Das Postsche Korrespondenzproblem

Prof. Dr. Berthold Vöcking
Lehrstuhl Informatik 1
Algorithmen und Komplexität
RWTH Aachen

November 2011

Das Postsche Korrespondenzproblem ist eine Art von Puzzle aus Dominos. Jedes Domino ist mit zwei Wörtern über einem Alphabet Σ beschrieben, ein Wort in der oberen Hälfte und eines in der unteren. Gegeben sei eine Menge K von Dominos z.B.

$$K = \left\{ \left[\frac{b}{ca}\right], \left[\frac{a}{ab}\right], \left[\frac{ca}{a}\right], \left[\frac{abc}{c}\right] \right\} .$$

Die Aufgabe besteht darin, eine Folge von Dominos aus K zu ermitteln, so dass sich oben und unten dasselbe Wort ergibt. Die Folge soll aus mindestens einem Domino bestehen. Wiederholungen von Dominos sind erlaubt. Ein Beispiel für eine derartige *korrespondierende Folge* über K ist

$$\left[\frac{a}{ab}\right] \left[\frac{b}{ca}\right] \left[\frac{ca}{a}\right] \left[\frac{a}{ab}\right] \left[\frac{abc}{c}\right] .$$

Nicht für jede Menge K ist dies möglich. Betrachte beispielsweise

$$K = \left\{ \left[\frac{abc}{ca}\right], \left[\frac{b}{aa}\right], \left[\frac{abcb}{abc}\right], \left[\frac{abc}{bc}\right] \right\} ,$$

Warum gibt es offensichtlich keine Lösung des PKP-Puzzles für diese Dominos?

Definition des Postschen Korrespondenzproblem

Definition: Postsches Korrespondenzproblem (PKP)

Eine *Instanz* des PKP besteht aus einer Menge

$$K = \left\{ \left[\frac{x_1}{y_1}\right], \ldots, \left[\frac{x_k}{y_k}\right] \right\} ,$$

wobei x_i und y_i nichtleere Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind. Es soll entschieden werden, ob es eine *korrespondierende Folge* von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n \geq 1$ gibt, so dass gilt $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$.

Die Elemente der Menge K bezeichnen wir als *Dominos*.

Wir werden die Unentscheidbarkeit des PKP durch eine kurze Reduktionskette nachweisen, die einen Umweg über eine Variante des PKP nimmt.

Definition des Modifizierten PKP

Definition: Modifiziertes PKP (MPKP)

Eine *Instanz* des MPKP besteht aus einer geordneten Menge

$$K = \left(\begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \frac{x_k}{y_k} \end{bmatrix} \right) .$$

wobei x_i und y_i nichtleere Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind. Es soll entschieden werden, ob es eine *korrespondierende Folge* von Indizes $i_2, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n \geq 1$ gibt, so dass gilt $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_1 y_{i_2} \ldots y_{i_n}$.

Die Modifizierung liegt darin, dass wir einen *Startdomino* $\begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} \end{bmatrix}$ bestimmt haben, mit dem die korrespondierende Folge beginnen muss.

Reduktionskette

Wir werden die folgenden zwei Aussagen beweisen.

Lemma A

$MPKP \leq PKP$.

Lemma B

$H \leq MPKP$.

Aus der Transitivität der Reduktion (Übungsaufgabe) folgt $H \leq PKP$ und somit

Satz

Das PKP ist nicht rekursiv.

Wir müssen „nur“ noch Lemma A und Lemma B beweisen.

Beschreibung der Funktion f:

$\#$ und \$ seien zwei Symbole, die nicht im Alphabet Σ des MPKP enthalten sind.

Wir bilden $K = \left(\left[\frac{x_1}{y_1} \right], \ldots, \left[\frac{x_k}{y_k} \right] \right)$ auf

$$f(K) \;=\; \left\{ \left[\frac{x'_0}{y'_0} \right], \left[\frac{x'_1}{y'_1} \right], \ldots, \left[\frac{x'_k}{y'_k} \right], \left[\frac{x'_{k+1}}{y'_{k+1}} \right] \right\}$$

ab, wobei

- x'_i aus x_i (für $1 \leq i \leq k$) entsteht, indem wir hinter jedem Zeichen ein $\#$ einfügen, und .
- y'_i aus y_i (für $1 \leq i \leq k$) entsteht, indem wir vor jedem Zeichen ein $\#$ einfügen.

