1.2 Algorithmus I: Gift Wrapping.

Intuitiv: Punktmenge wird mit Geschenkpapier eingewickelt.

Zunächst: $S \subset \mathbb{R}^2$. Voraussetzung: $|S| < \infty$

Geo: $CH(S) = p_1 .. p_n$.

1.2.1. Idee:

1) Startpkt p_1 : Pkt mit der kleinsten y-Koordinate.
(Falls mehrere wähle den linkesten. DH. Minimum in p_x - lexikogr. Ordnung.
(Übung : p_1 ist Ecke der Konvexen Hülle).

2) Wie findet man p_2? (Nachfolger von p_1 auf Konv. Hülle).
Betrachte horizontalen Strahl ℓ durch p_1 (nach rechts). Drehen den Strahl gg. den Uhrzeigersinn bis wir einen weiteren Pkt von S treffen. (Ann. $|S| > 1$).
So erhalten wir p_2.
Genauer: $\forall q \in S \setminus \{p_1\}$ sei α_q der Winkel zwischen ℓ und $\overline{p_1 q}$.
Wähle p_2 so, dass α_{p_2} minimal. Falls mehrere Pkte mit minimalen Winkel, wähle den Pkt mit maximaler Entfernung zu p_1.
$\rightsquigarrow$ lineare Suche in S nach Minimum bzgl. oben definierter Ordnung.

3) Setze Algor. bei p_2 fort, dh. ℓ wird nun der Strahl, der
- in p_2 beginnt.
- in Richtung $p_1 p_2$ zeigt

$\rightsquigarrow$ Suche Minimum in $S \setminus \{p_1, p_2\}$.

4) Wiederhole bis p_1 wieder erreicht wird.

1.2.2. Korrektheit : Übung.

1.2.3. Laufzeit: $CH(S) = p_1 .. p_R$, $|S| = n$.

p_1: lineare Suche in S kostet $O(n)$ (lin. Suche nach Min. bzgl. p_y)

$p_2 .. p_R$: lin. Suche in S kostet $O(n)$ (lin. Suche nach Winkelordnung).

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit: $O(R \cdot n)$.

1.2.4 Satz:

Sei S eine Menge von n Pkten im $\mathbb{R}^2$ und R die Zahl der Ecken der Konvexen Hülle $CH(S)$. Dann kann $CH(S)$ in Zeit $O(R \cdot n)$ berechnet werden. Bew. siehe oben.

1.2.5. Bem: $R \in \{1..n\}$

Worst Case: $R = n$ (zB. alle Pkte aus S liegen auf einem gemeinsamen Kreis, das Innere ist leer). $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(n^2)$.

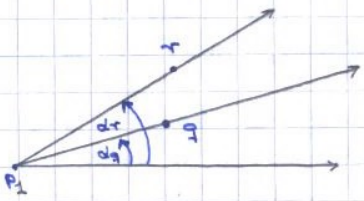
Bester Fall: $R = \text{const.} \Rightarrow$ Laufzeit: $O(R \cdot n) = O(n)$.

1.2.6. Details der Implementierung:

1) Wie findet man Pkt q so, dass α_q minimal ist?

$\rightsquigarrow$ Wir müssen Winkel vergleichen.

```
q ← undefiniert
α_q ← ∞
forall p ∈ S \ {p_1} do
    if α_p < α_q then
        q ← p
        α_q ← α_p
    fi
od
```



Im Allg. 3 Pkte p, q, r $\rightarrow$ vergleiche Winkel

Naiv: Berechne Winkel aus Koordinaten der Pkte mit trigonometrischen Fktnen.

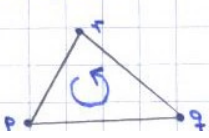
$\Rightarrow$ Nachteile:
- Langsam
- Präzisionsprobleme
- Robustheitsproblem (Definitionsbereich der trigonometrischen Fktnen ist eingeschränkt).

