Übung 8: Reduktionen

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Aufgabe 1

$A, B \subseteq \Sigma^*$ mit $A = \{$"Alle Wörter gerader Länge"$\}$ und
$B = \{$"Alle Wörter ungerader Länge"$\}$

1. $A \leq B$ $\boxed{w \in A \iff f(w) \in B}$

definiere $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ $\quad f(w) = w \cdot k \quad$ mit $k \in \Sigma$

$\Rightarrow$ f ist berechenbar und total

$$\text{Es gilt:} \quad \begin{aligned} w \in A &\equiv |w| \text{ gerade} \\ &\equiv |w \cdot k| \text{ ungerade} \\ &\equiv |f(w)| \text{ ungerade} \\ &\equiv f(w) \in B \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} w \in B &\equiv |w| \text{ ungerade} \\ &\equiv |w \cdot k| \text{ gerade} \\ &\equiv |f(w)| \text{ gerade} \\ &\equiv f(w) \in A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist auch Reduktionsfunktion für $B \leq A$

Aufgabe 2

Sei $A = \{x^p y^q z^r : p, q, r \in \mathbb{N}_0 \text{ und } p + q = r\}$ und $B = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

1. $A \leq B$ $\quad w \in A \iff f(w) \in B$

Idee: konstruiere f so, dass alle x, y durch a und alle z durch b ersetzt werden.

$$f(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ ba & \text{falls } w = x \text{ oder } w = y \\ b & \text{falls } w = z \\ a \cdot f(w') & \text{falls } w = x \cdot w' \text{ und } w' \neq \varepsilon \\ a \cdot f(y \cdot w') & \text{falls } w = y \cdot y \cdot w' \\ a \cdot f(z \cdot w') & \text{falls } w = y \cdot z \cdot w' \\ b \cdot f(w') & \text{falls } w = z \cdot w' \text{ und } w' \neq \varepsilon \\ ba & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Sei $A = \{x^p y^q z^r : p, q, r \in \mathbb{N}_0 \text{ und } p + q = r\}$ und $B = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

1. $A \leq B$ $\quad$ $w \in A \iff f(w) \in B$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
w \in A &\equiv (\exists p, q, r \in \mathbb{N}_0) w = x^p y^q z^r \land p + q = r \\
&\equiv (\exists p, q, r \in \mathbb{N}_0) f(w) = a^p a^q b^r \land p + q = r \\
&\equiv (\exists p, q, r \in \mathbb{N}_0) f(w) = a^{p+q} b^r \land p + q = r \\
&\equiv (\exists r \in \mathbb{N}_0) f(w) = a^r b^r \\
&\equiv (\exists n \in \mathbb{N}_0) f(w) = a^n b^n \\
&\equiv f(w) \in B
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Sei $A = \{x^p y^q z^r : p, q, r \in \mathbb{N}_0 \text{ und } p + q = r\}$ und $B = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

2. $B \leq A$ $\quad \boxed{w \in B \iff g(w) \in A}$

Idee: ersetze jedes a durch x und jedes b durch z

$$g(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ x \cdot g(w') & \text{falls } w = a \cdot w' \\ z \cdot g(w') & \text{falls } w = b \cdot w' \end{cases} \quad \Rightarrow g \text{ ist berechenbar und total}$$

$$\begin{aligned} w \in B \quad & \equiv \quad (\exists n \in \mathbb{N}_0) w = a^n b^n \\ & \equiv \quad (\exists n \in \mathbb{N}_0) g(w) = x^n z^n \\ & \equiv \quad (\exists r \in \mathbb{N}_0) g(w) = x^r z^r \\ & \equiv \quad (\exists r \in \mathbb{N}_0) g(w) = x^r y^0 z^r \\ & \equiv \quad (\exists p, r \in \mathbb{N}_0) g(w) = x^r y^0 z^r \wedge p + 0 = r \\ & \equiv \quad g(w) \in A \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Mengen $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subset B \subset C \subset D$,
B und D entscheidbar, A und C nicht entscheidbar.

Setze $A = \{(u, u) : M_u(u) \text{ hält}\}$ $\Rightarrow$ nicht entscheidbar
(spezielles Halteproblem)

Setze $B = \{(u, u) : M_u \text{ ist eine TM}\}$ $\Rightarrow$ entscheidbar
$\Rightarrow A \subset B$

Setze $C = \{(u, v) : M_u = M_v\}$ $\Rightarrow$ nicht entscheidbar
(Äquivalaenzproblem)
$\Rightarrow B \subset C$

Setze $D = \Sigma^*$ $\Rightarrow$ entscheidbar
$\Rightarrow C \subset D$