Ferner setzen wir $x'_0 = \# x'_1$; $x'_{k+1} = \$$; $y'_0 = y'_1$ und $y'_{k+1} = \#\$$.

Offensichtlich ist f berechenbar.

Beispiel:

$$K = \left(\left[\frac{ab}{a}\right], \left[\frac{c}{abc}\right], \left[\frac{a}{b}\right] \right)$$

wird abgebildet auf

$$f(K) = \left\{ \left[\frac{\#a\#b\#}{\#a}\right], \left[\frac{a\#b\#}{\#a}\right], \left[\frac{c\#}{\#a\#b\#c}\right], \left[\frac{a\#}{\#b}\right], \left[\frac{\$}{\#\$}\right] \right\}.$$

Lösung des MPKP:

$$\left[\frac{ab}{a}\right] \left[\frac{a}{b}\right] \left[\frac{ab}{a}\right] \left[\frac{c}{abc}\right]$$

Lösung des PKP:

$$\left[\frac{\#a\#b\#}{\#a}\right] \left[\frac{a\#}{\#b}\right] \left[\frac{a\#b\#}{\#a}\right] \left[\frac{c\#}{\#a\#b\#c}\right] \left[\frac{\$}{\#\$}\right]$$

zu zeigen: $K \in MPKP \;\Rightarrow\; f(K) \in PKP$

Sei $(1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Lösung für K, d.h.

$$x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_n} \;=\; y_1 y_{i_2} \ldots y_{i_n} \;=\; a_1 a_2 \ldots a_s$$

für geeignet gewählte Symbole $a_1, \ldots, a_s$ aus Σ.

Dann ist $(0, i_2, \ldots, i_n, k+1)$ eine Lösung für $f(K)$, denn

$$x'_0 x'_{i_2} \ldots x'_{i_n} \$ \;=\; \# a_1 \# a_2 \# \ldots \# a_s \# \$ \;=\; y'_0 y'_{i_2} \ldots y'_{i_n} \# \$$$

Aus einer Lösung für K bzgl. MPKP, lässt sich also eine Lösung für $f(K)$ bzgl. PKP konstruieren und die obige Behauptung ist gezeigt.

Beweis von Lemma A ($MPKP \leq PKP$)

zu zeigen: $f(K) \in PKP \;\Rightarrow\; K \in MPKP$

Sei nun $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Lösung minimaler Länge für $f(K)$.

- *Beobachtung 1:* Es gilt $i_1 = 0$ und $i_n = k+1$, weil nur x'_0 und y'_0 mit demselben Zeichen beginnen und nur x'_{k+1} und y'_{k+1} mit demselben Zeichen enden.
- *Beobachtung 2:* Es gilt $i_j \neq 0$ für $2 \leq j \leq n$, weil sonst zwei #-Zeichen im oberen Wort direkt aufeinander folgen würden, was im unteren Wort unmöglich ist.
- *Beobachtung 3:* Es gilt $i_j \neq k+1$ für $1 \leq j < n$, denn würde das \$-Zeichen vorher auftreten, könnten wir die vorliegende minimale korrespondierende Folge nach dem ersten Vorkommen des \$-Zeichens abschneiden und hätten eine noch kürzere Lösung gefunden.

Beweis von Lemma A ($MPKP \leq PKP$)

Aus den Beobachtungen folgt, unsere PKP-Lösung für $f(K)$ hat die Struktur

$$\begin{aligned}
\underbrace{x'_{i_1}}_{=x'_0=\#x'_1} \; x'_{i_2} \ldots x'_{i_{n-1}}, \; \underbrace{x'_{i_n}}_{=x'_{k+1}=\$} \quad &= \quad \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_s\#\$ \\
&= \quad \underbrace{y'_{i_1}}_{=y'_0=y'_1}, y'_{i_2} \ldots y'_{i_{n-1}}, \; \underbrace{y'_{i_n}}_{=y'_{k+1}=\#\$}
\end{aligned}$$

für geeignet gewählte Symbole $a_1, \ldots, a_s$ aus Σ.