$\Rightarrow$ Besser: Andere Betrachtungsweise:

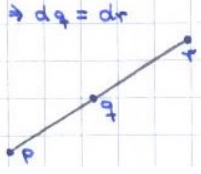
Dazu betrachte Dreieck p, q, r

Drei mögliche Orientierungen:

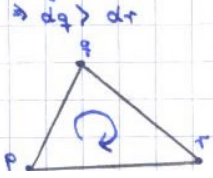
a) positiv orientiert (left-turn) $\Rightarrow \alpha_q < \alpha_r$



b) Orientierung 0 (collinear) $\Rightarrow \alpha_q = \alpha_r$



c) negativ orientiert. (right-turn) $\Rightarrow \alpha_q > \alpha_r$



Allgemein: Seien $p=(p_x,p_y)$, $q=(q_x,q_y)$ und $r=(r_x,r_y)$ drei Pkte im $\mathbb{R}^2$.
Sei $\vec{p}$ der Vektor, der vom Nullpkt ausgeht und in Richtung p zeigt. Und seien $\vec{q}$ und $\vec{r}$ Vektoren, die von p ausgehen und in Richtung q bzw. r zeigen.
Betrachte nun das Parallelogramm, welches durch die Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{r}$ aufgespannt wird. Sei $V(P)$ = die Fläche des Parallelogramms.
Beh.: $V(P) = |\det A|$, wobei $A = \begin{pmatrix} q_x-p_x & q_y-p_y \\ r_x-p_x & r_y-p_y \end{pmatrix}$

Bem.: diese Beh. überträgt sich auch auf $\mathbb{R}^n$.
Man betrachte hierbei $u_1..u_n \in \mathbb{R}^n$ und $P = \{u_1a_1+..+u_na_n : 0\le a_i\le 1, i\in\{1..n\}\}$.
$\Rightarrow V(P) = |\det A|$, A entsprechend.

Wir betrachten Δpqr:

↳ **1.2.6.1 Satz**: $p,q,r\in\mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} q_x-p_x & q_y-p_y \\ r_x-p_x & r_y-p_y \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ (i) $|\det A|$ = 2. Fläche von Δpqr.
(ii) sign(det A) gibt die Orientierung an:
-1: neg. orientiert (right turn)
0: collinear.
$+1$: pos. orientiert (left turn).

Beweis siehe Fernrohrer.

↳ **1.2.6.2 Def**: Wir definieren das geometrische Prädikat:

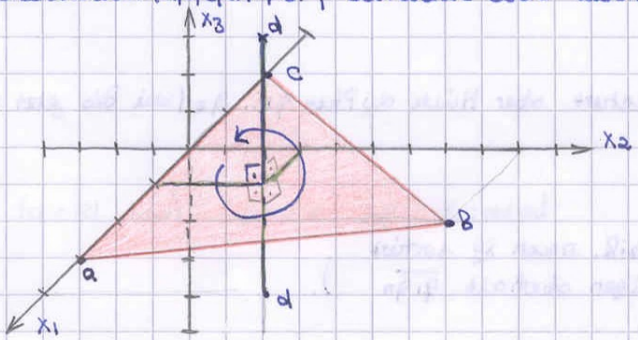
$$\text{orientation}(p,q,r) = \text{sign}\begin{vmatrix} p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \\ r_x & r_y & 1 \end{vmatrix} \left(= \text{sign}\big((q_x-p_x)(r_y-p_y)-(r_x-p_x)(q_y-p_y)\big)\right.$$

Dh. orientation(p,q,r) und damit der Test $d_r < d_q$ kann mit zwei Multiplikationen und fünf Subtraktionen berechnet werden.

2) Falls $d_r = d_q$ (dh. orientation$(p,q,r)=0$), müssen wir herausfinden, welcher der Pkte q oder r weiter von p entfernt liegt.
Naiv: Berechne Distanzen (mit eukl. Metrik):
$\text{dist}(p,q) = \sqrt{(p_x-q_x)^2+(p_y-q_y)^2}$
$\rightsquigarrow$ Nachteil: Wurzel!
$\Rightarrow$ Besser: Vergleiche Quadrate der Distanzen:
$(p_x-q_x)^2+(p_y-q_y)^2 \overset{?}{\lessgtr} (p_x-r_x)^2+(p_y-r_y)^2$?
($\rightsquigarrow$ 4 Subtraktionen, 4 Multiplikationen, 2 Additionen).

1.2.7. Übertragung auf höhere Dimensionen:

Das Orientierungsprädikat kann auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.
Insbesondere im $\mathbb{R}^3$: seien $a,b,c,d\in\mathbb{R}^3$
orientation$(a,b,c,d)\in\{-1,0,1\}$
Sei orientation$(a,b,c,d)\neq 0$, betrachte Ebene durch a,b,c.



