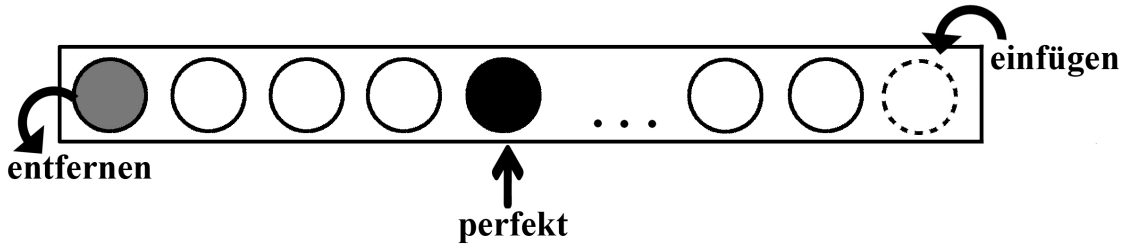
4.5.1 Allgemeiner Fall

Bei einem beliebigen Graph sind Zyklen möglich. Da auch die Kostenfunktion beliebig ist und somit negative Kosten auftreten können, können negative Zyklen entstehen.

Idee: Realisiere U als Schlage (FIFO)



Beinhaltet der Graph keine negativen Zyklen, so existiert nach Lemma 2 mindestens ein perfekter Knoten ($DIST[v] = dist(s, v)$) in der Schlange.
⇒ Zwischen zwei Entnahmen des selben Knoten u wurde mindestens ein perfekter Knoten entfernt. Dieser kann nicht wieder in die Schlage eingefügt werden.
⇒ Jeder Knoten wird maximal n-mal entfernt. Spätestens danach gilt $U = \emptyset$.

Beobachtung:
Wird ein Knoten öfter ($> n$) entfernt, dann muss nach Lemma 2 ein negativer Zyklus existieren.
→ Algorithmus von Bellman/Ford

Algorithmus von Bellman/Ford

```
1  bool BELLMANFORD(const graph& G, node s, const
      edge_array<int>& cost, node_array<int>& DIST,
      node_array<edge>& PRED){
2     queue<node> Q;
3     node_array<bool> inQ(G,false);
4     node_array<int> count(G,0);
5     node v;
6     forall_nodes(v,G){
7           DIST[v] = MAXINT;
8           PRED[v] = NULL;
9     }
10    DIST[s] = 0;
11    Q.append(s);
12    inQ[s] = true;
13    while(!Q.empty()){  // Solange Q nicht leer ist
14          node u = Q.pop()
15          inQ[u] = false;
16          if(++count[u] > G.numbers_of_nodes())
17                return false;
18          edge e;
19          forall_out_edges(e,u){
20                node v = G.target(e);
21                int d = DIST[u] + cost(e);
22                if(d < DIST[v]){
23                      DIST[v] = d;
24                      PRED[v] = e;
25                      if(!inQ[v]){
26                            Q.append(v);
27                            inQ[v] = true;
28                      }
29                }
30          }
31    }
32    return true;
33 }
```

Listing 4.1: Bellman/Ford

PRED-Verweise:
Die $PRED$-Verweise werden dazu genutzt, später den kürzesten Weg nachverfolgen zu können. $pred[v]$ gibt dabei an, über welche Kante v auf dem kürzesten Weg erreicht wird. $PRED$-Verweise ändern sich daher, wenn der kürzeste Weg sich ändert.

Erklärung:
Zuerst wird s in die Menge Q aufgenommen, da sich dessen $dist$-Wert nicht mehr ändert, außer s liegt auf einem negativen Zyklus. Nun beginnt der Algorithmus richtig und läuft so lange, bis entweder Q leer ist und damit zu jedem Knoten ein kürzester Weg gefunden wurde oder der Algorithmus bricht ab, da er einen negativen Zyklus erkannt hat.
Innerhalb der $while$-Schleife wird ein beliebiger Knoten u aus Q gewählt und entfernt. Für alle ausgehenden Kanten von u wird die Δ-Ungleichung überprüft und im Fall, dass sie verletzt wird, wird der $DIST$-Wert des folgenden Knoten korrigiert, dessen $PRED$-Verweis auf u gesetzt und der Knoten in die Menge Q aufgenommen, da dessen ausgehenden Kanten die Δ-Ungleichung verletzen könnten.

Laufzeitanalyse:

$$n \cdot \Big(\underbrace{\text{Iterationen über alle Knoten} + \text{ausgehende Kanten}}_{\mathcal{O}\Big(\underbrace{\sum_{v \in V}(1 + outdeg(v))}_{n+m}\Big)} \Big)$$

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(n \cdot (n + m)) = \mathcal{O}(n^2 + n \cdot m)$
Wenn der Graph zusammenhängend ist, ist $m \geq n - 1$
$\Rightarrow$ Laufzeit: $\mathcal{O}(nm)$
dh. $\mathcal{O}(n^2)$ für dünne Graphen (Graphen mit wenig Kanten)
$\mathcal{O}(n^3)$ für dichte Graphen (Graphen mit vielen Kanten)

Ist der Graph nicht zusammenhängend, so kann die Zusammenhangskomponente, in der sich s befindet, in linearer Zeit gefunden werden.

