Algorithmik
Fachbereich IV – Informatik
Universität Trier

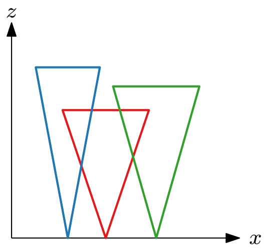
Trier, den 17. Dezember 2024

Jun.-Prof. Dr. Philipp Kindermann

3. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen für geographische Informationssysteme (WS 2024/25)

Aufgabe 1 – 1D-Zooming

Betrachtet man Kartenbeschriftung in 1D, so werden Labels als offene Intervalle auf der x-Achse repräsentiert, die jeweils an einem festen Punkt verankert sind. Während das Zoomen eines Labels im zweidimensionalen Fall durch eine Pyramide im Raum beschrieben werden kann, beschreibt man das Zoomen eines Labels im eindimensionalen Fall entsprechend als Dreieck in der Ebene:



Betrachten Sie das Problem 1DZOOMING:

Gegeben: Menge $\mathcal{L}$ von (offenen) Labeldreiecken mit verfügbaren Intervallen $(0, S_L)$ für alle $L \in \mathcal{L}$

Gesucht: Aktive Intervalle $(0, A_L)$ für alle $L \in \mathcal{L}$, so dass $\sum_{L \in \mathcal{L}} A_L$ maximiert wird.

a) Stellen Sie ein dynamisches Programm auf, das 1DZOOMING optimal löst.

b) Funktioniert Ihr dynamisches Programm auch, wenn nicht verlangt wird, dass die aktiven Intervalle bei 0 beginnen?

c) Überlegen Sie sich einen Anwendungsfall für das eindimensionale Zoomen.

Aufgabe 2 – Schubfachprinzip

Zeigen Sie folgende Aussagen mit Hilfe des Schubfachprinzips.

a) Sei $S \subseteq \{1, \dots, 100\}, |S| = 51$ eine Menge von 51 unterschiedlichen ganzen Zahlen zwischen 1 und 100.

   Zeigen Sie, dass es in S mindestens zwei aufeinander folgende Zahlen gibt.

b) Sei $T \subseteq \{1, \dots, 100\}, |T| = 10$ eine Menge von 10 unterschiedlichen ganzen Zahlen zwischen 1 und 100.

   Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene nicht-leere Teilmenge $T_1 \subseteq T, T_2 \subseteq T, T_1 \neq T_2$ von T gibt, so dass $\sum_{x \in T_1} x = \sum_{x \in T_2} x$.

Aufgabe 3 – Statische Kartenbeschriftung mit Line Stabbing

Betrachten Sie das statische Beschriftungsproblem im 1P Model. Nehmen Sie an, dass alle Label gleich hoch sind.

Geben Sie einen Faktor-$(1/2)$-Approximationsalgorithmus für das Problem an.

Aufgabe 4 – EPTAS für LabelRotationMaxTotal

Wir wollen den Approximationsfaktor des EPTAS für LabelRotationMaxTotal beweisen. Seien $k = \lceil 2/\varepsilon \rceil$, $\mathcal{L}$ die gegebenen Label, $\mathcal{A}$ die Lösung des EPTAS und $\mathcal{O}$ die optimale Lösung. Wir schreiben vereinfacht $|A| = \min_L |A_L|$ für die Gesamtlänge aller aktiven Bereiche in einer Beschriftung A.

Wir unterteilen $\mathcal{L}$ in k^2 Gruppen $\mathcal{L}_{i,j}, 0 \leq i, j < k$. Jede Gruppe $\mathcal{L}_{i,j}$ enthält genau die Label, die eine i-te vertikale und j-te horizontale Linie (modulo k) schneidet.

Jede Teilinstanz, die der Algorithmus bildet, kann dann durch $\mathcal{L}^{a,b} = \cup_{i \neq a, j \neq b} \mathcal{L}_{i,j}$ beschrieben werden, also indem man alle Labels entfernt, die eine a-te vertikale oder eine b-te horizontale Linie (modulo k) schneiden.

Sei nun $\mathcal{A}^{a,b}$ die (optimale) Lösung des Algorithmus für die Teilinstanz $\mathcal{L}^{a,b}$. Wir definieren genauso $\mathcal{O}^{a,b} = \mathcal{O} \cap \mathcal{L}^{a,b}$ und $\mathcal{O}_{i,j} = \mathcal{O} \cap \mathcal{L}_{i,j}$.

a) Zeigen Sie: $|\mathcal{A}^{a,b}| \geq \sum_{i \neq a, j \neq b} |\mathcal{O}_{i,j}|$ für alle $0 \leq a, b < k$.

b) Zeigen Sie: $\sum_{0 \leq a,b < k} |\mathcal{A}^{a,b}| \geq (k-1)^2 |\mathcal{O}|$.

c) Zeigen Sie: Der Algorithmus ist eine $\frac{(k-1)^2}{k^2}$-Approximation.

d) Zeigen Sie: Der Algorithmus ist eine $(1-\varepsilon)$-Approximation.