↳ **1.2.7.1 Satz**: Für $a,b,c,d\in\mathbb{R}^3$ betrachte Ebene durch a,b,c.
Falls orientation $\neq 0$, so gilt:
(i) orientation$(a,b,c,d)=-1$, wenn von d aus $\Delta a,b,c$ negativ orientiert ist.
orientation$(a,b,c,d)=+1$, wenn von d aus $\Delta a,b,c$ positiv orientiert ist.
(ii) $$\text{orientation}(a,b,c,d) = \text{sign}\begin{vmatrix} a_{x_1} & a_{x_2} & a_{x_3} & 1 \\ b_{x_1} & b_{x_2} & b_{x_3} & 1 \\ c_{x_1} & c_{x_2} & c_{x_3} & 1 \\ d_{x_1} & d_{x_2} & d_{x_3} & 1 \end{vmatrix}$$

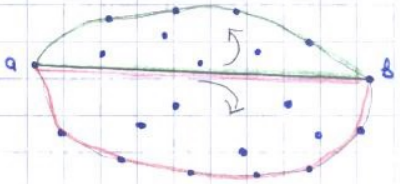
1.3. Algorithmus II: Graham's Scan.

1.3.1. Idee: Berechne "obere" und "untere" Hülle getrennt.

Sei a der linkeste und b der rechteste Pkt von S, dh. a = Minimum bzgl. x-y-Sortierung und b = Maximum bzgl. xy-Sortierung.

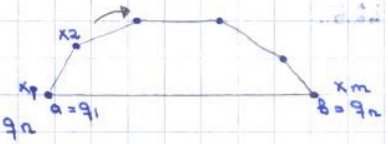
Obere Hülle = Der Teil von CH(S), der oberhalb von $\overline{ab}$ liegt (inclusive a,b). $= CH(S_1), S_1 \subset S$.

Untere Hülle = Der Teil von CH(S), der unterhalb von $\overline{ab}$ liegt (incl. a,b) $= CH(S_2), S_2 \subset S$.



Beobachtung: $S_1 = \{p \in S : \text{orientation}(a,b,p) \geq 0\}$
und $S_2 = \{p \in S : \text{orientation}(a,b,p) \leq 0\}$.

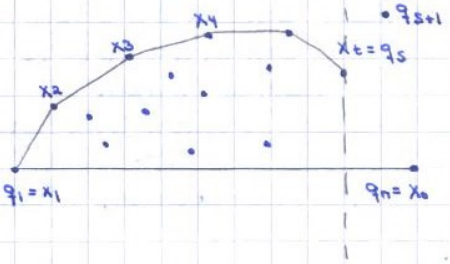
Sei S_1 lexikografisch nach xy-sortiert ($\to n \log n$)
$\rightsquigarrow$ sortierte Folge $q_1 \dots q_n = S_1$
$\Rightarrow a = q_1$ und $b = q_n$
Berechne obere Hülle als Teilfolge $x_1 .. x_m$ von $q_1 .. q_n$ (dh. im Uhrzeigersinn).



Beobachtung:
1. Jeweils drei aufeinanderfolgende Ecken x_i, x_{i+1}, x_{i+2} bilden einen Rightturn, dh. orientation $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) < 0$.
2. (b,a,p) ist Rightturn $\forall p \in S_1$.
(dh. $\forall p \in S_1$: orientation $(q_n, q_1, p) < 0$).

1.3.2. Algorithmus:

verwalte stack $x_0, x_1 .. x_t$ von potentiellen Ecken der oberen Hülle.
Am Ende: genau die Ecken der oberen Hülle.
Initialisierung: stack $S = q_n, q_1, q_2$. Bem: alle drei Pkte wg. lexik. Sort. genau festgelegt und müssen nicht gesucht werden.
Schleife: Betrachte nur $q_3 .. q_{n-1}$.
Sei q_s aktueller Pkt
Invariante: $x_0, x_1 .. x_t$ ist Teilfolge von $q_n, q_1 .. q_s$



mit: 1) $t \geq 2$, $x_0 = q_n$, $x_1 = q_1$, $x_t = q_s$
besser x_1 statt x_0 2) $x_0 x_1 .. x_t$ ist konvexes Polygon
3) obere Hülle von S ist Teilfolge von $x_1 .. x_t\, q_{s+1} .. q_n$.

