| + m \cdot |x_j| = n \cdot |y_i| + m \cdot |y_j|$

$$\equiv n \cdot (|x_i| - |y_i|) = m \cdot (|y_j| - |x_j|)$$

Lösung: $m = (|x_i| - |y_i|) \qquad n = (|y_j| - |x_j|)$

$\Rightarrow$ verwende (x_i, y_i) n mal und (x_j, y_j) m mal:

$$\begin{aligned}
& x_i^n \cdot x_j^m && = y_i^n \cdot y_j^m \\
\equiv\; & x_i^{|y_j|-|x_j|} \cdot x_j^{|x_i|-|y_i|} && = y_i^{|y_j|-|x_j|} \cdot y_j^{|x_i|-|y_i|} \\
\equiv\; & (|y_j|-|x_j|) \cdot |x_i| + (|x_i|-|y_i|) \cdot |x_j| && = (|y_j|-|x_j|) \cdot |y_i| + (|x_i|-|y_i|) \cdot |y_j| \\
\equiv\; & |x_i||y_j| - |x_i||x_j| + |x_i||x_j| - |x_j||y_i| && = |y_i||y_j| - |x_j||y_i| + |x_i||y_j| - |y_i||y_j| \\
\equiv\; & |x_i||y_j| - |x_j||y_i| && = |x_i||y_j| - |x_j||y_i| \\
\equiv\; & 1^{|x_i||y_j| - |x_j||y_i|} && = 1^{|x_i||y_j| - |x_j||y_i|}
\end{aligned}$$

Kodierung auswerten

Kodierung anwenden

$\Rightarrow$ es ergeben sich gleiche Wörter.