Jun.-Prof. Dr. Philipp Kindermann

1. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen für geographische Informationssysteme (WS 2024/25)

Aufgabe 1 – Hausdorff und Fréchet

Gegeben sind drei Polygonzüge $P=(p_1,\ldots,p_n)$ und $Q=(q_1,\ldots,q_m)$ und $Q'=(q_m,\ldots,q_1)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- a) $d_{fréchet}(P, Q) < d_{hdorff}(P, Q)$
- b) $d_{hdorff}(P, Q) = d_{hdorff}(P, Q')$
- c) $d_{hdorff}(Q, Q') = 0$
- d) $d_{fréchet}(P, Q) = d_{fréchet}(P, Q')$
- e) $d_{fréchet}(Q, Q') = 0$

Aufgabe 2 – Markow Studenten

Betrachten wir einen Studenten, der sich zu jedem Zeitpunkt in einem der Zustände aus $Z = \{Study, Party, Sleep\}$ befindet. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind wie folgt.

	$P[X_{n+1} = Party \mid X_n = Party] = 0,5$
$P[X_{n+1} = Study \mid X_n = Study] = 0,3$	$P[X_{n+1} = \texttt{Sleep} \mid X_n = \texttt{Party}] = 0.5$
$P[X_{n+1} = Party \mid X_n = Study] = 0,5$	$P[X_{n+1} = \mathtt{Study} \mid X_n = \mathtt{Sleep}] = \mathtt{0,3}$
$P[X_{n+1} = \texttt{Sleep} \mid X_n = \texttt{Study}] = 0,\!2$	$P[X_{n+1} = \mathtt{Party} \mid X_n = \mathtt{Sleep}] = \mathtt{0,3}$
$P[X_{n+1} = Study \mid X_n = Party] = 0,0$	$P[X_{n+1} = \text{Sleep} \mid X_n = \text{Sleep}] = 0,4$

- a) Zeichnen Sie das Zustandsübergangsdiagramm mit einem Knoten für jeden Zustand und Pfeilen, die die Übergangswahrscheinlichkeiten anzeigen.
- b) Ihnen wird vielleicht auffallen, dass unabhängig von der Anfangsverteilung ($P[X_1]$) die Wahrscheinlichkeitsverteilung für spätere Zeitschritte immer zur gleichen Verteilung konvergiert, wenn genügend Zeit vergeht.

Dies gilt nicht für alle möglichen Markow-Ketten, aber für diese spezielle Kette ist es tatsächlich wahr: Unabhängig von $P[X_1]$ konvergiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[X_n]$ für $n \to \infty$. Diese Grenzverteilung wird als *stationäre Verteilung* bezeichnet, definiert als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, bei der gilt: $P[X_{n+1}] = P[X_n]$ für eine bestimmte Markow-Kette. Berechnen Sie die stationäre Verteilung für die gegebene Markow-Kette und geben exakte Werte an.

Aufgabe 3 – Im Gefängnis (nur zu Besuch)

Wir betrachten nun das bekannte Brettspiel Monopoly, bei dem die Spieler auf einem Kreis von 40 Spielfeldern reisen (oder sich möglicherweise "im Gefängnis" befinden); siehe Abbildung 1(a) für eine Version des Spielbretts. Im Verlauf des Spiels können die Spieler Felder kaufen und tauschen, um später durch "Miete", die von anderen Spielern gezahlt wird, die auf diesen Feldern landen, Geld zu verdienen. Das bedeutet, dass Felder, auf denen die Spieler mit höherer Wahrscheinlichkeit landen, wertvoller sind.

Wir möchten die Bewegung eines Spielers auf dem Brett als Markow-Kette modellieren, um die stationäre Verteilung einfach berechnen zu können: Wenn das Spiel unendlich lange dauert, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler auf jedem Feld landet? Diese Information ist nützlich, um Kaufentscheidungen im Spiel zu treffen. In Abbildung 1(b) ist die stationäre Verteilung einer Version von Monopoly dargestellt, die auf diese Weise berechnet wurde.

Modellieren Sie eine einfache Version davon, wie ein Spieler während des Spiels das Brett umrundet, als Markow-Kette (eine Beschreibung in Worten genügt). Was sind die Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten? Erforschen Sie anschließend erweiterte Regeln und integrieren Sie einige davon in Ihr Modell, z.B.: ins Gefängnis kommen, aus dem Gefängnis herauskommen und Ereigniskarten.



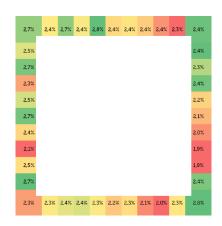


ABBILDUNG 1: (a) Eine Spielbrett von Monopoly. (b) Die stationäre Verteilung unter Berücksichtigung der Ereigniskarten ist farbcodiert, wobei rot eine niedrige Wahrscheinlichkeit und grün eine hohe Wahrscheinlichkeit darstellt. Zusätzlich gibt es eine Wahrscheinlichkeit von 5,5%, im Gefängnis zu sein.