Daraus können wir die folgende MPKP-Lösung für K konstruieren:

$$x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_{n-1}} \;=\; a_1 a_2 \ldots a_s \;=\; y_1 y_{i_2} \ldots y_{i_{n-1}} \;.$$

Somit gilt $f(K) \in PKP \;\Rightarrow\; K \in MPKP$. $\square$

Scheinbar haben Dominos wenig mit Turingmaschinen zu tun. In Lemma B wird dennoch behauptet, dass man mit Hilfe eines Puzzles aus Dominos das Halteproblem für Turingmaschinen entscheiden kann. Bevor wir in den Beweis des Lemmas einsteigen, möchten wir auf der Basis eines umfangreichen Beispiels illustrieren, wie die Rechnung einer Turingmaschine durch ein Puzzle aus Dominos „simuliert“ werden kann.

Betrachte die folgende TM M:

$\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, B\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, \bar{q}\}$.

Die Überführungsfunktion δ sei gegeben durch

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(\bar{q}, 1, N)$
q_1	$(q_2, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(\bar{q}, 1, N)$
q_2	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	(q_2, B, R)

Die TM M erkennt, ob das Eingabewort von der Form $0^i 1^j$, $i, j \geq 0$, ist. Bei Eingabe eines Wortes dieser Form terminiert (und akzeptiert) die Rechnung im Zustand $\bar{q}$, ansonsten läuft der Kopf im Zustand q_2 weiter und weiter nach rechts.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Die Rechnung der TM auf einer gegebenen Eingabe kann durch eine Konfigurationsfolge beschrieben werden.

Konfigurationsfolge von M auf Eingabe $w = 0011$

$$q_0 0011 \vdash 0 q_0 011 \vdash 00 q_0 11 \vdash 001 q_1 1 \vdash 0011 q_1 B \vdash 0011 \bar{q} 1$$

Wir möchten die Rechnung einer TM auf einer Eingabe durch ein Puzzle aus Dominos „simulieren“. Dieses Puzzle entspricht dem MPKP. Als Startdomino für das MPKP wählen wir ein Domino bei dem das untere Wort aus der Anfangskonfiguration mit ein paar zusätzlichen Trennsymbolen besteht.

$$\left[\frac{\#}{\#\# q_0 0011 \#}\right].$$

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Das Puzzle für unsere Beispielrechnung (M, w) enthält unter anderem jeweils ein Domino für jedes Zeichen aus $\Gamma \cup \{\#\}$.

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{1}{1}\right], \left[\frac{B}{B}\right], \left[\frac{\#}{\#}\right]$$

Wir erweitern diese *Liste erlaubter Dominos* um je ein Domino für jeden Eintrag in der Tabelle der Überführungsfunktion δ, der den jeweiligen Übergang inklusive der Kopfbewegung beschreibt.

$$\left[\frac{q_0 0}{0 q_0}\right], \left[\frac{q_0 1}{1 q_1}\right], \left[\frac{q_0 B}{\bar{q} 1}\right], \left[\frac{q_1 0}{0 q_2}\right], \left[\frac{q_1 1}{1 q_1}\right], \left[\frac{q_1 B}{\bar{q} 1}\right], \left[\frac{q_2 0}{0 q_2}\right], \left[\frac{q_2 1}{1 q_2}\right], \left[\frac{q_2 B}{B q_2}\right]$$

Wir werden später noch weitere Steine zur Liste erlaubter Dominos hinzufügen.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Beobachtung:

Wenn wir das Startdomino mit einer Folge von Dominos aus der Liste der erlaubten Dominos derart ergänzen, dass der obere String ein Prefix des unteren Strings ist, so

- rekonstruieren wir im unteren String die Konfigurationsfolge von M auf w, und
- der obere String folgt dem unteren mit einer Konfiguration im Rückstand.

Rekonstruktion der Konfigurationsfolge

Die ersten Dominos in der Lösung des Puzzles sind

$$\left[\frac{\#}{\#\#q_0 0011\#}\right] \quad \left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{q_0 0}{0 q_0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right]$$

$$\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{q_0 0}{0 q_0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right]$$

$$\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{q_0 1}{1 q_1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right]$$

$$\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{q_1 1}{1 q_1}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right]$$

$$\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{q_1 \#}{\bar{q} 1 \#}\right] \ldots$$

Vielleicht ist es jemandem aufgefallen, im letzten Schritt haben wir ein wenig gemogelt. Wir haben ein Domino verwendet, das nicht in der zuvor spezifizierten Liste erlaubter Dominos enthalten ist. Tatsächlich ergänzen wir die Liste erlauber Dominos um die folgenden Elemente.

$$\left[\frac{q_0\#}{\bar{q}1\#}\right], \left[\frac{q_1\#}{\bar{q}1\#}\right]$$

Die Aufgabe dieser Dominos ist es Überführungen zu realisieren, die auf ein implizites Blank-Symbol am Ende der Konfiguration zurückgreifen.