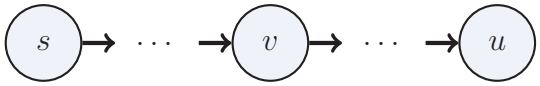
4.5.2 Azyklische Graphen

In azyklischen Graphen treten keine Zyklen auf. Daher ist es auch, trotzt beliebiger Kostenfunktion und dadurch möglicher negativer Kosten, nicht möglich, dass negative Zyklen auftreten. Dadurch existiert eine topologische Sortierung der Knoten.

Lemma 3
Der Knoten $u \in U$ mit kleinster topologischer Nummer, ist eine perfekte Wahl dh. $DIST[u] = dist(s, u)$

Beweis (indirekt)
Wähle $u \in U$ mit $topnum[u]$ minimal.
Annahme: $DIST[u] > dist(s, u)$
$\xRightarrow{\text{Lemma 2 b)}}$ $\exists$ Knoten v auf dem kürzesten Pfad von s nach u mit:

1) $DIST[v] = dist(s, v)$
2) $v \in U$



$\Rightarrow topnum[v] < topnum[u]$ ↯
Widerspruch zur kleinsten Wahl von u (kleinste $topnum$ in U)
$\Rightarrow DIST[u] = dist(s, u)$ □

Mögliche Implementierungen:

1) Topsort → Liste aller Knoten in U mit aufsteigenden $topnum$'s
   Durchlaufe diese Knoten
2) Kombinierter Algorithmus aus Topsort und kürzeste Wege

Algorithmus Topsort und kürzeste Wege

```
1  void Topsort(const graph& G, node s, const edge_array<
       int> cost, node_array<int>& Dist){
2      node_array<int> INDEG(G,0);
3      forall_nodes(v,G){
4           INDEG[v] = indeg(v);
5           if(INDEG[v] == 0)
6                ZERO.append(v);
7           DIST[v] = MAXINT;
8      }
9      DIST[s] = 0;
10     while(!ZERO.empty()){
11          u = ZERO.pop();
12          edge e;
13          forall_out_edges(e,u){
14               v = G.target(e);
15               if(--INDEG[v] == 0)
16                    ZERO.append(v);
17               int d = DIST[u] + cost(u,v);
18               if(d < DIST[v])
19                    DIST[v] = d;
20          }
21     }
22 }
```

Listing 4.2: Topsort und kürzeste Wege

Erklärung:
Die Grundstruktur entspricht dem normalen Topsort-Algorithmus (ZERO-Liste). In die innere Schleife wurde die Überprüfung der Δ-Ungleichung eingebaut. Da dieser zusätzliche Aufwand in konstanter Zeit ausführbar ist, ändert sich die Laufzeit von Topsort nicht.
Der Knoten s muss hierbei nicht gesondert behandelt werden, da der Algorithmus von alleine erst richtig startet, wenn s betrachtet wird, da die *dist*-Werte aller anderen Knoten auf $MAXINT$ gesetzt wurden und somit die Δ-Ungleichung nie verletzt wird.

Laufzeit:
$\mathcal{O}(n+m)$ (perfekte Wahl!)

4.5.3 Nicht-negative Netzwerke

In nicht-negativen Netzwerken können Zyklen vorkommen, aber aufgrund der fehlenden negativen Kosten, können keine negativen Zyklen entstehen.

Idee:
Wähle in Zeile 7 des Algorithmus 2 einen Knoten $u \in U$ mit $DIST[u]$ minimal. Dafür eignet sich eine Priority Queue und deren Funktion $PQ.delmin()$.
$\rightarrow$ Dijkstra

Lemma 4
Der Knoten $u \in U$ mit $DIST[u]$ minimal, dh. $DIST[u] = dist(s,u)$, ist eine perfekte Wahl.

Beweis (indirekt)
Annahme: $DIST[u] > dist(s,u) \xRightarrow{\text{Lemma 2 b)}} \exists\ v \in U$ mit $DIST[v] = dist(s,v)$ auf einem kürzesten Pfad von s nach u $(v \neq u)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} dist[s,u] &\geq dist(s,v) && \text{da alle Kosten nicht-negativ sind} \\ &= DIST[v] && \text{nach Lemma 2 b)} \\ &\geq DIST[u] && \text{da u minimal gewählt wurde} \end{aligned}$$

$\Rightarrow dist(s,u) = DIST[u]$ da $DIST$-Werte nie zu klein werden. $\lightning$ Widerspruch

Daher gilt: $DIST[u] = dist(s,u)$ $\square$

Implementierung
Datenstruktur: Priority Queue

LEDA-Datentyp:

i) allgemein: $p\_queue < I, P >$
I = Information, P = Priorität

hier: $I = node$
$P = int$ $DIST$-Werte

ii) Für Graphen: $node\_pq < P > PQ$ (Knoten-Priority-Queue)
PQ = Menge von Knoten mit dazugehörigen Prioritäten

