Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt 9

Abgabe: 28. Januar 2022 um 12 Uhr

Definition(en)

- Eine *Clique* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge von Knoten $V' \subseteq V$, die paarweise benachbart sind. Für alle $u, v \in V'$ (mit $u \neq v$) gilt also $uv \in E$. Als *Größe* der Clique bezeichnen wir die Anzahl der Knoten $|V'|$.
- k-Clique (für $k \in \mathbb{N}$):
  - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
  - **gefragt:** Hat G eine Clique der Größe k?
- Clique:
  - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
  - **gefragt:** Hat G eine Clique der Größe k?
- 2-Sat:
  - **gegeben:** Ein Boolesche Formel $\mathcal{F}$ in konjunktiver Normalform mit genau 2 Literalen pro Klausel (d. h. $\mathcal{F}$ ist von der Form $(\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2}) \wedge (\ell_{2,1} \vee \ell_{2,2}) \ldots \wedge (\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2})$, wobei $\ell_{i,j} \in \{x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$).
  - **gefragt:** Hat $\mathcal{F}$ eine erfüllende Belegung?
- Färbbarkeit:
  - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
  - **gefragt:** Gibt es eine Funktion $f\colon V \to \{1, \ldots, k\}$, sodass für alle $v, u \in V$ (mit $vu \in E$) gilt: $f(v) \neq f(u)$?

    (Anders ausgedrückt: Kann man die Knoten des Graphen so färben, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?)

Aufgabe 9.1 *(2 + 2 + 2 Punkte)*

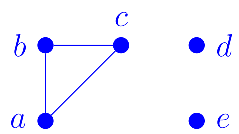
a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der eine 3-Clique, aber keine 4-Clique enthält.

b) Zeigen Sie: k-CLIQUE $\in \mathsf{P}$. (*Hinweis:* k ist Teil der Problemdefinition.)

c) Zeigen Sie: CLIQUE $\in \mathsf{NP}$. (*Hinweis:* k ist Teil der Eingabe.)

Lösung

a) Hier könnte man einen K_3 zeichnen um die 3-Clique abzudecken. Wenn man dann noch zwei weitere Knoten hinzufügt, dann hat der Graph insgesamt 5 Knoten, aber keine 4-Clique. Formal also $G = (\{a, b, c, d, e\}, \{ab, ac, bc\})$



b) Sei $G = (V(G), E(G))$ ein Graph mit $|V(G)| = n$. Sei weiter H ein Teilgraph von G, also $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) = E(G) \cap (V(H) \times V(H))$. (Man nimmt also einen Teil der Knoten aus G weg und streicht die Kanten, die zu den wegfallenden Knoten gehören.) Nun gilt:

G hat eine Clique der Größe $k \Leftrightarrow \exists$ *vollständiger* Teilgraph H von G mit $|V(H)| = k$.

Weiter lässt sich in Polynomzeit prüfen, ob ein Graph (hier H) vollständig ist: Es gibt höchstens $|V(H)|^2 = k^2$ viele Kanten, die man prüfen muss.

Außerdem enthält G höchstens $\binom{n}{k} \leq n^k$ viele k-"knotige" Teilgraphen.

Wenn man nun für alle k-knotigen Teilgraphen überprüft, ob diese vollständig sind, dann ergibt sich eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^k \cdot k^2)$ und da k Teil der Problemdefinition und somit konstant ist, ist diese Laufzeit polynomiell.

c) Der folgende nicht-deterministische Algorithmus findet eine Clique der Größe k in einem Graphen:

- Falls $k > |V|$, lehne ab.
- Rate Knotenmenge $X \subseteq V$ mit $|X| = k$.
- Teste für alle $u, v \in X$ mit $u \neq v$, ob $uv \in E$.

Die ersten beiden Schritte haben (je nach Definition) konstante oder höchstens lineare Laufzeit. Der dritte Schritt hat eine quadratische Laufzeit, da es höchstens $|X|^2 \leq |V|^2$ viele Knotenpaare gibt, die getestet werden müssen. Zusammen ergibt sich also eine polynomielle Laufzeit für den nicht-deterministischen Algorithmus.

Aufgabe 9.2 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie: 2-SAT $\in \mathsf{P}$. (Es ist kein formaler Beweis gefordert. Es reicht, wenn Sie Ihre Überlegungen kurz skizzieren.)

