

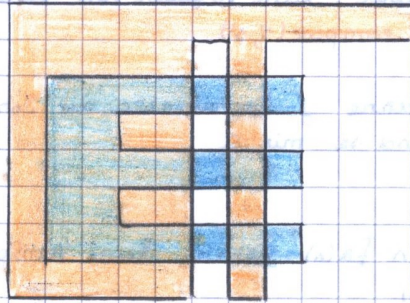
3.3 Erste Anwendung von Plane Sweep:

→ Schnitt von beliebigen Polygonen.

- setzt sich zusammen aus Flächen der planaren Unterteilung.
- Flächen können best. boolesche Operationen zugeordnet werden.

→ Bestimmung der planaren Unterteilung

→ Übung (Konstruktion des Graphen...)



3.4 Zweite Anwendung von Plane Sweep:

→ Berechnung des Voronoi-Diagramms.

3.4.1 Einführung:

→ 3.4.1.1. Voronoi-Diagramm:

- (wichtigste geom. Struktur)
- $\subseteq \mathbb{R}^2$
- Datenstr. zur Lsg. des sog. "Post Office P"

→ 3.4.1.2. Problem:

Geg: Menge S von n Orten in einer Ebene (z.B. Postämter)

Aufgabe: Finde $\forall p \in \mathbb{R}^2$ den Ort $x \in S$, so, dass $\text{dist}(p, x)$ minimal.

→ 3.4.1.3. Mögl. Variationen:

Orte: Pkte, Segmente, Kreise, Polygone

Abstand: • Euklidischer

- Manhattan-Metrik
- L_∞
- gewichtet

...

Wir betrachten hier pktförmige Orte mit dem eukl. Abstand im \mathbb{R}^2 .

→ 3.4.1.4. Idee:

1) Berechne für jeden Ort $x \in S$ das Gebiet aller Pkte, deren Abstand zu x kleiner oder gleich ist als zu allen anderen Orten.

→ man bekommt eine planare Unterteilung und diese heißt Voronoi-Diagramm von S .

2) Teste für Eingabepkt $p \in \mathbb{R}^2$, in welchem Gebiet des Voronoi-Diagramms er liegt

→ Teilproblem: Point-Location.

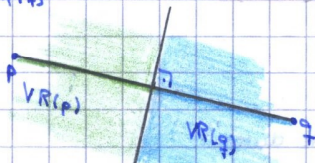
3.4.2. Voronoi-Diagramm:

→ 3.4.2.1. Definition: Geg $S = \{x_1, \dots, x_n\}$.

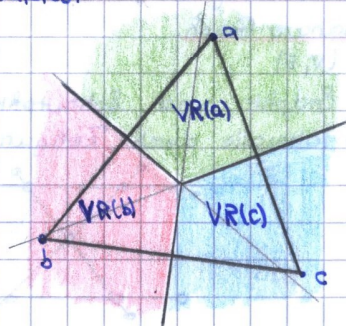
$VR(x_i) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x_i) \leq \text{dist}(p, x_j), \forall x_i \neq x_j\}$ heißt Voronoi-Region für x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$)

→ 3.4.2.2. Beispiele:

a) $S = \{p, q\}$



b) $S = \{a, b, c\}$



→ 3.4.2.3 Bem: Allgemein für $x, y \in S$ ist $H(x, y) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, y)\}$ ein Halbraum bzw. Halbebene definiert durch Mittelsenkrechte.
 Dann ist \forall Orte $x \in S: VR(x) = \bigcap_{y \in S, y \neq x} H(x, y)$ Schnitt von Halbkugeln.

⇒ $VR(x)$ ist konvexes Polygon.

→ 3.4.2.4 Definition: Das Voronoi-Diagramm für eine Menge S von n Orten $VD(S)$ ist die planare Unterteilung der Ebene, die durch die Menge der Voronoi-Regionen $VR(x), x \in S$, definiert wird.

→ Graph dessen Flächen die Voronoi-Regionen darstellen.

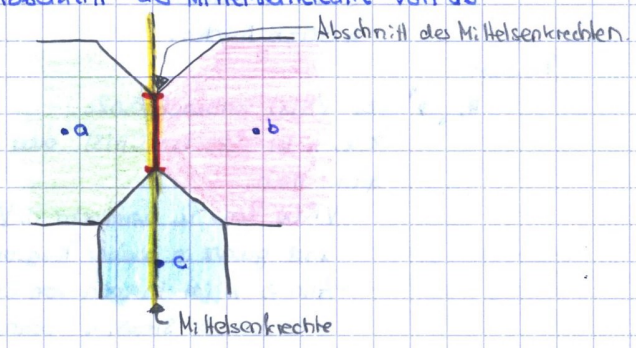
→ 3.4.2.5 Def: Voronoi-Knoten:

def. durch mind. drei Orte a, b, c zu denen sie gleichen Abstand haben

⇒ sie sind Mittelpkte von Kreisen durch a, b, c .