Operationen:

- Konstruktor: $node\_pq < P > PQ(graph\ G)$
  $\rightarrow$ leere PQ für Knoten von G
- $\underline{void}$ $PQ.insert(node\ v,\ P\ p)$ fügt einen Knoten v mit der Priorität p zu PQ hinzu.
- $\underline{node}$ $PQ.delmin()$ entfernt einen Knoten v mit kleinster Priorität und gibt v zurück.
- $\underline{node}$ $PQ.find\_min()$ gibt einen Knoten v mit kleinster Priorität zurück.
- $\underline{void}$ $PQ.decrease\_p(node\ v,\ P\ q)$ vermindert die Priorität von v auf q.
- $\underline{bool}$ $PQ.empty()$ testet, ob PQ leer ist.

Algorithmus von Dijkstra

```
1  void Dijkstra(const graph& G, node s, const edge_array<
       int>& cost, node_array<int>& DIST, node_array<edge>&
        PRED){
2        node_pq<int> PQ(G);
3        node v;
4        forall_nodes(v,G){
5              DIST[v] = MAXINT;
6              PRED[v] = NULL;
7        }
8        DIST[s] = 0;
9        PQ.insert(s,0);
10       while(!PQ.empty()){
11             node u = PQ.del_min(); // perfekte Wahl
12             egde e;
13             forall_out_edges(e,u){
14                   node v = G.target(e);
15                   int d = DIST[u] + cost[e];
16                   if(d < DIST[v]){
17                         if(DIST[v] == MAXINT)
18                               PQ.insert(v,d);
19                         else // v ist in U
20                               PQ.decrease_p(v,d)
21                         DIST[v] = d;
22                         PRED[v] = e;
23                   }
24             }
25       }
26 }
```

Listing 4.3: Dijkstra

Erklärung:
Zuerst wird s in die Priority Queue PQ aufgenommen. Die *while*-Schleife läuft nun so lange, bis PQ leer ist. Ist dies der Fall, ist zu jedem Knoten ein kürzester Weg bekannt. In der *while*-Schleife wird zuerst aus der PQ ein Knoten u gewählt. Dabei wird darauf geachtet, dass es eine perfekte Wahl ist. Dann werden alle von u ausgehenden Kanten betrachtet, die jeweilige Δ-Ungleichung überprüft und falls sie verletzt wurde, der erreichte Knoten entweder in PQ aufgenommen, falls er noch nicht in PQ drin ist oder sonst seine Priorität auf seinen neuen DIST-Wert gesetzt.

Danach wird noch sein $DIST$-Wert angepasst und sein $PRED$-Verweis auf die Kante gesetzt, über die er erreicht wurde.

Laufzeitanalyse:

i) Operationen auf dem Graphen: $\mathcal{O}(n+m)$

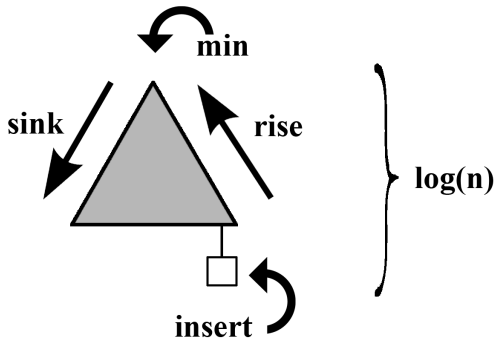
ii) Priority Queue:
$1 \cdot$ Konstruktor
$n \cdot insert()$
$n \cdot delmin()$
$n \cdot empty()$
$m \cdot decrease()$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}\big(n \cdot (T_{insert}(n) + T_{delmin}(n) + T_{empty}(n)) + m \cdot T_{decrease}(n)\big)$
$T_{op}(n) =$ Laufzeit der Operation op auf PQ der Größe n

Varianten von Datenstrukturen:

- binärer Min-Heap
- balancierter Baum

  $\Rightarrow$ Dijkstra $\mathcal{O}((n+m) \cdot log(n))$



Spezielle Heap-Datenstruktur:
Ein Fibonacci-Heap ist eine Menge von binomischen Bäumen. Daher ist der maximale Rang eines Fibonacci-Heaps kleiner gleich $log(n)$, wobei n die Anzahl der Knoten ist. Zudem besitzt der Fibonacci-Heap einen Pointer auf eine Wurzel mit minimaler Priorität. Hier entspricht die Priorität den DIST-Werten. Dadurch ergibt sich der folgende Aufwand:

Amortisierte Analyse:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Insert } \mathcal{O}(1)\\ \text{Delmin } \mathcal{O}(log(n))\\ \text{Decrease } \mathcal{O}(1)\end{array}\right\} \rightarrow \mathcal{O}(n \cdot log(n) + m)$$