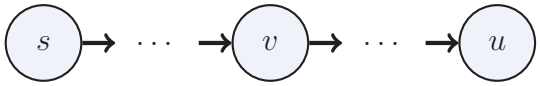
Lemma 3
Der Knoten $u \in U$ mit kleinster topologischer Nummer, ist eine perfekte Wahl dh. $DIST[u] = dist(s, u)$

Beweis (indirekt)
Wähle $u \in U$ mit $topnum[u]$ minimal.
Annahme: $DIST[u] > dist(s, u)$
$\xRightarrow{\text{Lemma 2 b)}}$ $\exists$ Knoten v auf dem kürzesten Pfad von s nach u mit:

1) $DIST[v] = dist(s, v)$
2) $v \in U$



$\Rightarrow topnum[v] < topnum[u]$ ↯
Widerspruch zur kleinsten Wahl von u (kleinste $topnum$ in U)
$\Rightarrow DIST[u] = dist(s, u)$ □

Mögliche Implementierungen:

1) Topsort → Liste aller Knoten in U mit aufsteigenden $topnum$'s
   Durchlaufe diese Knoten
2) Kombinierter Algorithmus aus Topsort und kürzeste Wege

Algorithmus Topsort und kürzeste Wege

```
1  void Topsort(const graph& G, node s, const edge_array<
     int> cost, node_array<int>& Dist){
2      node_array<int> INDEG(G,0);
3      forall_nodes(v,G){
4           INDEG[v] = indeg(v);
5           if(INDEG[v] == 0)
6                ZERO.append(v);
7           DIST[v] = MAXINT;
8      }
9      DIST[s] = 0;
10     while(!ZERO.empty()){
11          u = ZERO.pop();
12          edge e;
13          forall_out_edges(e,u){
14               v = G.target(e);
15               if(--INDEG[v] == 0)
16                    ZERO.append(v);
17               int d = DIST[u] + cost(u,v);
18               if(d < DIST[v])
19                    DIST[v] = d;
20          }
21     }
22 }
```

Listing 4.2: Topsort und kürzeste Wege

Erklärung:
Die Grundstruktur entspricht dem normalen Topsort-Algorithmus (ZERO-Liste). In die innere Schleife wurde die Überprüfung der Δ-Ungleichung eingebaut. Da dieser zusätzliche Aufwand in konstanter Zeit ausführbar ist, ändert sich die Laufzeit von Topsort nicht.
Der Knoten s muss hierbei nicht gesondert behandelt werden, da der Algorithmus von alleine erst richtig startet, wenn s betrachtet wird, da die *dist*-Werte aller anderen Knoten auf $MAXINT$ gesetzt wurden und somit die Δ-Ungleichung nie verletzt wird.

Laufzeit:
$\mathcal{O}(n+m)$ (perfekte Wahl!)

4.5.3 Nicht-negative Netzwerke

In nicht-negativen Netzwerken können Zyklen vorkommen, aber aufgrund der fehlenden negativen Kosten, können keine negativen Zyklen entstehen.

Idee:
Wähle in Zeile 7 des Algorithmus 2 einen Knoten $u \in U$ mit $DIST[u]$ minimal. Dafür eignet sich eine Priority Queue und deren Funktion $PQ.delmin()$.
$\rightarrow$ Dijkstra

Lemma 4
Der Knoten $u \in U$ mit $DIST[u]$ minimal, dh. $DIST[u] = dist(s,u)$, ist eine perfekte Wahl.

Beweis (indirekt)
Annahme: $DIST[u] > dist(s,u) \xRightarrow{\text{Lemma 2 b)}} \exists\ v \in U$ mit $DIST[v] = dist(s,v)$ auf einem kürzesten Pfad von s nach u $(v \neq u)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} dist[s,u] &\geq dist(s,v) && \text{da alle Kosten nicht-negativ sind} \\ &= DIST[v] && \text{nach Lemma 2 b)} \\ &\geq DIST[u] && \text{da u minimal gewählt wurde} \end{aligned}$$

$\Rightarrow dist(s,u) = DIST[u]$ da $DIST$-Werte nie zu klein werden. $\lightning$ Widerspruch

Daher gilt: $DIST[u] = dist(s,u)$ $\square$

Implementierung
Datenstruktur: Priority Queue

LEDA-Datentyp:

i) allgemein: $p\_queue < I, P >$
I = Information, P = Priorität

hier: $I = node$
$P = int$ $DIST$-Werte

ii) Für Graphen: $node\_pq < P > PQ$ (Knoten-Priority-Queue)
PQ = Menge von Knoten mit dazugehörigen Prioritäten