Voronoi-Kanten:

def. durch zwei Orte a, b ; Abschnitt der Mittelsenkrechte von \overline{ab}

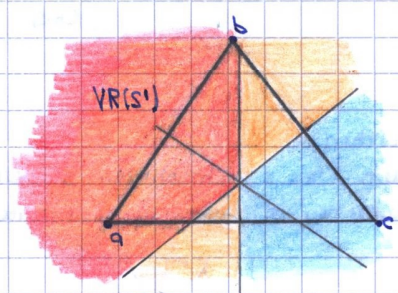


→ 3.4.2.6 Bem:

Verallgemeinerung für Mengen $S' \subseteq S$:

$$VR(S') = \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, y) \forall x \in S' \wedge y \in S \setminus S'\} = \bigcap_{x \in S'} H(x, y)$$

→ 3.4.2.7 Bsp: $S = \{a, b, c\}, S' = \{a, b\}$.



$$VR(S') = \{p : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, c), x \in S'\}$$

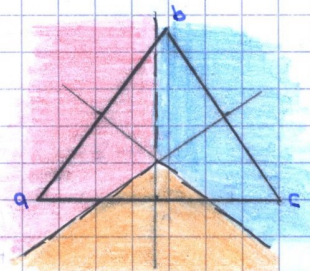
→ 3.4.2.8 Def:

Voronoi-Diagramm der Ordnung k $k \leq n$

$$VD_k(S) := \{VR(S') : S' \subseteq S \text{ mit } |S'| = k\}$$

→ 3.4.2.9 Bsp:

$S = \{a, b, c\}$
 $k = 2$

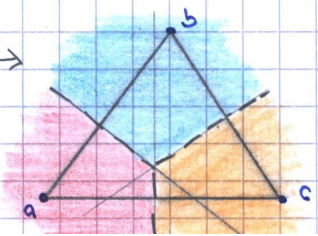


$$\Rightarrow VD_2(S) := \{VR(S') : S' \subseteq \{a, b, c\}, |S'| = 2\}$$

← $VD_2(S)$ $VD_2(S) = \{\text{Mengen } VR(S')\}$

beachte den Unterschied!

Dies ist $VD_1(S)$!



← VR 'en
 Jede einzelne $VR = \{\text{Pkte } p : \dots\}$

→ 3.4.2.10 Spezialfälle:

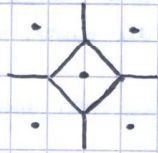
1) "normales" Voronoi-Diagramm: $VD(S) = VD_1(S)$. [closest point VD]

2) VD_{n-1} [farthest point VD]

↑ Voronoi-Regionen sind hier Mengen von Pkten, die von einem Ort weitest entfernt sind als von allen anderen.

Ab jetzt: $VD(S) = VD_1(S)$

Typisches Bsp:



→ 3.4.2.11 Lemma:

a) \forall Orte $x \in S$ gilt: $VR(x)$ ist unbeschränkt $\Leftrightarrow x$ ist Ecke von $CH(S)$ oder auf dem Rand von $CH(S)$

b) Voronoi-Diagramm für n Orte hat:

$\leq 2n-4$ Knoten

$\leq 3n-6$ Kanten.

(?)

Beweis:

a) \Rightarrow " sei $VR(x)$ unbeschränkt.

z.z. x ist Ecke von $CH(S)$ oder auf Rand von $CH(S)$

Ann.: nein.

$VR(x)$ konv u. unbeschr. n.V. $\Rightarrow \exists$ Strahl s , der in x startet

hier notwendig, dass x nicht auf Kante! \rightarrow und ganz in dieser Region $VR(x)$ verläuft.

Ann $\Rightarrow x$ im Inneren von $CH(S)$

S endlich \Rightarrow Strahl s schneidet den Rand von $CH(S)$ in einer Kante (y,z) oder in Pkt $z=y$. (da $CH(S)$ auch dann endlich)

$\exists p \in s$ (genügend weit entfernt von x), der näher zu y oder z ist als zu x

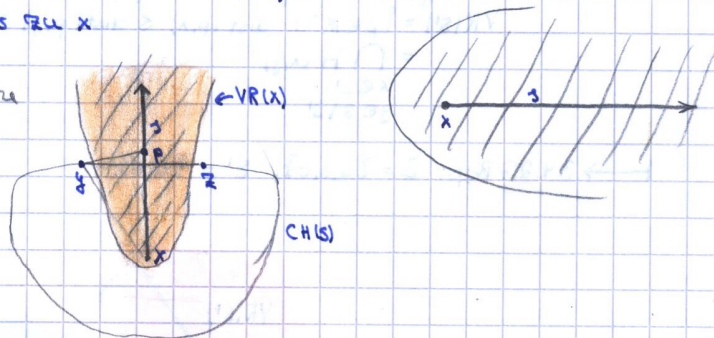
$\Rightarrow z$ zu $p \in VR(x)$

dh. z zu z : das orangefarbene

ist $VR(x)$

dh. z zu $VR(x)$ ist

unbeschränkt.



