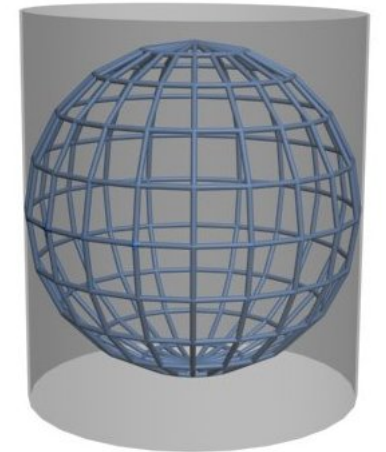
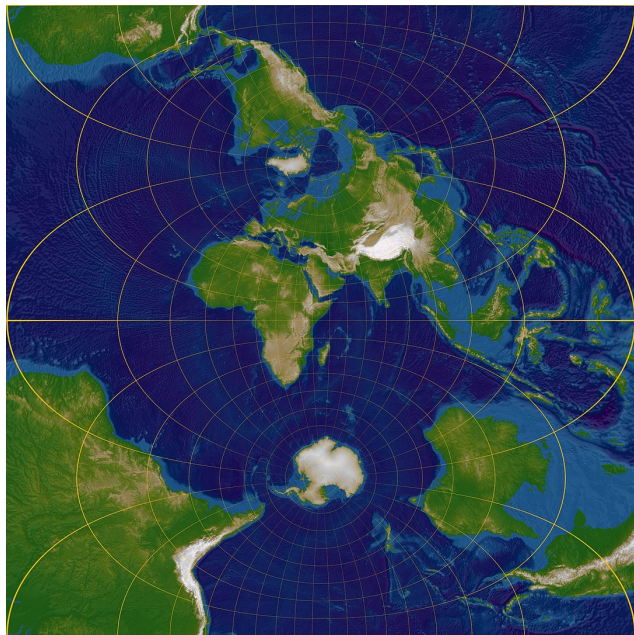


Algorithmen für geographische Informationssysteme

1. Vorlesung Einführung & Geodäsie

Teil I: Einführung



Geoinformatik



Geoinformatik

Geo-



Geoinformatik

2 - 3



Geo-

-informatik

Geoinformatik

2 - 4



Geo-

Geobotanik

-informatik

Geoinformatik

2 - 5



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

-informatik

Geoinformatik

2 - 6



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

-informatik

Geoinformatik

2 - 7



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

-informatik

Geoinformatik

2 - 8



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

Geomatik

-informatik

Geoinformatik

2 - 9



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

Geomatik

Geowissenschaften

-informatik

Geoinformatik

2 - 10



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

Geomatik

Geowissenschaften

...

-informatik



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

Geomatik

Geowissenschaften

...

-informatik

Wirtschaftsinformatik



Geo-

-informatik

Geobotanik

Wirtschaftsinformatik

Geodäsie

Luft- und Raumfahrtinformatik

Geographie

Geologie

Geomatik

Geowissenschaften

...



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

Geomatik

Geowissenschaften

...

-informatik

Wirtschaftsinformatik

Luft- und Raumfahrtinformatik

Bioinformatik



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

Geomatik

Geowissenschaften

...

-informatik

Wirtschaftsinformatik

Luft- und Raumfahrtinformatik

Bioinformatik

technische Informatik



Geo-

Geobotanik

Geodäsie

Geographie

Geologie

Geomatik

Geowissenschaften

...

-informatik

Wirtschaftsinformatik

Luft- und Raumfahrtinformatik

Bioinformatik

technische Informatik

Medieninformatik



Geo-

-informatik

Geobotanik

Wirtschaftsinformatik

Geodäsie

Luft- und Raumfahrtinformatik

Geographie

Bioinformatik

Geologie

technische Informatik

Geomatik

Medieninformatik

Geowissenschaften

Sozialinformatik

...



