($\rightarrow$) : Eine erfüllende Belegung von F liefert eine erfüllende Belegung von F_1.
($\leftarrow$) : Die Belegung der x–Variablen einer erfüllenden Belegung von F_1 liefert eine erfüllende belegung für F.

4. Schritt
Umformung jeder Teilformel in KNF.
Es enstehen Klauseln mit höchstens 3 Literalen.
Das Verfahren ist polynomial, da jede Teilformel in konstanter Länge umgeformt werden kann.

Beispiel $[a \leftrightarrow (b \vee c)] \mapsto (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c)$
$[a \leftrightarrow (b \wedge c)] \mapsto (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

$\Rightarrow F_1 = y_0 \wedge (\neg y_0 \vee y_1) \wedge (\neg y_0 \vee \neg x_2) \wedge (y_0 \vee \neg y_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg x_3) \wedge (y_1 \vee x_3)$
mit
F_1 ist erfüllbarkeitsäquivalent mit F.

Umformung von F in F_1 ist in polynomieller Zeit möglich. ■

Bemerkung
Für ein analoges Problem gilt:
$2SAT \in P$, da es nur polynomiell viele verschiedene Klauseln mit höchstens 2 Literalen über $\{x_1, .., x_n\}$ gibt.

2.4.2 CLIQUE

Definition. (CLIQUE)
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $k \in I\!N$.
Gefragt: Besitzt G eine "Clique" der Größe k?

Wobei Clique ein vollständiger Teilgraph $G' = (V', E')$ ist, mit

$$(u, v) \in E \quad \forall u, v \in V', \;\; u \neq v$$

Satz.
CLIQUE ist NP–vollständig.

Beweis.
1.) CLIQUE$\in NP$ mit "guess and check".
2.) CLIQUE ist NP–hart.
Sei F Formel in KNF mit (genau) 3 Literalen pro Klausel.
$F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \ldots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$ mit $z_{i,j} \in \{x_1, x_2, \ldots\} \wedge \{\neg x_1, \neg x_2, \ldots\}$

Ordne F Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl k zu gemäß:

$$\begin{aligned} V &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(m,1),(m,2),(m,3)\} \\ E &= \{\{(i,j),(p,q) : i \neq p \text{ und } z_{i,j} \neq \neg z_{p,q}\} \\ k &= m \end{aligned}$$

Es gilt: F ist erfüllbar durch Belegung B.
$\Leftrightarrow$ Jede Klausel hat ein Literal, das unter der Belegung B den Wert 1 annimmt, z.B.: $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \ldots, z_{m,j_m}$.
$\Leftrightarrow$ Es gibt Literale $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \ldots, z_{m,j_m}$, die paarweise nicht komplementär sind.
$\Leftrightarrow$ Es gibt Knoten $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (m, j_m)$, die paarweise verbunden sind.
$\Leftrightarrow$ G hat CLIQUE der Größe k. ■

2.4.3 HAMILTON–KREIS

Definition. (GERICHTETER HAMILTON–KREIS)
Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gefragt: Besitzt G einen Hamilton–Kreis?

Wobei ein Hamilton–Kreis eine Permutation der Knotenindizes $(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)})$, so daß $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E\ \forall i = 1, \ldots, n-1$ und $(v_\pi(n), v_{\pi(1)}) \in E$.

Definition. (UNGERICHTETER HAMILTON–KREIS)
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gefragt: Besitzt G einen Hamilton–Kreis?

Satz.
GERICHTETER HAMILTON–KREIS ist NP–vollständig.

Beweis.
GERICHTETER HAMILTON–KREIS $\in NP$ "guess and check".

Noch zu zeigen: GERICHTETER HAMILTON–KREIS NP–hart.
Es wird gezeigt: 3SAT$\leq_p$GERICHTETER HAMILTON–KREIS.

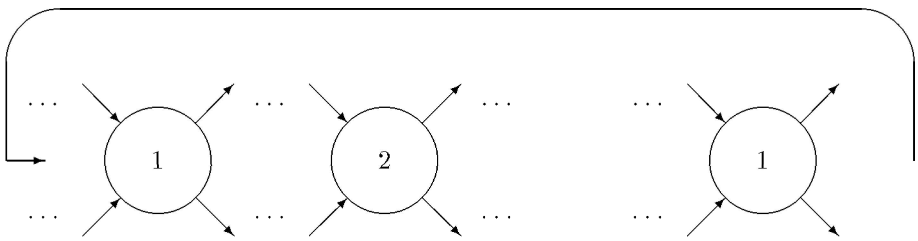
Sei F Formel in KNF mit genau 3 Literalen pro Klausel.

$$\Rightarrow F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \ldots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$$

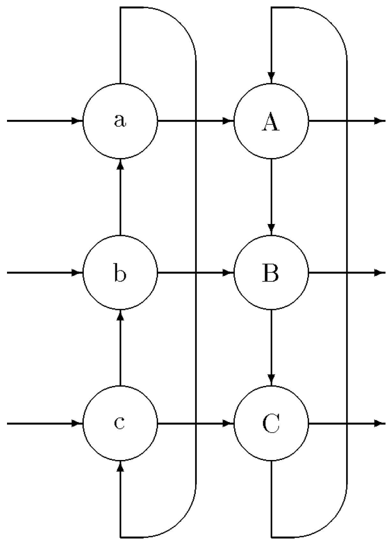
mit

$$z_{i,j} \in \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$$

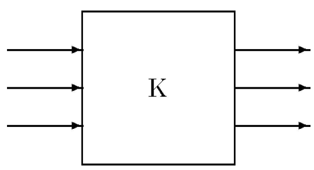
Konstruktion eines gerichteten Graphen:



Vom gleichen Knoten i gehen jeweils 2 Kanten aus.
Die beiden Kanten führen durch folgenden "Klauselgraph" K, von dem m Kopien bereitstehen.



