Satz.
A ist entscheidbar $\Leftrightarrow$ sowohl A als auch $\overline{A}$ sind semi–entscheidbar.

Beweis.
($\rightarrow$): klar.
($\leftarrow$): Sei M_1 ein Semi–Entscheidungsverfahren für A.
Sei M_2 ein Semi–Entscheidungsverfahren für $\overline{A}$.
Erhalte ein Entscheidungsverfahren für A:

```
INPUT(x);
FOR s:=1,2,3,...DO
   IF M1 bei Eingabe x in s Schritten stoppt
      THEN OUTPUT(1) END;
   IF M2 bei Eingabe x in s Schritten stoppt
      THEN OUTPUT(0) END;
END
```

Definition.
$A \subseteq \Sigma^*$ heißt *rekursiv aufzählbar*, falls $A = \emptyset$ oder es eine totale und berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ gibt mit

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

"f zählt A auf." (evtl. mit $f(i) = f(j)$ für $i \neq j$!)

Satz.
Eine Sprache ist rekursiv aufzählbar, genau dann wenn sie semi–entscheidbar ist.

Beweis.
($\rightarrow$): Sei A rekursiv aufzählbar mittels der Funktion f.
Erhalte ein Semi–Entscheidungsverfahren für A:

```
INPUT(x);
FOR n := 0,1,2,3,...DO
   IF f(n) = x THEN OUTPUT(1) END;
END
```

($\leftarrow$): Sei $A \neq \emptyset$ semi–entscheidbar mittels Algorithmus M.
Sei $a \in A$ fixiert
Definiere eine totale und berechenbare Funktion f
mit $f(\mathbb{N})$=A mittels folgendem Algorithmus:

```
   INPUT(n);
   * Interpretiere n als Kodierung n = c(x,y)
   mit x = c1(n), y = c2(n)*
   x := c1(n);
   y := c2(n);
   IF M angesetzt auf x in y Schritten stoppt
   THEN OUTPUT(x) ELSE OUTPUT(a) END;
```

Der Algorithmus stoppt stets und gibt nur Elemente aus A aus.

$\Rightarrow$ f ist total und berechenbar,
$f(\mathbb{N}) \subseteq A$

Noch zu zeigen: $f(\mathbb{N}) = A$, denn

Sei $b \in A$ beliebig.
$\Rightarrow M$ stoppt bei Eingabe b in s Schritten.

Betrachte: $n = c(b, s)$
$\Rightarrow f(n) = b$ nach Konstruktion des Algorithmus ■

Insgesamt erhält man:

Satz.
Eine Sprache A ist entscheidbar, genau dann wenn A und $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar sind.

Zusammenfassung:

Bisher ist die Äquivalenz der folgenden Aussagen gezeigt worden:

A ist rekursiv aufzählbar.
$\Leftrightarrow$ A ist semi–entscheidbar.
$\Leftrightarrow$ A ist vom Typ 0 (als formale Sprache).
$\Leftrightarrow$ $A = L(M)$ für eine TM M.
$\Leftrightarrow$ χ'_A ist berechenbar.
$\Leftrightarrow$ A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.
$\Leftrightarrow$ A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

Abschließende Bemerkung zum Zusammenhang

Abzählbarkeit — rekursive Aufzählbarkeit

Definition.
A heißt *abzählbar*, falls $A = \emptyset$ oder es gibt eine totale Funktion f gibt mit

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

- A ist rekursiv aufzählbar, falls A durch eine totale rekursive Funktion abzählbar ist.

Unterschied:
Sei A abzählbar, $A' \subseteq A \Rightarrow A'$ ist abzählbar

Beweis.
Sei A abzählbar mittels f, $a \in A'$ fixiert.
Betrachte:

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{falls } f(n) \in A' \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

$g(n)$ zählt A' ab, da $A' = \{g(0), g(1), \ldots\}$ ■

Sei A rekursiv abzählbar.
Es gibt Teilmengen $A'' \subseteq A$, die nicht rekursiv abzählbar sind.