\Rightarrow Beh

" \Leftarrow Sei nun x Ecke von $CH(S)$.

Betrachte Kegel K zwischen den Senkrechten auf dem zu x betrachteten Kanten.

Alle Pkte in K liegen näher zu x als zu allen anderen Orten.

$\Rightarrow K \subseteq VR(x)$

$\Rightarrow VR(x)$ unbeschränkt

(da K unbeschränkt)

Sei nun x auf dem Rand von $CH(S)$

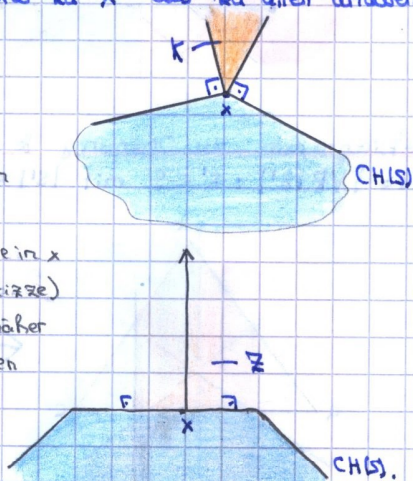
Betrachte senkrechte Gerade die in x startet und hoch zeigt (wie Skizze)

Alle Pkte auf Gerade G liegen näher zu x als zu allen anderen Orten

$\Rightarrow G \subseteq VR(x)$

$\rightarrow VR(x)$ unbeschränkt

(da K unbeschränkt)

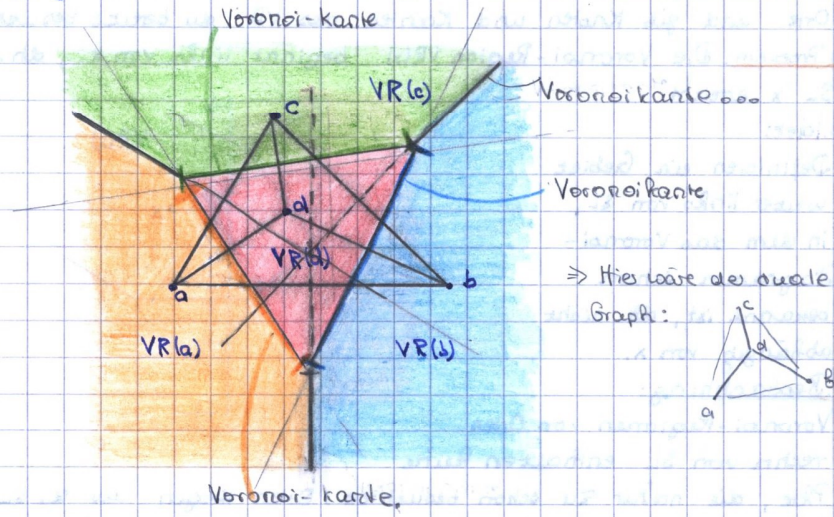


b). VD ist ein Graph, das \mathbb{R}^2 in Voronoi-Regionen unterteilt.

(\rightarrow Voronoi-Knoten + Voronoi-Kanten).

Sei $G=(V,E)$ der duale Graph zu VD(S), d.h.

$V=S$ (allg. Flächen (Regionen)) und $(x,y) \in E \Leftrightarrow VR(x)$ und $VR(y)$ haben gemeinsame Voronoi-Kante.



G ist ein planarer Graph und jede Kante $e \in E$ entspricht genau einer Voronoi-Kante (siehe Konstruktion von G).

(c,d) entspricht grün, (a,d) entspricht orange und (b,d) entspricht blau.

Graphentheorie \Rightarrow Jeder planare Graph mit n Knoten hat maximal $3n-6$ Kanten.

\Rightarrow Voronoi-Kanten $\leq 3n-6$.

Außerdem hat jeder Voronoi-Knoten mind. Grad 3 (da er durch mind. drei Orte definiert wird, von denen er gleiche Distanz hat).

