2.3 NP–Vollständigkeit

Definition.
Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.
A heißt *polynomiell auf B reduzierbar* ($A \leq_p B$) , falls es eine totale und mit polynomialer Komplexität berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so daß für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Lemma
$\leq_p$ ist transitiv.

Beweis.
Übungsaufgabe.

Lemma
i) $A \leq_p B, B \in P \Rightarrow A \in P$
ii) $A \leq_p B, B \in NP \Rightarrow A \in NP$
Beweis.
i) Sei $A \leq_p B$ mittels f.
TM M_f berechne f in Polynomialzeit p.
Sei $B \in P$ mittels TM M in Rechenzeit q.
$\Rightarrow (M_f; M)$ berechnet A in Rechenzeit
$p(|x|) + q(|f(x)|) \leq p(|x|) + q(p(|x|))$ ist Polynom. ■

ii) analog

Definition.
Eine Sprache A heißt *NP–hart*, falls für alle Sprachen $L \in NP$ gilt: $L \leq_p A$.
Eine Sprache A heißt *NP–vollständig*, falls A NP–hart ist und $A \in NP$ gilt.

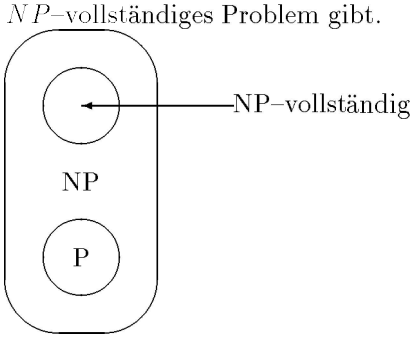
Bemerkung
NP-vollständige Sprachen sind "schwere" Sprachen in NP.

Satz.
Sei A NP–vollständig.
Dann gilt:

$$A \in P \Leftrightarrow P = NP$$

Beweis.
(—): Sei $A \in P, L \in NP$ beliebig.
da A NP–hart gilt: $L \leq_p A$
$\Rightarrow_{Lemma} L \in P$ ■
(—): $P = NP \Rightarrow A \in P$

$\Rightarrow$ Zum Nachweis von $P = NP$ genügt die Angabe eines polynomialen Algorithmus für ein NP–vollständiges Problem:
Die Annahme $P \neq NP$ bedeutet, daß es keinen effizienten Algorithmus für ein NP–vollständiges Problem gibt.



Definition.
Das folgende Problem heißt "Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik" SAT.

Gegeben:	Eine Formel F der Aussagenlogik mit n Variablen, $n \in I\!N$
Gefragt:	Ist F erfüllbar?
	(d.h. $\exists$ Belegung $a \in \{0,1\}^n$ mit $F(a) = 1$?)

Formal
$SAT = \{code(F) \in \Sigma^* : F \text{ ist erfüllbare Formel der Aussagenlogik}\}$

Theorem von Cook
Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik SAT ist NP–vollständig.

Beweis.
1.) Zu zeigen: $SAT \in NP$.
Angabe einer polynomial zeitbeschränkten NTM für SAT:
M stellt in einem Durchlauf über der Eingabe fest, welche Variablen in F vorkommen.
Seien dies $x_1, \ldots, x_k$.
M rät die Werte $a_1, \ldots, a_k \in \{0,1\}$ für $x_1, \ldots, x_k$ und setzt diese in F ein.
(es existieren 2^k mögliche unabhängige Berechnungen – für jede Belegung eine)
Für jede Belegung rechnet M jeweils deterministisch den Wert von F aus und akzeptiert, falls dieser 1 ist.
$F \in SAT \Leftrightarrow M$ akzeptiert F.
Wegen $k \leq |F|$ ist M polynomialzeit beschränkt.
$\Rightarrow SAT \in NP$.

2.) Zu zeigen: SAT ist NP–hart.
Sei $L \in NP$ beliebig.
M NTM für L der Rechenzeit p.
OBdA gelte: $\delta(z_e, a) \ni (z_e, a, N)$ (d.h. erreichte Endzustände werden nicht mehr

verlassen).
Sei $x = x_1, \ldots, x_n \in \Sigma^*$ die Eingabe von M.
Konstruktion einer Fromel F mit

$x \in L \Leftrightarrow F$ ist erfüllbar.

Sei $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_l\}$ das Anfangsalphabet
$Z = \{z_1, \ldots, z_k\}$ die Zustandsmenge von M
F enthält folgende Variable:

Variable	Indizes	intendierte Bedeutung
$zust_{t,z}$	$t = 0, \ldots, p(n)$ $z \in Z$	$zust_{t,z} = 1 \Leftrightarrow$ nach t Schritten befindet sich M im Zustand z
$pos_{t,i}$	$t = 0, \ldots, p(n)$ $i = -p(n), \ldots, p(n)$	$pos_{i,j} = 1 \Leftrightarrow$ M's Schreib–Lesekopf befindet sich nach t Schritten auf Position i
$band_{t,i,a}$	$t = 0, \ldots, p(n)$ $i = -p(n), \ldots, p(n)$ $a \in \Gamma$	$band_{t,i,a} = 1 \Leftrightarrow$ nach t Schritten befindet sich auf Bandposition i das Zeichen a

F besteht aus mehreren Bauteilen:

$G(x_1, \ldots, x_m) = 1 \Leftrightarrow$ für geanu ein i ist $x_i = 1$.

