Netzwerkalgorithmen

Wintersemester 2023

Übung 3

Aufgabe 1:
Zeigen Sie an einem Beispiel, dass Dijkstra's Algorithms im Allgemeinen bei Anwesenheit von Kanten mit negativen Kosten (aber ohne negativen Zyklus) nicht korrekt arbeitet. Gibt es Fälle, in denen trotz negativer Kosten das korrekte Resultat erzielt wird ?

Aufgabe 3:
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $cost : E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Kostenfunktion ohne negative Zyklen.

Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $\pi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (ein sogenanntes *Knotenpotential*) existiert mit $cost_\pi(v, w) = cost(v, w) + \pi(v) - \pi(w) \geq 0$ für alle Kanten $(v, w) \in E$. Die so modifizierten Kosten $cost_\pi$ werden auch *reduzierte Kosten* genannt.

Wie könnte man ein solches Knotenpotential π und damit die entsprechenden reduzierten Kosten berechnen. *Hinweis*: Erweitern Sie G um einen Knoten s und geeignete Kanten und berechnen Sie kürzeste Wege in diesem modifizierten Graphen mit dem Bellman-Ford Algorithmus.

Aufgabe 4:
Beim *All-Pairs Shortest Paths Problem* soll $dist(v, w)$ für *alle* Paare $(v, w) \in V \times V$ berechnete werden. Eine triviale Lösung wäre den Bellmann-Ford Allgorithmus n mal anzuwenden mit jedem Konten $s \in V$ als Startknoten. Überlegen Sie sich, wie man die reduzierten Kosten aus Aufgabe 3 verwenden könnte, um das Problem mit n Aufrufen des *Dijkstra* Algorithmus zu lösen. Wie stark verbessert dies die Laufzeit ?