Geo-

-informatik

Geobotanik

Wirtschaftsinformatik

Geodäsie

Luft- und Raumfahrtinformatik

Geographie

Bioinformatik

Geologie

technische Informatik

Geomatik

Medieninformatik

Geowissenschaften

Sozialinformatik

...

...

Geoinformatik

3 - 1



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

raumbezogener Information



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung

raumbezogener Information



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung

raumbezogener Information

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse

raumbezogener Information

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



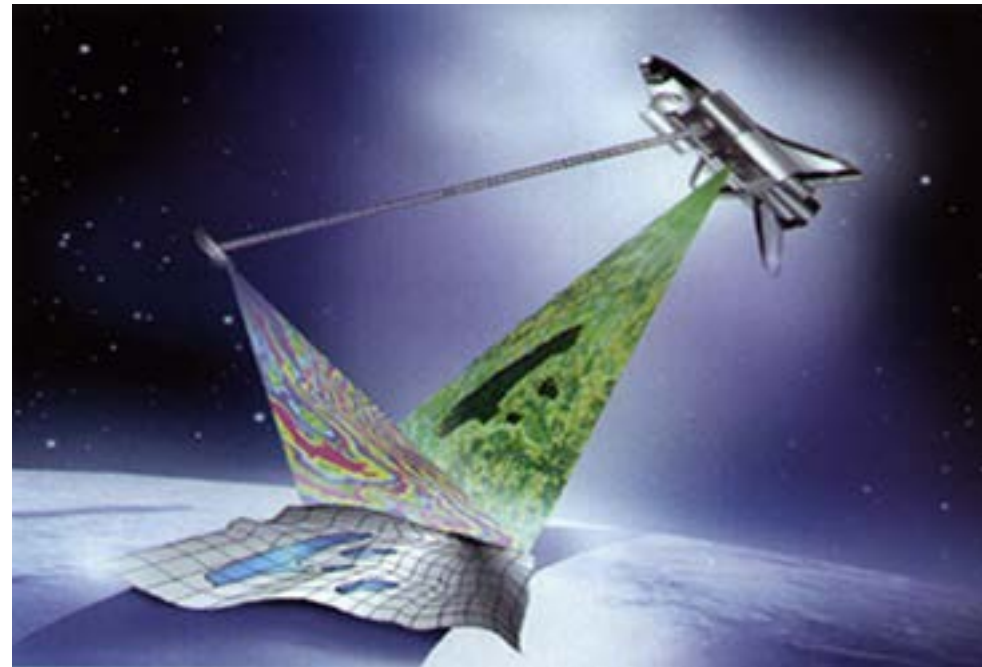
Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