Wie können wir es schaffen, dass der obere String seinen Rückstand am Ende der Rechnung aufholt? –Zu diesem Zweck ergänzen wir die Liste der erlaubten Dominos um die folgenden Elemente.

$$\left[\frac{\bar{q}0}{\bar{q}}\right], \left[\frac{\bar{q}1}{\bar{q}}\right], \left[\frac{\bar{q}B}{\bar{q}}\right], \left[\frac{0\bar{q}}{\bar{q}}\right], \left[\frac{1\bar{q}}{\bar{q}}\right], \left[\frac{B\bar{q}}{\bar{q}}\right]$$

Desweiteren fügen wir noch ein *Abschlussdomino* hinzu.

$$\left[\frac{\#\bar{q}\#\#}{\#}\right]$$

Beachte, diese Dominos können nur dann zum Einsatz kommen, wenn der Endzustand $\bar{q}$ erreicht ist, also nur wenn die Rechnung der TM terminiert.

Simulation einer TM durch Dominos – ein Beispiel

Rekonstruktion der Konfigurationsfolge – Fortsetzung

$$
\begin{array}{l}
\ldots \quad \left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{q_1\#}{\bar{q}1\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{\bar{q}1}{\bar{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1}{1}\right] \left[\frac{1\bar{q}}{\bar{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{1\bar{q}}{\bar{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{0\bar{q}}{\bar{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \\
\left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{0\bar{q}}{\bar{q}}\right] \left[\frac{\#}{\#}\right] \qquad \left[\frac{\#\bar{q}\#\#}{\#}\right] .
\end{array}
$$

Jetzt stimmt der obere mit dem unteren String überein.
(Skeptiker vergleichen jeweils den unteren String in einer Zeile mit dem oberen String in der darunter liegenden Zeile.)

Die Idee hinter der obigen Konstruktion ist es, eine Eingabe für das Halteproblem in ein MPKP-Puzzle zu transformieren, so dass das Puzzle genau dann eine Lösung hat, wenn die im Halteproblem betrachtete TM auf ihrer Eingabe hält. Unser Beipiel hat erläutert, wie eine derartige Transformation für eine bestimmte Eingabe des Halteproblems aussehen könnte. Der folgende Beweis für Lemma B verallgemeinert und formalisiert das Vorgehen aus unserem Beispiel.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Wir beschreiben eine berechenbare Funktion f, die eine syntaktisch korrekte Eingabe für H der Form $(\langle M \rangle, w)$ auf eine syntaktisch korrekte Instanz $K = f((\langle M \rangle, w))$ für das MPKP abbildet, so dass gilt

$$M \text{ hält auf } w \;\Leftrightarrow\; K \text{ hat eine Lösung} \;.$$

Syntaktisch nicht korrekte Eingaben für H werden auf syntaktisch nicht korrekte Eingaben für MPKP abgebildet.

Das Alphabet, das wir für die MPKP-Instanz verwenden ist $\Gamma \cup Q \cup \{\#\}$, wobei gelte $\# \notin \Gamma \cup Q$.

Konstruktion der Funktion f

Gegeben sei das Tupel $(\langle M \rangle, w)$. Wir beschreiben, welche Dominos die Menge $K = f((\langle M \rangle, w))$ enthält.

Das *Startdomino* ist von der Form

$$\left[\frac{\#}{\#\#q_0 w\#}\right].$$

Desweiteren enthalte K die folgenden Arten von Dominos.

