$$\begin{aligned} \grave{w} &= \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_m \\ \acute{w} &= a_1\#a_2\#\ldots\#a_m\# \end{aligned}$$

Sei $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ die Eingabe von MPCP.
$\rightarrow f(K) = ((\bar{x_1}, \grave{y_1}), (\acute{x_1}, \grave{y_1}), (\acute{x_2}, \grave{y_2}), \ldots, (\acute{x_k}, \grave{y_k}), (\$, \#\$))$
f ist berechenbar.
f vermittelt eine Reduktion von MPCP auf PCP.

Behauptung.
K besitzt eine Lösung mit $i_1 = 1$
$\Leftrightarrow f(K)$ besitzt irgend eine Lösung.

Beweis.
($\rightarrow$) Besitzt K eine Lösung $(i_1, \ldots, i_n)$ mit $i_1 = 1$,
dann ist $(1, i_2 + 1, \ldots, i_n + 1, k + 2)$ eine Lösung für $f(K)$.
($\leftarrow$) Besitzt $f(K)$ eine Lösung $(i_1, \ldots, i_n)$,
so muß gelten:
$i_1 = 1, i_n = k + 2$ mit $i_j \in \{2, \ldots, k + 1\}$ für $2 \leq j \leq n + 1$
$\Rightarrow (1, i_2 - 1, \ldots, i_{n-1} - 1)$ ist Lösung für K.

Zur Unentscheidbarkeit von MPCP:

Lemma
$H \leq MPCP$

Beweis.
Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, F)$ eine kodierte TM
$w \in \Sigma^+$ die Eingabe.
Suche eine allgemeine Vorschrift, die (M, w) eine Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ zuordnet mit
M angesetzt auf w stoppt $\Leftrightarrow (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ besitzt eine Lösung mit $i_1 = 1$

Konstruktion von MPCP über dem Alphabet $\Gamma \cup Q \cup \{\#\}$.
erstes Wortpaar: $(\#, \#q_0w\#)$
weitere Paare:

1. Kopieregeln:

$$(a, a) \text{ für alle } a \in \Gamma \cup \{\#\}$$

2. Überführungsregeln:

$$\begin{array}{lll} (qa, q'c) & \text{falls} & \delta(q, a) = (q', c, N) \\ (qa, cq') & \text{falls} & \delta(q, a) = (q', c, R) \end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
(qa, q'bc) & \text{falls} & \delta(q,a) = (q',c,L) \text{ fr alle } b \in \Gamma \\
(\#qa, \#q'\Box c) & \text{falls} & \delta(q,a) = (q',c,L) \\
(q\#, q'c\#) & \text{falls} & \delta(q,\Box) = (q',c,N) \\
(q\#, cq'\#) & \text{falls} & \delta(q,\Box) = (q',c,R) \\
(bq\#, q'b\#) & \text{falls} & \delta(q,\Box) = (q',c,L) \text{ für alle } b \in \Gamma
\end{array}$$

3. Löschregeln:

   (aq_e, q_e) und $(q_e a, q_e)$ für alle $a \in \Gamma, q_e \in F$

4. Abschlußregeln:

   $(q_e\#\#, \#)$ für alle $q_e \in F$

($\rightarrow$) Falls M bei w stoppt gibt es eine Folge von Konfigurationen $(k_0, k_1, \ldots, k_t)$ mit $k_0 = q_0 w$, k_t ist Endkonfiguration also $k_t = uq_e v$ mit $u, v \in A^*, q_e \in F)$ und $k_i \vdash k_{i+1}$
$\Leftrightarrow$ Die obige Eingabe für das MPCP besitzt ein Lösungswort

$$\#k_0\#k_1 \ldots \#k_t\#k_t'\#k_t'' \ldots \#q_e\#\#$$

($k_t', k_t'', \ldots$ entstehen aus $k_t = uq_e v$ durch Löschung von Nachbarsymbolen aus q_e)

($\leftarrow$) Besitzt der obige MPCP eine Lösung mit $i_1 = 1$, dann läßt sich eine stoppende Rechnung von M bei w ablesen. ■

Folgerung
PCP bleibt unentscheidbar, falls für das Alphabet A gilt: $A = \{0,1\}$. ("01–PCP")

<u>Beweis.</u>
Es reicht zu zeigen: PCP $\leq$ 01–PCP.
Sei A das Alphabet von PCP.
<u>Betrachte:</u> $f : A \rightarrow \{0,1\}^*$ mit $f(a_r) = \hat{a_r} = 01^r$.
Setze die Abbildung f auf A^* fort.
Es gilt:
$(x_1, y_1), \ldots, (x_n.y_n)$ besitzt Lösung $\Leftrightarrow$ $(\hat{x_1}, \hat{y_1}), \ldots, (\hat{x_n}.\hat{y_n})$ besitzt Lösung. ■

Bemerkung
Sei PCP$_k$ die Variante des PCPs, deren Eingabe aus genau k Wortpaaren besteht.