Schritt: $s \mapsto s+1$
while (x_{t-1}, x_t, q_{s+1}) nicht Rightturn do
pop (x_t)
od
push (q_{s+1}).

Beobachtung: stack speichert obere Hülle der Pkte $q_1 .. q_s$ (die bis jetzt gewesen).

Die Funktion:
UPPER_HULL $(q_1 .. q_n)$ besser: $q_1 .. q_m \Rightarrow b = q_m$ (weil $|S| = n$)
(Vorbed. 1). $q_1 .. q_n$ lexik. nach xy sortiert
2) $q_2 .. q_{n-1}$ liegen oberhalb $\overline{q_1 q_n}$).
Stack von Pkten. S
(stack <point> S_i)
S.push (q_n);
S.push (q_1);
S.push (q_2);
(Ann. $n \geq 2$).

→

```
for s=3 to n-1 do
    x ← S.top();          gibt das oberste Element an.
    y ← S.top_pred();     eins unter dem obersten auf dem Stack
    while orientation (y, x, q_s) ≥ 0 do
        S.pop();
        x ← y;
        y ← S.top_pred();
    od
    S.push (q_s)
od
return S.
```

While-Schleife terminiert spätestens, wenn S nur noch die Pkte q_n, q_1 enthält. (weil alle Pkte $q_2 .. q_{n-1}$ oberhalb von $\overline{q_1 q_n}$ liegen.).

1.3.3. Beispiel für die Pkt:

Anfang: Stack $q_6 q_1 q_2$.

$s = 3$

$x = q_2 \wedge y = q_1$

orientation $(q_1 q_2 q_3) = -1$

$\Rightarrow$ Stack $q_6 q_1 q_2 q_3$

$s = 4$

$x = q_3 \wedge y = q_2$.

orientation $(q_2 q_3, q_4) = -1 \Rightarrow$ Stack $q_6 q_1 q_2 q_3 q_4$

$s = 5$

$x = q_4 \wedge y = q_3$

orientation $(q_3 q_4 q_5) = +1 \Rightarrow$ stack $q_6 q_1 q_2 q_3$, $x = q_3, y = q_2$

orientation $(q_2 q_3 q_5) = -1 \Rightarrow$ stack $q_6 q_1 q_2 q_3 q_5$

fertig!

1.3.4. Korrektheit.

(1) Invariante ist stets erfüllt.

Zeige mit Induktion, dass Invariante stets erfüllt ist.

Ind.anf: $S = q_n q_1 q_2$

$x_0, x_1, x_2 = q_n q_1 q_2$ mit 1) $t = 2$, $q_n = x_0$, $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$

2) $x_0 x_1 x_2$ konv. Polygon

3) obere Hülle von S ist TF von $x_0 x_1 x_2 q_3 \ldots q_{n-1}$.

Ind.ann: die Invariante sei für $x_0 x_1 .. x_t$ erfüllt $(t \in \mathbb{N})$.

Indbeh: Sei q_s der nächste Pkt bzgl. der lex.Kogr. Sortierung.

Wenn orientation $(x_{t-1}, x_t, q_s) = -1$ dann ist die Beh. trivialerweise erfüllt.

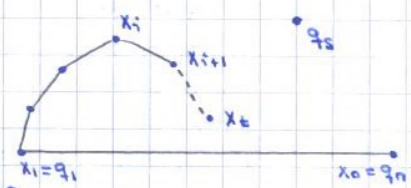
Sei also orientation $(x_{t-1}, x_t q_s) \in \{1, 0\}$

z.z. $x_0 \ldots x_t$ ist TF von $q_n q_1 .. q_s$ mit

1) $t \geq 2$, $x_0 = q_n$, $x_1 = q_1$, $x_t = q_s$

2) $x_0 .. x_t$ konv. Polygon

3) obere Hülle von S ist TF von $x_1 .. x_t q_{s+1} .. q_n$.



$\Rightarrow S = x_0 x_1 .. x_{t-1}$

... wird so lange gepopt bis orientation $(y, x, q_s) < 0$.

überall x_1.