Beweis.
später.

1.8 Das Halte–Problem und die Reduzierbarkeit

- Kennenlernen unentscheidbarer Probleme.
  Besonders berühmt: Das Halteproplem für TM .
  Dazu Kodierung der TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ als Wort über {0,1}

1. Kodierung von M als Wort über {0,1,# }:

   Sei $Q = \{q_0, \ldots, q_n\}$
   $\Gamma = \{a_0, \ldots a_k\}$

   Schreibe $\delta(q_i, a_j) = (q_{i'}, a_{j'}, y)$
   als

   $$w_{i,j,i',j',y} = \#\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#bin(m) \quad \text{mit } m = \begin{cases} 0 & y = L \\ 1 & y = R \\ 2 & y = N \end{cases}$$

   Kodierung von M durch Konkatenation aller Worte $w_{i,j,i',j',y}$, die zu δ gehören.

2. Kodierung von M durch ein Wort über { 0,1}:
   Kodierung mit Hilfe von

   $$0 \mapsto 00$$
   $$1 \mapsto 01$$
   $$\# \mapsto 11$$

   $w_{i,j,i',j',y}$ durch ein Wort über {0,1}

Sei M_0 eine fixierte TM

$$w \in \{0,1\}^* \mapsto M_w = \begin{cases} M & \text{falls } w \text{ Codewort von } M \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

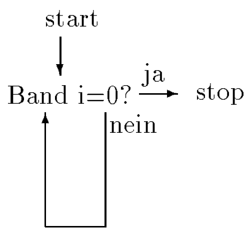
Definiton
Die folgende Sprache

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

heißt *spezielles Halte–Problem.*

Satz.
Das spezielle Halte–Problem ist nicht entscheidbar.

Beweis.
Annahme: K ist entscheidbar.
$\Leftrightarrow \chi_K$ ist berechenbar mittles TM M.
Betrachte: TM M'



M' stoppt, falls M 0 ausgibt.
Gibt M 1 aus, geht M' in eine Endlos–Schleife.

Sei $w' \in \{0,1\}$ mit $M_{w'} = M$

Es gilt:
M' angesetzt auf w' hält.
$\Leftrightarrow$ M angesetzt auf w' gibt 0 aus.
$\Leftrightarrow \chi_K(w') = 0$ (Def. von M)
$\Leftrightarrow w' \in K$
$\Leftrightarrow M_{w'} = M'$ hält angesetzt auf w' nicht. (Widerspruch) ∎

Das Reduktionskonzept ermöglicht eine “leichte” Übertragung dieses Resultats auf weitere Probleme:

Definition.
Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$
A heißt *auf B reduzierbar* ($A \leq B$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt mit

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

für alle $x \in \Sigma^*$.

Lemma
(i) Gilt $A \leq B$ und ist B entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.
(ii) Gilt $A \leq B$ und ist B semientscheidbar, so ist auch A semientscheidbar.

Beweis.
(i) Sei $A \leq B$ mittels f

Sei χ_B berechenbar
$\Leftrightarrow \chi_B \circ f$ ist berechenbar
Es gilt:

$$\chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & f(x) \in B \\ 0 & f(x) \notin B \end{array} \right\} = \chi_B(f(x))$$

$\Leftrightarrow \chi_A$ ist berechenbar und A ist entscheidbar

(ii) ersetze in (i) χ durch χ' und 0 durch undefiniert. ■

Korollar
$A \leq B$ und A ist nicht entscheidbar.
$\Rightarrow$ B ist nicht entscheidbar.

Beweis.
Kontraposition von (i) ■

Definition.
Die Sprache

$$H = \{w\#x \mid M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

heißt (allgemeines) *Halte–Problem.*

Satz.
Das Halte–Problem ist nicht entscheidbar.