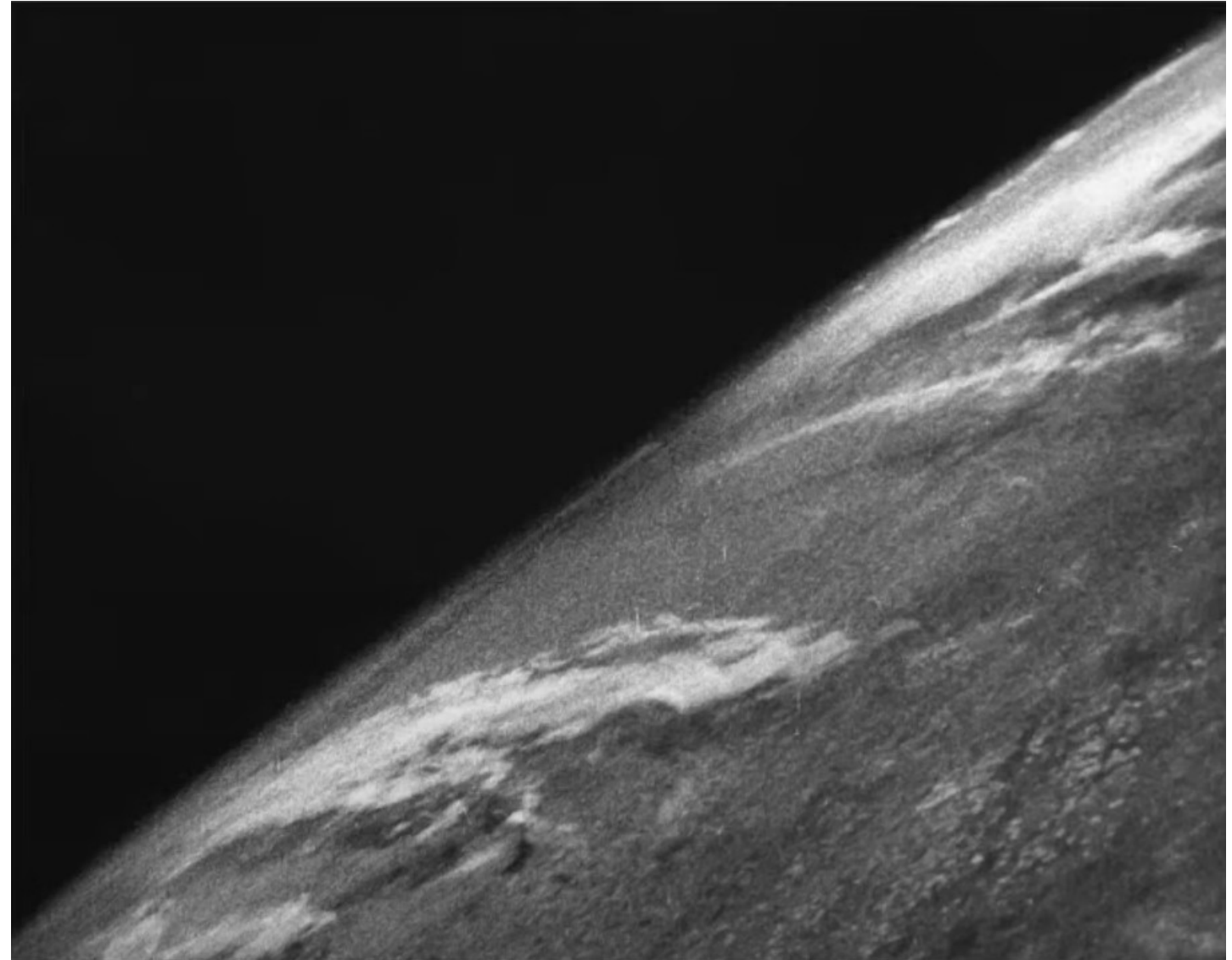
raumbezogener Information



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



Erstes Foto der Erde, aus einer V2 Rakete, 1946

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



Meteosat Satellit, 1. Generation (1977–2017)

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



EUMETSAT Kontrollraum in Darmstadt
(EUropean organisation for the exploitation of METeorological SATellites)

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation



```
SELECT superhero.name
FROM city, superhero
WHERE ST_Contains(city.geom, superhero.geom)
AND city.name = 'Gotham';
```

raumbezogener Information

Geoinformatik



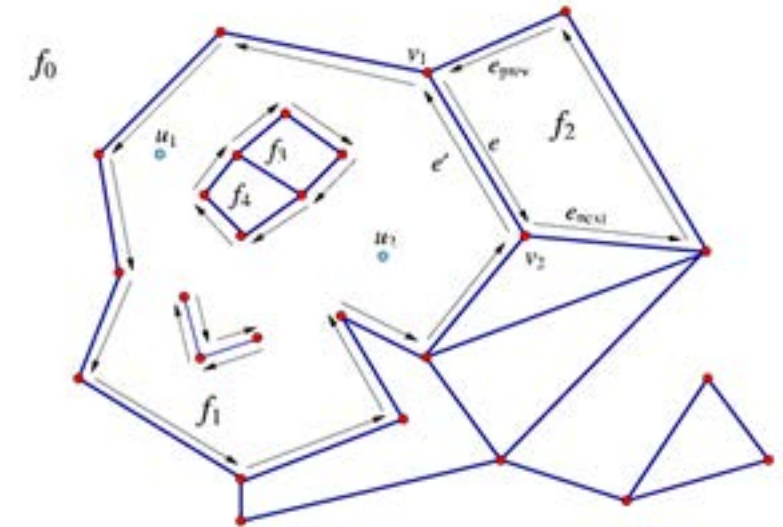
Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation



```
SELECT superhero.name
FROM city, superhero
WHERE ST_Contains(city.geom, superhero.geom)
AND city.name = 'Gotham';
```