Behauptung
G existiert und es gilt $size(G) = O(m^2)$.

Beweis.

$$G = (\bigvee_{i=1}^{k} x_i) \wedge (\bigwedge_{j=1}^{m-1} \bigwedge_{l=j+1}^{m} (\neg(x_j \wedge x_l))$$

Die erste Teilformel wird genau dann wahr, wenn mindestens eine Variable wahr ist.
Die zweite Teilformel wird genau dann wahr, wenn höchstens eine Variable wahr wird.

$F = R \wedge A \wedge \ddot{U}_1 \wedge \ddot{U}_2 \wedge E$, wobei

R	für Randbedingung
A	für Anfangsbedingung
$\ddot{U}_1, U_2$	für Übergangsbedingung und
E	für Endbedingung steht.

R drückt aus:

- Zu jedem Zeitpunkt t ergibt sich für genau ein z $zust_{t,z} = 1$.
- Zu jedem Zeitpunkt t gibt es genau eine Bandposition i mit $pos_{t,i} = 1$.
- Zu jedem Zeitpunkt t und jeder Bandposition i gibt es genau ein a mit $band_{t,i,a} = 1$

$$R = \bigwedge_t [G(zust_{t,z_1}, \ldots, zust_{t,z_k}) \wedge G(pos_{t,-p(n)}, \ldots, pos_{t,p(n)}) \wedge \bigwedge_i G(band_{t,i,a_1}, \ldots, band_{t,i,a_l})]$$

A beschreibt den Status der Variablen für den Fall $t = 0$:

$$A = zust_{0,z_0} \wedge pos_{0,1} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} band_{0,j,x_j} \wedge \bigwedge_{j=-p(n)}^{0} band_{0,j,\square} \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{p(n)} band_{0,j,\square}$$

$\ddot{U}_1$ beschreibt den Übergang von Zeitpunkt t nach $t+1$ an der Kopfposition ($y \in \{-1, 0, +1\}$):

$\ddot{U}_1 = \bigwedge_{t,z,i,a} [(zust_{t,z} \wedge pos_{t,i} \wedge band_{t,i,a}) \rightarrow \bigvee_{z',a',y \text{ mit } \delta(z,a) \ni (z',a',y)} (zust_{t+1,z'} \wedge pos_{t+1,i+y} \wedge band_{t+1,i,a'}]$

$\ddot{U}_2$ besagt, daß auf den übrigen Bandfeldern nichts passiert:

$$\ddot{U}_2 = \bigwedge_{t,i,a} ((\neg pos_{t,i} \wedge band_{t,i,a}) \rightarrow band_{t+1,i,a})$$

E überprüft, ob der Endzustand erreicht ist (wird auf jeden Fall im Zeitpunkt $p(n)$ erreicht):

$$E = \bigvee_{z \in E} zust_{p(n),z}$$

($\rightarrow$): Sei $x \in L$
$\Rightarrow \exists$ nichtdeterministische Rechnung der Länge $p(n)$, die in einen Endzustand führt.
$\Rightarrow$ Alle Teilformeln von F erhalten den Wert 1.
$\Rightarrow F(x)$ erhält den Wert 1.
$\Rightarrow F(x)$ ist erfüllbar.

($\leftarrow$) : Sei $F(x)$ erfüllbar.
$\Rightarrow \exists$ Belegung, die F und alle Teilformeln den Wert 1 annehmen läßt.

Insbesondere ist R erfüllt:
$\Rightarrow zust_{t,z}, pos_{t,i}, band_{t,i,a}$ können $\forall t$ als Konfiguration von M interpretiert werden.
Insbesondere ist A erfüllt:

für $t = 0$ kann aus den Variablenwerten die Startkonfiguration von M abgelesen werden.

Insbesondere sind $\ddot{U}_1, \ddot{U}_2$ erfüllt:
$\Rightarrow$ zwischten t und $t+1$ ist die Nachfolgekonfigurationsbedingung erfüllt.
$\Rightarrow \forall t = 0, 1, 2, \ldots$ ist eine mögliche nichtdeterministische Rechnung beschrieben.

Insbesondere ist E erfüllt:
$\Rightarrow$ Rechnung erreicht Endzustand.

Insgesamt gilt also :

$$x \in L(M)$$

Noch zu zeigen: F ist in polynomieller Zeit berechenbar:
Offenbar ist der Aufwand zur Erzeugung von F linear in der Länge von F.

$$\begin{aligned} \text{Wegen } |R| &= O(n^2) \\ |A| &= O(n) \\ |\ddot{U}_1| &= O(n^2) \\ |\ddot{U}_2| &= O(n^2) \\ |E| &= O(1) \\ \\ \text{gilt } |F| &= O(n^2) \end{aligned}$$

■

NP–Berechnungen: "guess and check"
Alle deterministischen Algorithmen zur Berechnung von SAT haben Komplexität $2^{O(n)}$.
(Z.B. systematisches Durchprobieren aller Eingabeformeln).
Da SAT NP–hart ist folgt:

$$NP \subseteq \bigcup_{p \ Polynom} TIME(2^{p(n)})$$