Operationen:

- Konstruktor: $node\_pq < P > PQ(graph\ G)$
  $\rightarrow$ leere PQ für Knoten von G
- $\underline{void}$ $PQ.insert(node\ v,\ P\ p)$ fügt einen Knoten v mit der Priorität p zu PQ hinzu.
- $\underline{node}$ $PQ.delmin()$ entfernt einen Knoten v mit kleinster Priorität und gibt v zurück.
- $\underline{node}$ $PQ.find\_min()$ gibt einen Knoten v mit kleinster Priorität zurück.
- $\underline{void}$ $PQ.decrease\_p(node\ v,\ P\ q)$ vermindert die Priorität von v auf q.
- $\underline{bool}$ $PQ.empty()$ testet, ob PQ leer ist.

Algorithmus von Dijkstra

```
1  void Dijkstra(const graph& G, node s, const edge_array<
       int>& cost, node_array<int>& DIST, node_array<edge>&
        PRED){
2        node_pq<int> PQ(G);
3        node v;
4        forall_nodes(v,G){
5              DIST[v] = MAXINT;
6              PRED[v] = NULL;
7        }
8        DIST[s] = 0;
9        PQ.insert(s,0);
10       while(!PQ.empty()){
11             node u = PQ.del_min(); // perfekte Wahl
12             egde e;
13             forall_out_edges(e,u){
14                   node v = G.target(e);
15                   int d = DIST[u] + cost[e];
16                   if(d < DIST[v]){
17                         if(DIST[v] == MAXINT)
18                               PQ.insert(v,d);
19                         else // v ist in U
20                               PQ.decrease_p(v,d)
21                         DIST[v] = d;
22                         PRED[v] = e;
23                   }
24             }
25       }
26 }
```

Listing 4.3: Dijkstra

Erklärung:
Zuerst wird s in die Priority Queue PQ aufgenommen. Die *while*-Schleife läuft nun so lange, bis PQ leer ist. Ist dies der Fall, ist zu jedem Knoten ein kürzester Weg bekannt. In der *while*-Schleife wird zuerst aus der PQ ein Knoten u gewählt. Dabei wird darauf geachtet, dass es eine perfekte Wahl ist. Dann werden alle von u ausgehenden Kanten betrachtet, die jeweilige Δ-Ungleichung überprüft und falls sie verletzt wurde, der erreichte Knoten entweder in PQ aufgenommen, falls er noch nicht in PQ drin ist oder sonst seine Priorität auf seinen neuen DIST-Wert gesetzt.

Danach wird noch sein $DIST$-Wert angepasst und sein $PRED$-Verweis auf die Kante gesetzt, über die er erreicht wurde.

Laufzeitanalyse:

i) Operationen auf dem Graphen: $\mathcal{O}(n+m)$

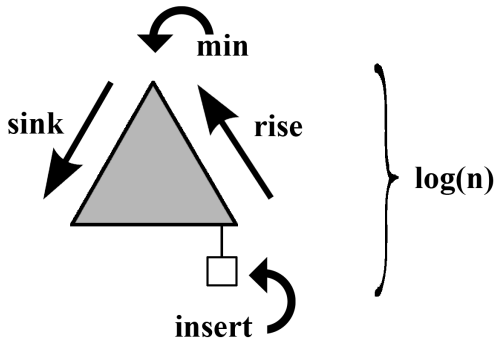
ii) Priority Queue:
$1 \cdot$ Konstruktor
$n \cdot insert()$
$n \cdot delmin()$
$n \cdot empty()$
$m \cdot decrease()$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}\big(n \cdot (T_{insert}(n) + T_{delmin}(n) + T_{empty}(n)) + m \cdot T_{decrease}(n)\big)$
$T_{op}(n) =$ Laufzeit der Operation op auf PQ der Größe n

Varianten von Datenstrukturen:

- binärer Min-Heap
- balancierter Baum

  $\Rightarrow$ Dijkstra $\mathcal{O}((n+m) \cdot log(n))$



Spezielle Heap-Datenstruktur:
Ein Fibonacci-Heap ist eine Menge von binomischen Bäumen. Daher ist der maximale Rang eines Fibonacci-Heaps kleiner gleich $log(n)$, wobei n die Anzahl der Knoten ist. Zudem besitzt der Fibonacci-Heap einen Pointer auf eine Wurzel mit minimaler Priorität. Hier entspricht die Priorität den DIST-Werten. Dadurch ergibt sich der folgende Aufwand:

Amortisierte Analyse:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Insert } \mathcal{O}(1)\\ \text{Delmin } \mathcal{O}(log(n))\\ \text{Decrease } \mathcal{O}(1)\end{array}\right\} \rightarrow \mathcal{O}(n \cdot log(n) + m)$$

5 Maximale Flüsse

5.1 Transport-Problem

Ein Unternehmer möchte täglich möglichst viele seiner Waren von einem seiner Standorte zu einem anderen Standort transportieren. Er nutzt dazu LKW‘s anderer Unternehmen, die zwischen verschiedenen Städten hin und her fahren. Jeder hat eine maximale Kapazität, die er von einer zu einer andern Stadt transportieren kann. Jeder dieser LKW‘s hat allerdings eine maximale Kapazität an Waren, die er transportieren kann. Da es in den einzelnen Städten keine Lagerhäuser gibt, können die Waren nicht zwischengelagert werden, sondern müssen sofort weiter transportiert werden.
Der Ausgangsstandort in diesem Szenario stellt den Startknoten s und der zweite Standort den Endknoten t dar. Die LKW ‘s fahren entlang der Kanten und ihre Kapazität entspricht der Kapazität der jeweiligen Kante.

Frage: Was ist der maximale Fluss von Waren von s nach t?

5.1.1 Formale Definition

Angelehnt an das Buch „Network Flows“ von Ahuja, Magnanti und Orlin.

Gegeben sei

- ein gerichteter Graph $G = (V, E)$
- eine Kapazitätsfunktion $u : E \to \mathbb{R}_0^+$ und
- zwei Knoten $s, t \in V$ mit $s \neq t$.

$u((v, w))$ heißt Kapazität von (v, w). s heißt Quelle (source) und t Senke (target).

Gesucht ist eine Flussfunktion $x : E \to \mathbb{R}_0^+$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Kapazitätsbedingung:
$\forall\, e \in E : 0 \leq x(e) \leq u(e)$

ii) Massenbalance-Bedingung:
Sei $v \in V$ (beliebig aber fest!)

$$\underbrace{\sum_{(v,u)\in E}}_{\substack{\text{gehe über alle}\\ \textbf{ausgehenden}\\ \text{Kanten von v}}} x(v,u) - \underbrace{\sum_{(w,v)\in E}}_{\substack{\text{gehe über alle}\\ \textbf{eingehenden}\\ \text{Kanten von v}}} x(w,v) = \begin{cases} F, & v = s \\ 0, & \forall\ v \in s,t \\ -F, & v = t \end{cases}$$

$F \geq 0$

ii) Optimalitätsbedingung:
F soll maximal sein.

Erklärungen:

i) Für alle Kanten muss gelten, dass ihr Flusswert zwischen Null und ihrer maximalen Kapazität liegt.

ii) Für alle Knoten die nicht s oder t sind, muss gelten, dass alles was in sie rein fließt auch wieder abfließt. Es kann also nichts in diesen Knoten gelagert werden. F entspricht dem Fluss der fließt. Aus dem Knoten s fließt der komplette Fluss F heraus, aber nichts herein. Beim Knoten t ist es genau umgekehrt.

iii) Ohne diese Bedingung wäre das Problem trivial, da der Null-Fluss ($x = 0$) die anderen beiden Bedingungen immer erfüllt.

Notation:
Knoten: i, j
Die Kapazität wird anstatt mit $u((i,j))$ jetzt nur noch mit u_{ij} und die Flussfunktion anstatt mit $x((i,j))$ mit x_{ij} bezeichnet.

5.1.2 Das Restnetzwerk

(residual network)
Ein Restnetzwerk beschreibt mögliche Flussrichtungen.

Definition

Sei x eine aktuelle Flussfunktion, dh. sie erfüllt die Kapazitätsbedingung (z.B. der Nullfluss ($\forall\ i, j\ x_{ij} = 0$)).
Das Restnetzwerk $G(x)$ besteht aus allen Kanten von G und deren Gegenkante. Es existieren also für jede Kante (i, j) aus G zwei Kanten in $G(x)$, nämlich die Kante (i, j) und ihre Gegenkante (j, i). Sie besitzen die Restkapazitäten $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ und $r_{ji} = x_{ij}$.

Die Restkapazitäten beschreiben mögliche Änderungen an der Flussfunktion. Eine Erhöhung geschieht in Richtung der Kante (i, j) (max $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$) und eine Verminderung in die Gegenrichtung (max $r_{ji} = x_{ij}$).