

# Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2024/2025

Aufgabenblatt 4

Abgabe: 26. November 2024 um 12:15 Uhr (in der Übung)

## Definition(en)

Seien  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  zwei Sprachen. Wir definieren die *Konkatenation von Sprachen* als  $L_1 \circ L_2 := \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$ .

### Aufgabe 4.1 (3 Punkte)

Seien  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  entscheidbare Sprachen. Zeigen Sie, dass  $L_1 \circ L_2$  ebenfalls entscheidbar ist.

### Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Seien  $A, \bar{A} \subseteq \Sigma^*$  semi-entscheidbare Sprachen (wobei  $\bar{A} = \Sigma^* \setminus A$  das Komplement von  $A$  bezeichnet).

Zeigen Sie:  $A$  ist entscheidbar.

(*Hinweis:* Für ein beliebiges  $w \in \Sigma^*$  hält mindestens eine der beiden Turingmaschinen, die die jeweilige charakteristische Funktion berechnen. Überlegen Sie sich, wie Sie diese beiden Turingmaschinen "parallel" laufen lassen können.)

### Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Seien  $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$  semi-entscheidbare Mengen. Welche der Mengen  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\bar{A}$  und  $A \setminus B$  sind ebenfalls semi-entscheidbar? Und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

### Aufgabe 4.4 (2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a)  $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist eine Primzahl.}\}$  ist entscheidbar.
- b)  $\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt eine Primzahl } p, \text{ sodass } p + 1, \dots, p + n \text{ keine Primzahlen sind.}\}$  ist semi-entscheidbar.