$\forall v \in V: \text{Grad}(v) \geq 3$

$\Rightarrow \forall v \in V, |v|=1: \text{Grad}(v) \geq 3$

$\Rightarrow \forall v \in V: 3 \cdot |v| \leq \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow \sum_{v \in V} 3 \cdot |v| \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow 3 \cdot \# \text{Knoten} \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$

\Rightarrow Es gilt: $\sum_{v \in V} \text{grad}(v) \geq 3 \cdot \# \text{V-Knoten} \wedge \sum_{v \in V} \text{grad}(v) = 2 \cdot |E|$

$\Rightarrow 3 \cdot \# \text{V-Knoten} \leq \sum \text{grad}(v) = 2 \cdot |E| \leq 2 \cdot (3n-6) = 6n-12$

$\Rightarrow \# \text{V-Knoten} \leq 2n-4$

3.4.2.12 Bemerkungen:

1). VD für n Orte hat lineare Größe in n .

2). Sei $G=(V,E)$ dualer Graph zu VD(S), d.h. $V=S$ und $(x,y) \in E \Leftrightarrow VR(x)$ und $VR(y)$ haben gemeinsame Voronoi-Kante. \checkmark

G heißt Delaunay-Triangulierung.

Eigenschaften: Jeder Umkreis eines Dreiecks enthält keinen Ort in seinem Inneren.

Bea: Gemeinsame Rand von zwei VR'nen heißt Voronoi-Kante

Und Endpunkte von Voronoi-Kanten sind die Voronoi-Knoten

$\Rightarrow v$ Vor. Knoten $\Rightarrow \exists$ Orte a, b, c mit v Mittelpunkt von Kreis durch a, b, c



\Rightarrow Besser: andere Definition als 3.4.2.5!

B4.3. Konstruktion von Voronoi-Diagrammen durch einen Plane Sweep Algorithmus.

Zunächst: allg. Lage der Orte

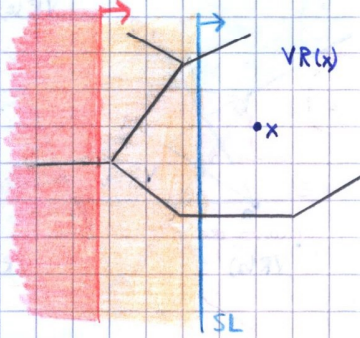
- keine 4 Orte liegen auf einem gemeinsamen Kreis
- paarweise verschiedene x-Koordinaten aller Orte und Events.

→ 3.4.3.1. Ziel: Bewege Senkrechte SL von links nach rechts über die Menge der Orte und gib Knoten und Kanten des VD ab bereits besuchten Orte aus.

→ 3.4.3.2. Problem: Die Voronoi-Region $VR(x)$ beginnt links von x , d.h. bevor SL x erreicht.

→ 3.4.3.3. Idee:

Definieren ein Gebiet weiter links von SL, in dem das Voronoi-Diagramm schon bekannt ist, d.h. nicht abhängig von x .



→ 3.4.3.4. Beobachtung:

Voronoi-Regionen von Orten rechts von SL enthalten keine Pkte, die näher zu schon besuchten Orten liegen als zu SL. Denn sonst würde ein solcher Pkt (unabh. von SL) näher zu einem anderen Ort liegen. Abstand zu SL ist nicht größer als Abstand zum nächsten Ort.

→ 3.4.3.5. Frage:

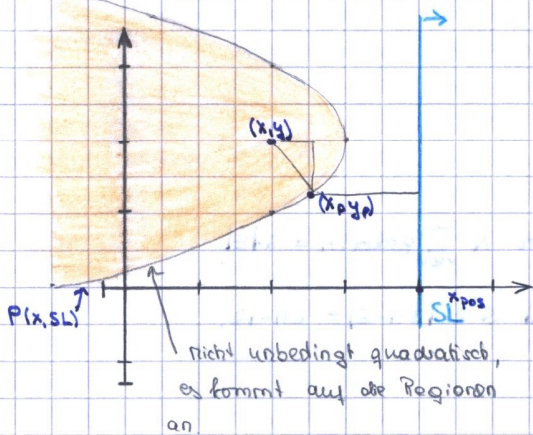
Betrachte das Gebiet $L := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, SL)\}$ für einen schon besuchten Ort x .

⇒ Voronoi-Diagramm von S im Gebiet L hängt nicht von Ort x rechts von SL ab.

Welche Form hat L ?

→ 3.4.3.6. Beispiele: $S' \leftarrow$ Menge der besuchten Orte.

1) S' besteht aus einem Ort x .



nicht unbedingt quadratisch, es kommt auf die Regionen an

→ Inneres der Parabel $P(x, SL)$

ist die Menge der Pkte mit gleicher Distanz zu x und SL .

(x, y) und SL bekannt

Wie sieht L aus?