Beweis.
Es reicht zu zeigen: $K \leq H$
wähle $f(w) = w\#w$
$\Rightarrow w \in K \Leftrightarrow f(w) \in H$ ■

Definiton
Die Sprache

$$H_0 = \{w \mid M_w \text{ angesetzt auf leeren Band hält}\}$$

heißt *Halte–Problem auf leeren Band.*

Satz.
Das Halte–Problem auf dem leeren Band H_0 ist nicht entscheidbar.

Beweis.
Es reicht zu zeigen: $H \leq H_0$.
Ordne $w\#x$ folgende TM zu:

> gestartet mit leeren Band schreibt M x auf das Band, arbeitet dann wie M_w (angesetzt auf x).
> Die Arbeitsweise von M gestartet mit nicht leeren Band ist unerheblich.

$f : w\#x \to$ Code von M.
f ist berechenbar Man kann f zu einer totalen und berechenbaren Funktion erweitern.

Es gilt:

$$\begin{aligned} w\#x \in H &\Leftrightarrow M_w \text{angestzt auf } x \text{ hält} \\ &\Leftrightarrow M \text{ angesetzt auf leerem Band hält} \\ &\Leftrightarrow f(w\#x) \in H_0 \end{aligned}$$

Satz von Rice.
Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller TM–berechenbaren Funktionen
Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$,
Dann ist die Sprache

$$C(\mathcal{S}) := \{w \mid \textit{die von } M_w \textit{berechnetet Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

Beweis.
Sei $\Omega \in \mathcal{R}$ eine überall undefinierte Funktion.

1. Fall: $\Omega \in \mathcal{S}$
Wegen $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$ gibt es eine Funktion $q \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$.
Sei Q eine TM , die q berechnet.
ordne $w \in \{0, 1\}$ die TM M zu mit:

> Angesetzt auf die Eingabe y ignoriert M diese zunächst und verhält sich wie M_w angesetzt auf das leere Band.
> Falls diese Rechnung zu Ende kommt, so verhält sich M danach wie Q angesetzt auf y.

Für die von M berechnete Funktion g gilt:

$$g = \begin{cases} \Omega & \text{falls } M_w \text{ auf dem leeren Band nicht stoppt} \\ q & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte: $f : w \mapsto$ Code von M
f ist total und berechenbar.

Es gilt:

$w \in H_0$ $\Rightarrow M_w$ stoppt angesetzt auf dem leeren Band.
$\Rightarrow M$ berechnet q.
$\Rightarrow$ die von $M_{f(w)}$ berechnete Funktion liegt nicht in $\mathcal{S}$.
$\Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$

$w \notin H_0$ $\Rightarrow M_w$ stoppt angesetzt auf dem leeren Band nicht.
$\Rightarrow M$ berechnet Ω.
$\Rightarrow$ die von $M_{f(w)}$ berechnete Funktion liegt in $\mathcal{S}$.
$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

d.h.: f vermittelt eine Reduktion :

$$\overline{H_0} \leq C(\mathcal{S})$$

wegen H_0 unentscheidbar
$\Rightarrow \overline{H_0}$ unentscheidbar
$\Rightarrow C(\mathcal{S})$ unentscheidbar

2. Fall:
Man zeigt analog $H_0 \leq C(\mathcal{S})$ ■

Anwendung:
Betrachte: $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{R} \mid f \text{ ist konstant}\}$
$\Rightarrow_{Satz von Rice} C(\mathcal{S}) = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine konstante Funktion}\}$ ist nicht entscheidbar.

Es gibt verschiedene Klassen der "Unlösbarkeit":
Betrachte: Das Äquivalenzproblem für TM :

$$\ddot{A} = \{u\#w \mid M_w \text{ berechnet dieselbe Funktion wie } M_u\}$$

Es gilt:
$H \leq \ddot{A}$ aber nicht $\ddot{A} \leq H$

Man kann unendlich lange Folgen von Problemen $A_1, A_2, \ldots$ konstruieren mit

$$A_i \leq A_{i+1} \quad \text{aber nicht} \quad A_{i+1} \leq A_i$$