Es gilt:
PCP$_k$ ist unentscheidbar für $k \geq 9$.
PCP$_k$ ist entscheidbar für $k \leq 2$.

offen sonst.

Folgerung
Das Halte–Problem H für TM ist semi–entscheidbar.

Beweis.
PCP ist semi–entscheidbar,
$H \leq$PCP.
$\Rightarrow$ Beh. ∎

Universelle TM : Nachobiger Folgerung gibt es eine TM U, die sich bei Eingabe von $w\#x$ so verhält wie M_w bei Eingabe von x. (Zunächst nur im Bezug auf Halten, bzw. Nicht–Halten)

TM U verhält sich wie ein TM –Interpreter
Der erste Teil programmiert die TM .
Der zweite Teil ist die eigentliche Eingabe.

Man kann mit Hilfe des PCP–Resultats die Unentscheidbarkeit von Problemen der Theorie der formalen Sprachen nachweisen:

Satz.
Das Schnittproblem für kontextfreie Sprachen (G_1, G_2 kontextfreie Sprachen. Gilt: $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?) ist unentscheidbar.

Beweis.
Zu zeigen: PCP $\leq$ Schnittproblem
Jedem PCP $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ müssen effektiv zwei Grammatiken G_1, G_2 zugeordnet werden,
so daß gilt:
K besitzt eine Lösung
$\Leftrightarrow$ es gibt ein $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$

Idee: Erzeugung von Folgen von x_i–Wörtern mit G_1.
Erzeugung von Folgen von y_i–Wörtern mit G_2.
Die Indizes der x_i müssen mit denen der y_i in allen potentiellen Lösungen übereinstimmen.

Sei $G_i = (\{S_i\}, A \cup \{a_1, \ldots, a_k\}, P_i, S_i)$ $i = 1, 2$
mit

$$\begin{aligned} P_1 &= \{S_1 \rightarrow a_1 x_1 | \ldots | a_k x_k\} \cup \{S_1 \rightarrow a_1 S_1 x_1 | \ldots | a_k S_1 x_k\} \\ P_2 &= \{S_2 \rightarrow a_1 y_1 | \ldots | a_k y_k\} \cup \{S_2 \rightarrow a_1 S_2 y_1 | \ldots | a_k S_2 y_k\} \end{aligned}$$

Es gilt:
K besitzt die Lösung $i_1, \ldots, i_n$

$\Leftrightarrow$
$a_{i_n} \dots a_{i_2} a_{i_1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} =$
$a_{i_n} \dots a_{i_2} a_{i_1} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n} \in L(G_1) \cap L(G_2)$ ■

Folgerung
Das Schnittproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar.

Beweis.
G_1, G_2 aus dem Beweis des letzten Satz es sind deterministisch. ■

Satz.
Das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen ist unentscheidbar.

Beweis.
Reduzierung des Schnittproblems für kontextfreie Sprachen auf das Äquivalenzproblem für Kontextfreie Sprachen.
Nutzung von

- deterministisch kontextfreie Sprachen sind effektiv unter Komplementbildung abgeschlossen.
- deterministisch kontextfreie Sprachen sind effektiv unter Vereinigung abgeschlossen.

Es gilt: (G_1, G_2) Schnittproblem
$\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$
$\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq \overline{L(G_2)}$
$\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq L(G_2')$ G_2' Grammatik des Komplements von G_2
$\Leftrightarrow L(G_1) \cup L(G_2) = L(G_2')$
$\Leftrightarrow L(g_3) = L(G_2)$ G_3 Vereinigungsgrammatik von G_1 und G_2
$\Leftrightarrow (G_3, G_2') \in$ Äquivalenzproblem ■

noch offen: Das Äquivalenzproblem für deterministisch kontextfreie Grammatiken.

Folgerung
Das Äquivalenzproblem für folgende Probleme ist unentscheidbar:

- nichtdeterministische Kellerautomaten
- BNF
- EBNF
- Syntaxdiagramme

- LBA
- kontextsensitive Grammatiken
- TM

Beweis.
Man kann kontextfreie Grammatiken effektiv in die genannten Probleme übersetzen. ∎

Satz.
Das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen ist unentscheidbar.

Beweis.
Das Schnittproblem für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar.
$\Leftrightarrow (G_1, G_2) \mapsto G_3$ ist berechenbar, wobei
$L(G_3) = L(G_1) \cap L(G_2)$
Diese Abblidung vermittelt die Reduktion des Schnittproblems für kontextfreie Sprachen auf das Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen. ∎