→ Es muss gelten $\forall (x_p, y_p) \in L$:

$$(x_p - x_{pos})^2 \leq (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2$$

weil es muss eigentlich gelten:

$$x_p - x_{pos} = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}$$

→ $(x, y) = (2, 2)$, $SL \equiv 4$ bekannt

$$\Rightarrow (x_p - 4)^2 = (x_p - 2)^2 + (y_p - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_p^2 - 8x_p + 16 = x_p^2 - 4x_p + 4 + y_p^2 - 4y_p + 4$$

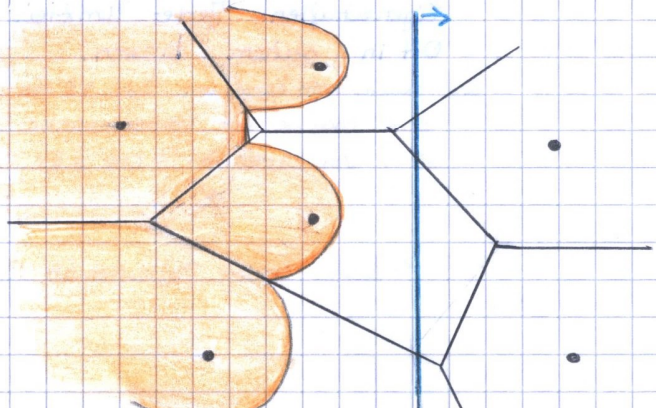
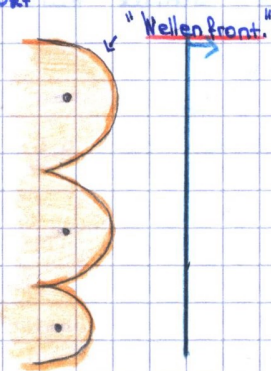
$$\Leftrightarrow -4x_p + 8 = y_p^2 - 4y_p$$

$$\Leftrightarrow 4x_p = -y_p^2 + 4y_p + 8$$

$$\Leftrightarrow x_p = -\frac{1}{4}y_p^2 + y_p + 2$$

→ dies ist eine Parabelgleichung mit der Variablen y

2) Im Allgemeinen wird L durch eine Folge von Parabelbögen nach rechts begrenzt



→ 3.4.2.10 Spezialfälle:

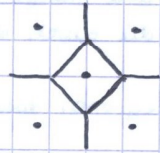
1) "normales" Voronoi-Diagramm: $VD(S) = VD_1(S)$. [closest point VD]

2) VD_{n-1} [farthest point VD]

↑ Voronoi-Regionen sind hier Mengen von Pkten, die von einem Ort weitest entfernt sind als von allen anderen.

Ab jetzt: $VD(S) = VD_1(S)$

Typisches Bsp:



→ 3.4.2.11 Lemma:

a) \forall Orte $x \in S$ gilt: $VR(x)$ ist unbeschränkt $\Leftrightarrow x$ ist Ecke von $CH(S)$ oder auf dem Rand von $CH(S)$

b) Voronoi-Diagramm für n Orte hat:

$\leq 2n-4$ Knoten

$\leq 3n-6$ Kanten.

(?)

Beweis:

a) \Rightarrow " sei $VR(x)$ unbeschränkt.

z.z. x ist Ecke von $CH(S)$ oder auf Rand von $CH(S)$

Ann.: nein.

$VR(x)$ konv u. unbeschr. n.V. $\Rightarrow \exists$ Strahl s , der in x startet

hier notwendig, dass x nicht auf Kante! \rightarrow und ganz in dieser Region $VR(x)$ verläuft.

\rightarrow Ann $\Rightarrow x$ im Inneren von $CH(S)$

S endlich \Rightarrow Strahl s schneidet den Rand von $CH(S)$ in einer Kante (y,z) oder in Pkt $z=y$. (da $CH(S)$ auch dann endlich)

$\exists p \in s$ (genügend weit entfernt von x), der näher zu y oder z ist als zu x

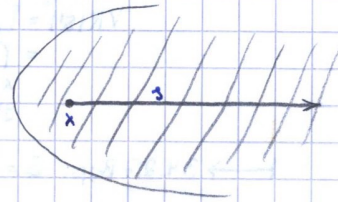
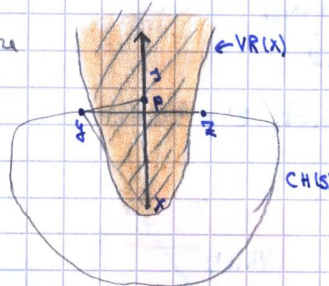
$\Rightarrow z$ zu $p \in VR(x)$

dh. z zu z : das orangefarbene

ist $VR(x)$

dh. z zu $VR(x)$ ist

unbeschränkt.



\Rightarrow Beh

" \Leftarrow Sei nun x Ecke von $CH(S)$.

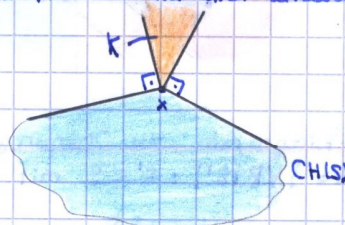
Betrachte Kegel K zwischen den Senkrechten auf dem zu x betrachteten Kanten.