(*Hinweis:* Formen Sie die Klauseln zu je zwei Implikation und. Überlegen Sie sich, was es für diese Implikationen bedeutet, wenn jeweils eines der beiden Literale auf *wahr* gesetzt wird und wie Sie diese Abhängigkeit in einem Graph darstellen können.)

Lösung

Bei 2-SAT nutzt man aus, dass jede Klausel genau 2 Literale hat und somit ein Paar von Implikationen beschreibt. Denn:

$$\begin{aligned}(x \vee y) &\equiv (x \vee y) \vee (x \vee y) && \triangleright \text{ Idempotenz von } \vee \\ &\equiv (\neg\neg x \vee y) \vee (x \vee \neg\neg y) && \triangleright \text{ Doppelte Negation hebt sich auf} \\ &\equiv (\neg x \Rightarrow y) \vee (x \Leftarrow \neg y) && \triangleright \text{ Definition der Implikation}\end{aligned}$$

Das Belegen einer Variable (mit WAHR) innerhalb einer Implikation erzwingt eine Belegung der jeweils anderen Variable. Die Idee ist es nun, dass man für jede Variable die "Kette" der jeweils erzwungenen anderen Werte absucht. Wenn man eine Variable findet, die im Verlauf einer solchen Kette ihre Negation erzwingt, ist die gegebene Formel nicht erfüllbar. Hier ist es sinnvoll, gerichtete Graphen aus den Formeln zu konstruieren. Beispiel einer erfüllbaren Formel:

$$\phi = (\neg x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg z)$$

Die erste Klausel beschreibt die beiden Implikationen $(x \Rightarrow y)$ und $(\neg y \Rightarrow \neg x)$. Die zweite Klausel die beiden Implikationen $(\neg x \Rightarrow z)$ und $(\neg z \Rightarrow x)$. Und die dritte Klausel beschreibt die beiden Implikationen $(y \Rightarrow \neg z)$ und $(z \Rightarrow \neg y)$. Der zugehörige Graph ist:

$$G = (\{x, \neg x, y, \neg y, z, \neg z\}, \{(x, y), (y, \neg z), (\neg z, x), (\neg x, z), (z, \neg y), (\neg y, \neg x)\})$$

Keine der drei Variablen erzwingt ihre Negation und somit ist die Formel erfüllbar. Beispiel einer nicht-erfüllbaren Formel:

$$\rho = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y)$$

Dabei ergibt sich als Graph (fast) vollständiger Graph mit den vier Knoten $\{x, \neg x, y, \neg y\}$. Die einzigen Kanten, die fehlen sind die zwischen x und $\neg x$ bzw. y und $\neg y$. Hier ergeben sich Kreise, die ein Literal als auch ihre Negation enthalten.

Die Pfade in einem solchen Graphen kann man mithilfe von Tiefen- oder Breitensuche in Polynomzeit ermitteln. Darum ist auch der gesamte Algorithmus polynomiell. Man kann auch über *starke Zusammenhangskomponenten* argumentieren: Wenn sowohl eine Variable als auch ihre Negation sich in der selben Zusammenhangskomponente befinden, dann ist die Formel nicht erfüllbar.

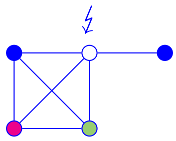
Aufgabe 9.3 *(2 + 2 Punkte)*

a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der sich *nicht* mit 3 Farben färben lässt.

b) Zeigen Sie: FÄRBBARKEIT $\in$ NP.

Lösung

a) Hier könnte man einen K_4 zeichnen mit einer abstehenden Kante zeichnen. Da der Graph eine Clique der Größe 4 besitzt, kann er nicht mit 3 Farben gefärbt werden.



b) Die Zugehörigkeit zu NP kann man mit einem *Guess-and-Check*-Algorithmus zeigen:

- Rate eine Färbung $f\colon V \to \{1, \dots, k\}$
- Teste für alle $v_i, v_j \in V$ mit $v_i, v_j \in E$ ob $f(v_i) = f(v_j)$. Falls ja, lehne ab.
- Akzeptiere.

Der erste Schritt hat konstante oder lineare Laufzeit (je nach Definition des "Ratens"). Die Laufzeit des zweiten Schritts ist linear bzgl. der Kantenmenge (also auch der Eingabe). Der dritte Schritt hat konstante Laufzeit. Man kann die geratene Folge also in Polynomzeit überprüfen und damit gilt $\textsc{Färbbarkeit} \in \mathsf{NP}$.