

# Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2024/2025

Aufgabenblatt 10

Abgabe: 11. Februar 2025 um 12:15 Uhr (in der Übung)

## Definition(en)

- Eine *Clique* in einem ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Menge von Knoten  $V' \subseteq V$ , die paarweise benachbart sind. Für alle  $u, v \in V'$  (mit  $u \neq v$ ) gilt also  $uv \in E$ . Als *Größe* der Clique bezeichnen wir die Anzahl der Knoten  $|V'|$ .
- $k$ -CLIQUE (für  $k \in \mathbb{N}$ ):
  - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$
  - **gefragt:** Hat  $G$  eine Clique der Größe  $k$ ?
- CLIQUE:
  - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$
  - **gefragt:** Hat  $G$  eine Clique der Größe  $k$ ?
- 2-SAT:
  - **gegeben:** Ein Boolesche Formel  $\mathcal{F}$  in konjunktiver Normalform mit genau 2 Literalen pro Klausel (d. h.  $\mathcal{F}$  ist von der Form  $(\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2}) \wedge (\ell_{2,1} \vee \ell_{2,2}) \dots \wedge (\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2})$ , wobei  $\ell_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$ ).
  - **gefragt:** Hat  $\mathcal{F}$  eine erfüllende Belegung?
- FÄRBBARKEIT:
  - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$
  - **gefragt:** Gibt es eine Funktion  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , sodass für alle  $v, u \in V$  (mit  $vu \in E$ ) gilt:  $f(v) \neq f(u)$ ?  
(Anders ausgedrückt: Kann man die Knoten des Graphen so färben, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?)

**Aufgabe 10.1** ( $2 + 2 + 2$  Punkte)

- a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der eine 3-Clique, aber keine 4-Clique enthält.
- b) Zeigen Sie:  $k\text{-CLIQUE} \in \text{P}$ . (*Hinweis:  $k$  ist Teil der Problemdefinition.*)
- c) Zeigen Sie:  $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$ . (*Hinweis:  $k$  ist Teil der Eingabe.*)

**Aufgabe 10.2** (5 Punkte)

Zeigen Sie:  $2\text{-SAT} \in \text{P}$ . (Es ist kein formaler Beweis gefordert. Es reicht, wenn Sie Ihre Überlegungen kurz skizzieren.)

(*Hinweis: Formen Sie die Klauseln zu je zwei Implikation um. Überlegen Sie sich, was es für diese Implikationen bedeutet, wenn jeweils eines der beiden Literale auf *wahr* gesetzt wird und wie Sie diese Abhängigkeit in einem Graph darstellen können.*)

**Aufgabe 10.3** ( $2 + 2$  Punkte)

- a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der sich *nicht* mit 3 Farben färben lässt.
- b) Zeigen Sie:  $\text{FÄRBBARKEIT} \in \text{NP}$ .