Alle Pkte in K liegen näher zu x als zu allen anderen Orten.

$\Rightarrow K \subseteq VR(x)$

$\Rightarrow VR(x)$ unbeschränkt

(da K unbeschränkt)



Sei nun x auf dem Rand von $CH(S)$

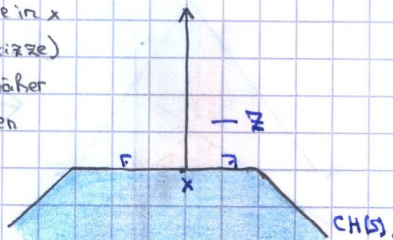
Betrachte senkrechte Gerade die in x startet und hoch zeigt (wie Skizze)

Alle Pkte auf Gerade G liegen näher zu x als zu allen anderen Orten

$\Rightarrow G \subseteq VR(x)$

$\rightarrow VR(x)$ unbeschränkt

(da K unbeschränkt)

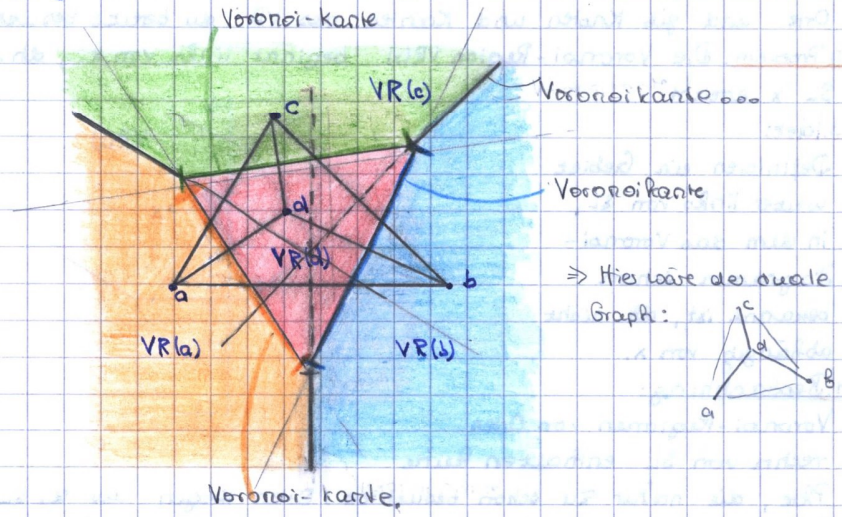


b). VD ist ein Graph, das \mathbb{R}^2 in Voronoi-Regionen unterteilt.

(\rightarrow Voronoi-Knoten + Voronoi-Kanten).

Sei $G=(V,E)$ der duale Graph zu VD(s), d.h.

$V=S$ (allg. Flächen (Regionen)) und $(x,y) \in E \Leftrightarrow VR(x)$ und $VR(y)$ haben gemeinsame Voronoi-Kante.



G ist ein planarer Graph und jede Kante $e \in E$ entspricht genau einer Voronoi-Kante (siehe Konstruktion von G).

(c,d) entspricht grün, (a,d) entspricht orange und (b,d) entspricht blau.

Graphentheorie \Rightarrow Jeder planare Graph mit n Knoten hat maximal $3n-6$ Kanten.

\Rightarrow Voronoi-Kanten $\leq 3n-6$.

Außerdem hat jeder Voronoi-Knoten mind. Grad 3 (da er durch mind. drei Orte definiert wird, von denen er gleiche Distanz hat).

$\forall v \in V: \text{Grad}(v) \geq 3$

$\Rightarrow \forall v \in V, |v|=1: \text{Grad}(v) \geq 3$

$\Rightarrow \forall v \in V: 3 \cdot |v| \leq \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow \sum_{v \in V} 3 \cdot |v| \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$

$\Rightarrow 3 \cdot \# \text{Knoten} \leq \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$

\Rightarrow Es gilt: $\sum_{v \in V} \text{grad}(v) \geq 3 \cdot \# \text{V-Knoten} \wedge \sum_{v \in V} \text{grad}(v) = 2 \cdot |E|$

$\Rightarrow 3 \cdot \# \text{V-Knoten} \leq \sum \text{grad}(v) = 2 \cdot |E| \leq 2 \cdot (3n-6) = 6n-12$

$\Rightarrow \# \text{V-Knoten} \leq 2n-4$

3.4.2.12 Bemerkungen:

1). VD für n Orte hat lineare Größe in n .

2). Sei $G=(V,E)$ dualer Graph zu VD(s), d.h. $V=S$ und $(x,y) \in E \Leftrightarrow VR(x)$ und $VR(y)$ haben gemeinsame Voronoi-Kante. \checkmark

G heißt Delaunay-Triangulierung.