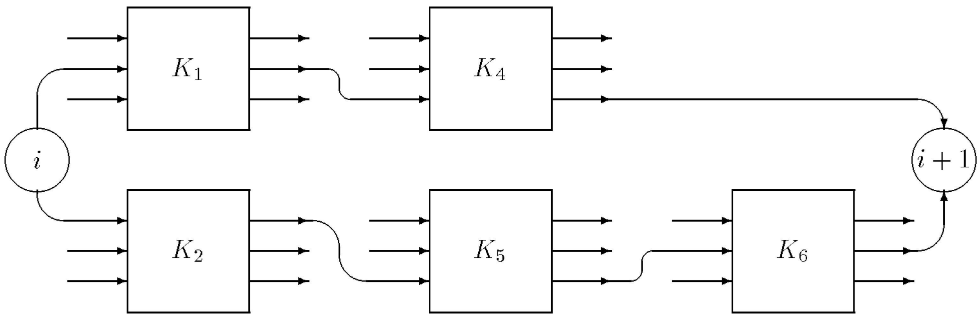
Symbol:



Beispiel.

Literal x_i	kommt in Klausel 1 an Position 2
	und in Klausel 4 an Position 3 vor.
Literal $\neg x_i$	kommt in Klausel 2 an Position1
	in Klausel 5 an Posiyion 3
	und in Klausel 6 an Position 2 vor

Verbindungen von i nach $i+1$:



Beobachtung
Enthält der konstruierte Graph G einen Hamilton–Kreis, so verläßt dieser jedes K wie folgt:
Kommt der Hamilton–Pfad bei $a(b,c)$ an, so verläßt er K in $A(B,C)$.

Beweis.
Annahme: Hamilton–Pfad erreicht K in a und verläßt K nicht in A:
Mögliche Fälle:
$a - A - B$ Sackgasse in b.
$a - A - B - C$ Sackgasse in b.
$a - c - b - B$ A und C sind nicht mehr erreichbar.
$a - c - b - B - C$ A nicht mehr erreichbar.
$a - c - C - A - B$ Sackgasse bei b.

Analog für b und c.

$\Rightarrow$ Ein Hamilton–Pfad kann durch K nur folgende Wege nehmen:
$a - A$
$a - c - C - A$
$a - c - b - B - C - A$

Behauptung.
F erfüllbar $\Leftrightarrow$ G hat Hamilton–Kreis.

<u>Beweis.</u>
$(\rightarrow)$: Habe F erfüllende Belegung:
Gilt $x_i = 1$, dann folge dem oberen Pfad von i an.
Gilt $x_i = 0$, dann folge dem unteren Pfad.

Die entsprechenden "Klauselgraphen" werden durchlaufen.

So wird erreicht, daß bei Rückkehr nach 1 alle Konten von G durchlaufen wurden.

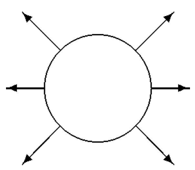
$(\leftarrow)$: G besitzt Hamilton–Kreis.
Definiere Variablenbelegung für F:
$x_i = 1$, falls Hamilton–Kreis Knoten i nach "oben" verläßt.
$x_i = 0$, falls Hamilton–Kreis Konten i nach "unten" verläßt.

Die Belegung erfüllt F,da jeder Klauselgraph durchlaufen, entsprechende Klausel also erfüllt wird. ■

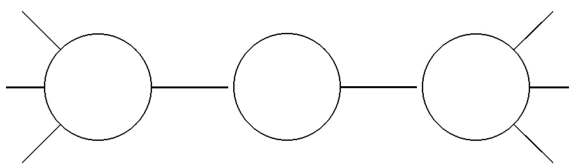
Satz.
UNGERICHTETER HAMILTON–KREIS ist NP–vollständig.

<u>Bewies</u>
Es gilt:
GERICHTETER HAMILTON–KREIS $\leq_p$ UNGERICHTETER HAMILTON–KREIS.

Ersetze in gerichtetem Graphen Knoten der Form



durch ungerichteten Teilgraphen



und erzwinge damit, daß jeder Hamilton–Kreis G_v in Pfeilrichtung durchlaufen wird. ∎

Bemerkung
Hamilton–Kreis ("Jeder Knoten wird genau einmal durchlaufen") ist NP–vollständig. Eulerkreis("Jede Kante wird genau einmal durchlaufen") ist in P ($\rightarrow$ Königsberger Brückenproblem).

Definition. (TRAVELING SALESPERSON Problem)
Gegeben: $n \times n$ Matrix $(M_{i,j})$ von "Entfernungen" zwischen n Städten.
Gefragt: $\exists$ Permutation ("Rundreise") mit

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)} + M_{\pi(n),\pi(1)} \leq k?$$

Satz.
Das TRAVELING SALESPERSON Problem ist NP–vollständig.

<u>Beweis.</u>
TRAVELING SALESPERSON Problem$\in NP$ "guess and check".

Noch zu zeigen:
UNGERICHTETER HAMILTON–KREIS $\leq_p$ TRAVELING SALESPERSON Problem:

$$G = (\{1, \ldots, n\}, E) \mapsto \begin{cases} \text{Matrix} M_{i,j} = & \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 2 & \{i,j\} \notin E \end{cases} \\ \text{Rundreiselänge:} & n \end{cases}$$

∎