$\Rightarrow S = x_0 x_1 .. x_i$

S.push $(q_s) \Rightarrow S = x_0 x_1 .. x_i x_t$, wobei $x_t := q_s$

$\Rightarrow x_0 x_1 .. x_i x_t$ ist TF von $q_n q_1 \ldots q_s$

zu i) $\underbrace{t \geq 2}$, $x_0 = q_n$, $x_1 = q_1$ und $x_t = q_s$ nach Def. $\Rightarrow$ ok.
weil $(x_0 x_1 q_s)$ Rightturn $\Rightarrow i \geq 1 \Rightarrow t \geq 2$.

zu 2). Folge $x_0 .. x_i$ unverändert und (x_{i-1}, x_i, q_s) bilden Rightturn

$\Rightarrow x_0 .. x_i x_t$ auch konvexes Polygon.

zu 3) Pkte $x_{i+1} .. x_{t-1}$ wurden entfernt. Sie gehören nicht zu oberen Hülle, da sie rechts von (oder auf) Strecke $\overline{x_i q_s}$ liegen. $\Rightarrow$ ok.

$\Rightarrow$ Beh.

(2). Bei Termination enthält Stack S die obere Hülle.

Voraussetzung: die Invariante ist für den letzten Pkt ($s=n$) erfüllt.

d.h. alle Pkte sind abgearbeitet.

Wissen also: $x_1 .. x_t$ ist TF von $q_1 .. q_n$ mit bsp: läuft ab 1, weil $x_0 = x_t = q_n$.

1) $t \geq 2$, $x_0 = q_n$, $x_1 = q_1$ und $x_t = q_n$

2) $x_1 .. x_t$ konv. Polygon

3). obere Hülle ist TF von $x_1 .. x_t$.

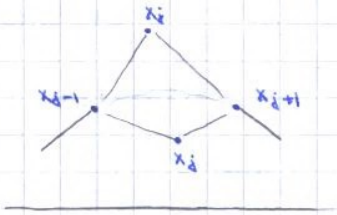
z.z. obere Hülle $= x_1 .. x_t$ also nicht echte Teilmenge.

Ann: nein, obere Hülle $\subset x_1 .. x_t$

$\Rightarrow \exists\, x_j \in \{x_1 .. x_t\}$ mit $x_j \notin$ obere Hülle

$\rightarrow$ 1.Fall: orientation $(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = +1$ $\Rightarrow$ ↯ zu 2)

2.Fall: orientation $(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = -1$ $\Rightarrow$ ↯ zu 2).



$\Rightarrow$ Ann. falsch

$\Rightarrow$ Beh.

1.3.5. Laufzeit:

Beobachtung: Jeder Pkt kann höchstens einmal aus S entfernt werden.

Rumpf hat Kosten $O(1)$ (orientation, konstante Zahl von stack-Operationen).

Da jeder Pkt höchstens einmal aus S entfernt werden kann $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ while-Schleife wird höchstens n mal eingetreten } $\Rightarrow$ forschleife kostet uns $O(n)$.

In der while-Schleife konst. Operationen, außerhalb auch }

$\Rightarrow$ Gesamtkosten der UPPER-Pkt : $O(n)$.

(Analog berechnet man die untere Hülle).

Die Funktion insgesamt:

CONVEX_HULL(S)		
1. S.sort(xy);	$O(n \log n)$	$(\lvert S\rvert = n)$
a ← S.min();	$O(1)$	
b ← S.max();	$O(1)$	
2. forall $p \in S$ do eigentlich $S \setminus \{a,b\}$		
3. if (orientation(a,b,p) > 0) S_1.append(p)	$O(n)$	(S_1, S_2 Listen $\Rightarrow$ append kostet $O(1)$, n x $\Rightarrow O(n)$)
4. if (orientation(a,b,p) < 0) S_2.append(p)		
5. od		
6. S_1.push(a);	$O(n)$	(falls S_1 Liste $\Rightarrow$
S_1.append(b);	$O(1)$	einfügen am Ende kostet $O(n)$)
7. S_2.push(a);	$O(n)$	
S_2.append(b);	$O(1)$	
8. H_1 ← UPPER_HULL(S_1)	$O(m) = O(n)$	
9. H_2 ← LOWER_HULL(S_2)	$O(n-m) = O(n)$	
10. H_1 umdrehen	$O(n)$	
11. H_2 an H_1 anhängen	$O(1)$	
12 doppeltes Vorkommen von a/b löschen.	$O(n)$	

Zusammenfassung:

CONVEX_HULL(S)	Zeit:
1) Sortiere S lexik.	$O(n \log n)$
2) a ← min ∧ b ← max	$O(1)$
3) $S_1 \leftarrow \{p \in S : b,a,p$ Rechtsturn $\} \cup \{a,b\}$	$O(n)$
4) $S_2 \leftarrow \{p \in S : b,a,p$ Linksturn $\} \cup \{a,b\}$	$O(n)$
5) UPPER_HULL(S_1)	$O(n)$
6) LOWER_HULL(S_2)	$O(n)$
7) " Zusammenkleben	$O(n)$

1.3.6. Satz: Sei S Menge von n Pkten im $\mathbb{R}^2$.
a) CH(S) kann in Zeit O(n log n) berechnet werden (worst case)
b) Falls S lexik. nach xy-Koord. sortiert ist, dann kann CH(S) in Zeit O(n) berechnet werden.

Bew. siehe oben.

1.3.7. Bemerkung:
1) Alg. optimal, da CH-Problem (i.a.) genauso schwierig ist wie sortieren.
Bew. Übung.
2). obere Bzw. untere Hülle sind auch für sich alleine wichtig (für bestimmte Probleme)
3). Optimalität gilt für worst case; es gibt Situationen, in denen Alg. I. besser ist (wenn # Ecken von CH(S) < log n).

1.3.8. Varianten von Graham's Scan:
a) siehe Übung
b). untere u. obere Hülle gleichzeitig berechnen
c). Berechnung der gesamten Hülle in einer Phase.

Idee: 1. Sortiere $S = p_1 .. p_n$.
2. Allgemeiner Schritt:
Bearbeite p_i, $i = 4..n$.
Situation: $C_{i-1} := CH(\{p_1 .. p_{i-1}\})$ ist berechnet.
p_{i-1} ist maximal in $\{p_1 .. p_{i-1}\}$
$\Rightarrow p_{i-1}$ ist die rechteste Ecke von C_{i-1}.
$\Rightarrow \overline{p_{i-1} p_i} \cap C_{i-1} = \{p_{i-1}\}$.

Der eigentliche Schritt:
Berechne Berührpkte t und b der beiden Tangenten von p_i an C_{i-1}.
Genauer: $t \leftarrow p_{i-1}$ d.h. orientation$(p_i, t, succ(t)) \leq 0$
while $(p_i, t, succ(t))$ nicht Rechtsturm do
$t \leftarrow succ(t)$
od
$b \leftarrow p_{i-1}$ d.h. orientation$(p_i, b, pred(b)) \geq 0$
while $(p_i, b, pred(b))$ nicht Rechtsturm do
$b \leftarrow pred(b)$
od

Bea: Die ähnliche Argumentation:
die # unterwegs besuchten Pkte kann in $\Omega(n)$ liegen,
aber jeder von ihnen wird anschließend aus der konvexen Hülle entfernt und kann danach nie wieder als Eckpkt in Erscheinung treten
Also wird er auch nie wieder besucht
$\Rightarrow$ Es kann insgesamt höchstens n Besuche geben
$\Rightarrow$ O(n log n) Laufzeit

Nachdem wir nun b und t berechnet haben:
- Entferne alle Pkte zwischen b und t
- Füge p_i nach C_i ein.

Weitere Implementierungsdetails und Laufzeitanalyse siehe 3. Übung.
Bsp. zu c) siehe Hemdordner.

1.4. Algorithmus III: Devide & Conquer.

Triangulierung schauen

1.4.1. Spezialfall: Konvexe Hülle von zwei konvexen Polygonen P und Q.
$P = p_1 .. p_m$, $Q = q_1 .. q_\ell$, Ecken gg. Uhrzeigersinn sortiert.
Aufgabe: Berechne $CH(P \cup Q)$
Triviale Lsg: Graham's Scan auf die Menge aller Ecken. O(n log n)
Bessere Lsg: Ausnutzen der Polygonstruktur. O(n),
1) Finde Sortierung aller Ecken in Zeit O(n) } O(n)
2) Berechne die Hülle in Zeit O(n) (siehe S.1.3.6.8.). }
zu 1): Betrachte P:
i) Finde extreme Ecken a und B in Zeit O(m)
L_2 := untere Polygonzug
starte bei a und laufe gg. Uhrzeigersinn über P bis B erreicht ist.
L_1 := obere Polygonzug
laufe von b nach a. und drehe um.