Eigenschaften: Jeder Umkreis eines Dreiecks enthält keinen Ort in seinem Inneren.

Bea: Gemeinsame Rand von zwei VR'nen heißt Voronoi-Kante

Und Endpunkte von Voronoi-Kanten sind die Voronoi-Knoten

$\Rightarrow v$ Vor. Knoten $\Rightarrow \exists$ Orte a,b,c mit v Mittelpunkt von Kreis durch a,b,c



\Rightarrow Besser: andere Definition als 3.4.2.5!

B4.3. Konstruktion von Voronoi-Diagrammen durch einen Plane Sweep Algorithmus.

Zunächst: allg. Lage der Orte

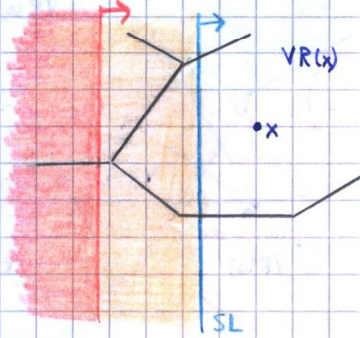
- keine 4 Orte liegen auf einem gemeinsamen Kreis
- paarweise verschiedene x-Koordinaten aller Orte und Events.

→ 3.4.3.1. Ziel: Bewege Senkrechte SL von links nach rechts über die Menge der Orte und gib Knoten und Kanten des VD ab bereits besuchten Orte aus.

→ 3.4.3.2. Problem: Die Voronoi-Region $VR(x)$ beginnt links von x , d.h. bevor SL x erreicht.

→ 3.4.3.3. Idee:

Definieren ein Gebiet weiter links von SL, in dem das Voronoi-Diagramm schon bekannt ist, d.h. nicht abhängig von x .



→ 3.4.3.4. Beobachtung:

Voronoi-Regionen von Orten rechts von SL enthalten keine Pkte, die näher zu schon besuchten Orten liegen als zu SL. Denn sonst würde ein solcher Pkt (unabh. von SL) näher zu einem anderen Ort liegen. Abstand zu SL ist nicht größer als Abstand zum nächsten Ort.

→ 3.4.3.5. Frage:

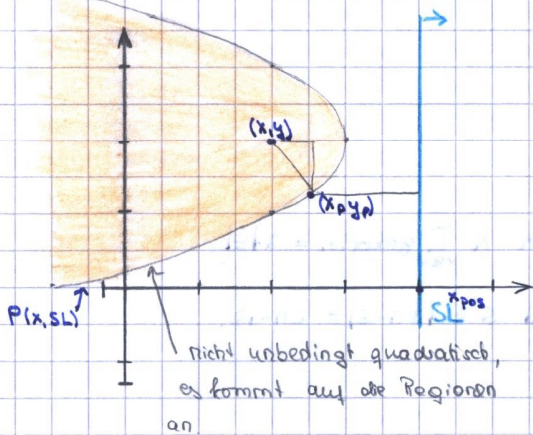
Betrachte das Gebiet $L := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, x) \leq \text{dist}(p, SL)\}$ für einen schon besuchten Ort x .

⇒ Voronoi-Diagramm von S im Gebiet L hängt nicht von Ort x rechts von SL ab.

Welche Form hat L ?

→ 3.4.3.6. Beispiele: $S' \leftarrow$ Menge der besuchten Orte.

1) S' besteht aus einem Ort x .



nicht unbedingt quadratisch, es kommt auf die Regionen an

→ Inneres der Parabel $P(x, SL)$

ist die Menge der Pkte mit gleicher Distanz zu x und SL .

(x, y) und SL bekannt

Wie sieht L aus?

→ Es muss gelten $\forall (x_p, y_p) \in L$:

$$(x_p - x_{pos})^2 \leq (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2$$

weil es muss eigentlich gelten:

$$x_p - x_{pos} = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}$$

→ $(x, y) = (2, 2)$, $SL \equiv 4$ bekannt

$$\Rightarrow (x_p - 4)^2 = (x_p - 2)^2 + (y_p - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_p^2 - 8x_p + 16 = x_p^2 - 4x_p + 4 + y_p^2 - 4y_p + 4$$