Kopierdominos:

$$\left[\frac{a}{a}\right] \text{ für alle } a \in \Gamma \cup \{\#\}$$

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Überführungsdominos:

$$\left[\frac{qa}{q'c}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,a) = (q', c, N), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\},\ a \in \Gamma$$

$$\left[\frac{qa}{cq'}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,a) = (q', c, R), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\},\ a \in \Gamma$$

$$\left[\frac{bqa}{q'bc}\right] \qquad \text{falls } \delta(q,a) = (q', c, L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\},\ a, b \in \Gamma$$

Spezielle *Überführungsdominos*, die implizite Blanks berücksichtigen:

$$\left[\frac{\#qa}{\#q'Bc}\right] \quad \text{falls } \delta(q,a) = (q',c,L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\},\ a \in \Gamma$$

$$\left[\frac{q\#}{q'c\#}\right] \quad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,N), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\}$$

$$\left[\frac{q\#}{cq'\#}\right] \quad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,R), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\}$$

$$\left[\frac{bq\#}{q'bc\#}\right] \quad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\},\ b \in \Gamma$$

$$\left[\frac{\#q\#}{\#q'Bc\#}\right] \quad \text{falls } \delta(q,B) = (q',c,L), \text{ für } q \in Q \setminus \{\bar{q}\}$$

Löschdominos:

$$\left[\frac{a\bar{q}}{\bar{q}}\right] \text{ und } \left[\frac{\bar{q}a}{\bar{q}}\right] \text{ für } a \in \Gamma$$

Abschlussdomino:

$$\left[\frac{\#\bar{q}\#\#}{\#}\right]$$

Dies sind alle Dominos in der MPKP-Instanz. Die Beschreibung der Funktion f ist somit abgeschlossen.

Wir beweisen nun die Korrektheit der Konstruktion:

zu zeigen: f ist berechenbar. Gilt offensichtlich.

zu zeigen: M hält auf $w \Rightarrow K \in MPKP$

Wenn M auf w hält, so entspricht die Rechnung von M auf w einer endlichen Konfigurationsfolge der Form

$$k_0 \vdash k_1 \vdash \cdots \vdash k_{t-1} \vdash k_t \ ,$$

wobei k_0 die Startkonfiguration und k_t die Endkonfiguration im Zustand $\bar{q}$.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

In diesem Fall können wir beginnend mit dem Startdomino nach und nach Kopier- und Überführungsdominos hinzulegen, so dass

- der untere String die vollständige Konfigurationsfolge von M auf w in der folgenden Form darstellt

$$\#\# \, k_0 \, \#\# \, k_1 \, \#\# \cdots \#\# \, k_{t-1} \, \#\# \, k_t \, \# \quad ,$$

  und

- der obere String ein Prefix des unteren Strings ist, nämlich

$$\#\# \, k_0 \, \#\# \, k_1 \, \#\# \cdots \#\# \, k_{t-1} \, \# \quad .$$

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

Durch Hinzufügen von Löschdominos kann jetzt der Rückstand des oberen Strings fast ausgeglichen werden. Danach sind beide Strings identisch bis auf ein Suffix der Form

$$\#\bar{q}\# \quad .$$

Dieses Suffix fehlt im oberen String.

Nach Hinzufügen des Abschlussdominos

$$\left[\frac{\#\bar{q}\#\#}{\#}\right]$$

sind beide Strings somit identisch.

Wenn M auf w hält, gilt somit $K \in MPKP$.

Beweis von Lemma B ($H \leq MPKP$)

zu zeigen: M hält nicht auf $w \;\Rightarrow\; K \notin MPKP$

Unsere Ausgangsitutation ist eine TM M und eine Eingabe w, so dass M nicht auf w hält.

Zum Zweck des Widerspruchs nehmen wir nun an, dass das MPKP-Puzzle K aus den Dominos für M und w eine Lösung hat, d.h. es gibt eine korrespondierende Folge aus diesen Dominos.

Allgemeine Beobachtungen zu korrespondierenden Folgen:

- Beim Startdomino ist der obere String kürzer als der untere.
- Auch bei den Kopier- und Überführungsdominos ist der obere String niemals länger als der untere.
- Nur Abschluss- und Löschdominos zeigen unten kürzere Strings als oben.

Aus den Beobachtungen folgt:

- Die (eindeutige) korrespondierende Folge zur Rechnung von M auf w enthält deshalb zumindest einen Lösch- oder Abschlussdomino, denn sonst wäre der untere String länger als der obere.
- In dieser Folge erscheint deshalb der Zustand $\bar{q}$, da dieser Zustand auf allen Löschdominos und dem Abschlussdomino abgebildet ist.
- Die auf den Dominos dargestellte Rechnung von M auf w terminiert.

Dies widerspricht jedoch unserer Voraussetzung, dass M nicht auf w hält. Also gilt $K \notin MPKP$. $\square$