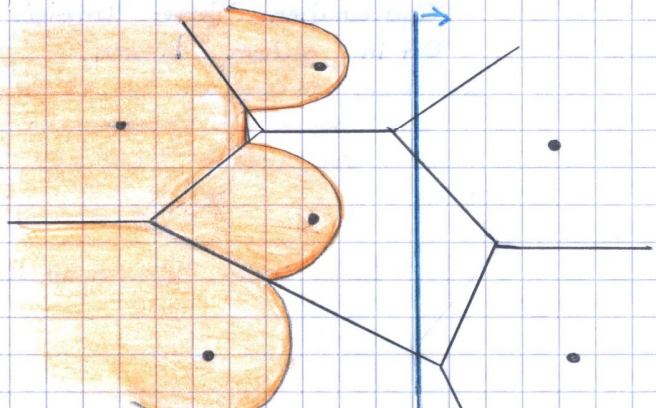
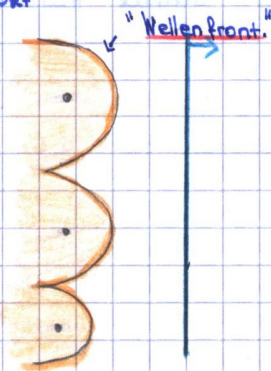
$$\Leftrightarrow -4x_p + 8 = y_p^2 - 4y_p$$

$$\Leftrightarrow 4x_p = -y_p^2 + 4y_p + 8$$

$$\Leftrightarrow x_p = -\frac{1}{4}y_p^2 + y_p + 2$$

→ dies ist eine Parabelgleichung mit der Variablen y

2) Im Allgemeinen wird L durch eine Folge von Parabelbögen nach rechts begrenzt



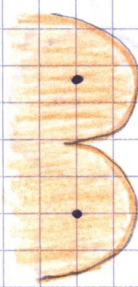
→ 3.4.3.7 Beobachtung: Schnittpunkte von benachbarten Parabeln in der Wellenfront überstreichen (33) die Kanten von V(DS).

→ 3.4.3.8 Idee: Verwalte die Wellenfront der Parabelbögen in einer Y-Struktur.

→ 3.4.3.9 Fragen: An welchen Positionen (Transaktionspunkten | Events) der SL ändert sich die Y-Struktur strukturell?
→ Welche Events gibt es?

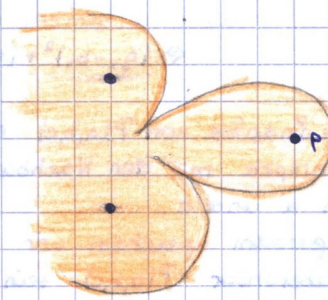
→ 3.4.3.10. Zwei Arten von Events:

1) SL überstreicht neuen Ort p vorher:

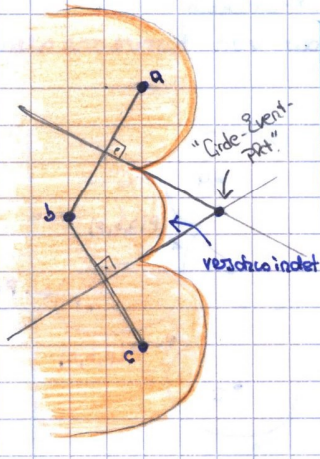


"Site Event"

nachher:

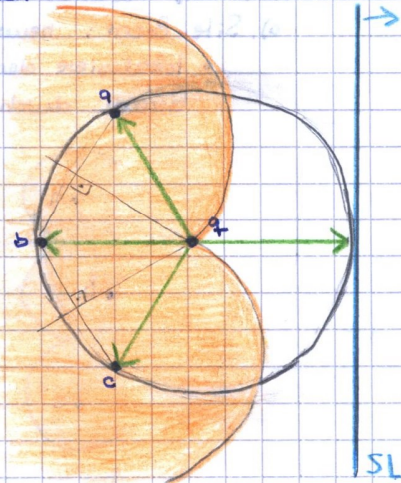


2) Ein Parabelbogen verschwindet aus der Wellenfront. "Circle Event"
vorher:



nachher:

bea: q gehört nicht zu S (i.d.)
Es ist nur ein Schnittpunkt von VR'en und heißt Circle-Eventpkt.



3) drei Parabeln schneiden sich in einem Pkt

↑ Hier entsteht ein neuer Voronoi-Knoten q = Mittelpkt des Kreises durch a, b, c
SL ist zu diesem Zeitpunkt Tangente an den Kreis (durch a, b, c).

→ 3.4.3.11. Lemma: Jeder Pkt auf der Kante von V(DS) kommt während des Sweep als Schnittpunkt zweier in der Y-Struktur benachbarter Parabelbögen vor.

(hier kontinuierlicher Sweep)

Beweis:

Sei e beliebige Voronoi-Kante von V(DS) und u ein beliebiger Pkt auf e. e trennt zwei Voronoi-Regionen $VR(p)$ und $VR(q)$
u liegt näher zu p und q (gleiche Distanz d) als zu allen anderen Orten.

Kreismitelpkt u enthält im Inneren keinen Ort.

Nun betrachte den Zeitpunkt des Sweep, in dem SL rechte Tangente an diesem Kreis K ist

a) u hat den gleichen Abstand zu p und SL
⇒ u liegt auf Parabel von p

b) u hat gl. Abstand zu q und SL
⇒ u liegt auf Parabel von q

⇒ Beh.