raumbezogener Information



Geoinformatik



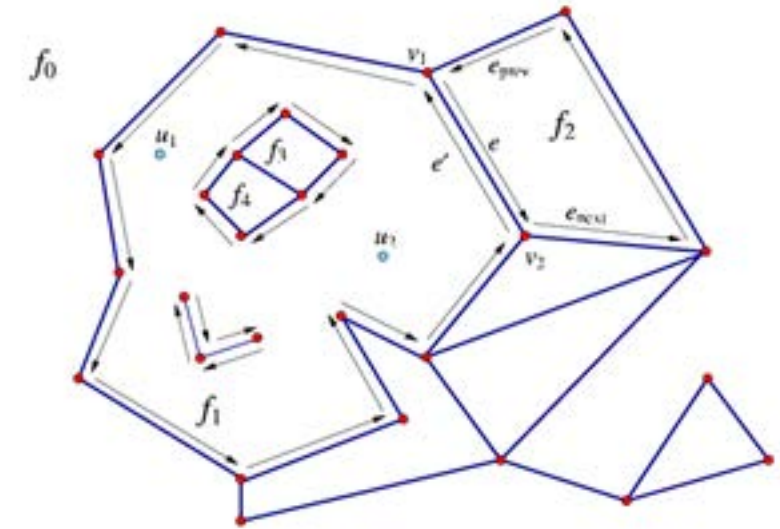
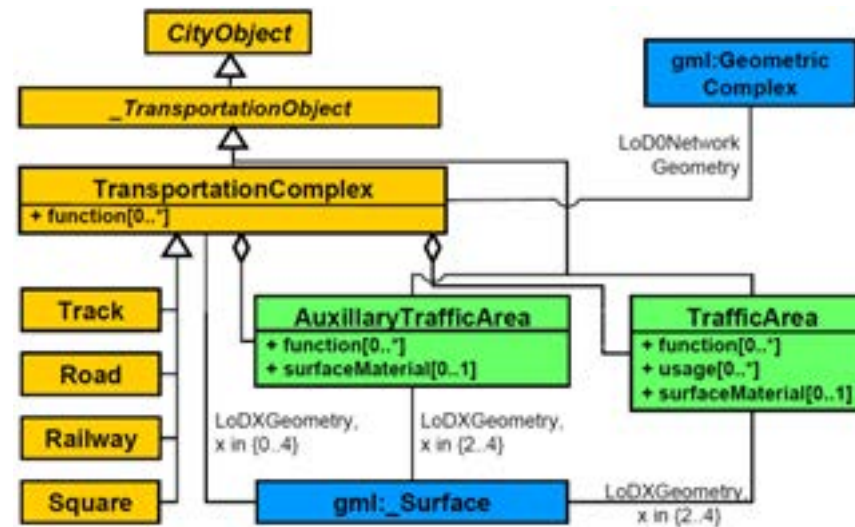
Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation



```
SELECT superhero.name
FROM city, superhero
WHERE ST_Contains(city.geom, superhero.geom)
AND city.name = 'Gotham';
```

raumbezogener Information



Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



*Ein Bundesland sollte zwischen **5 Mio** und **18 Mio** Einwohner haben, um effektiv wirtschaften zu können.
(www.tagesschau.de, 18.7.2006)*

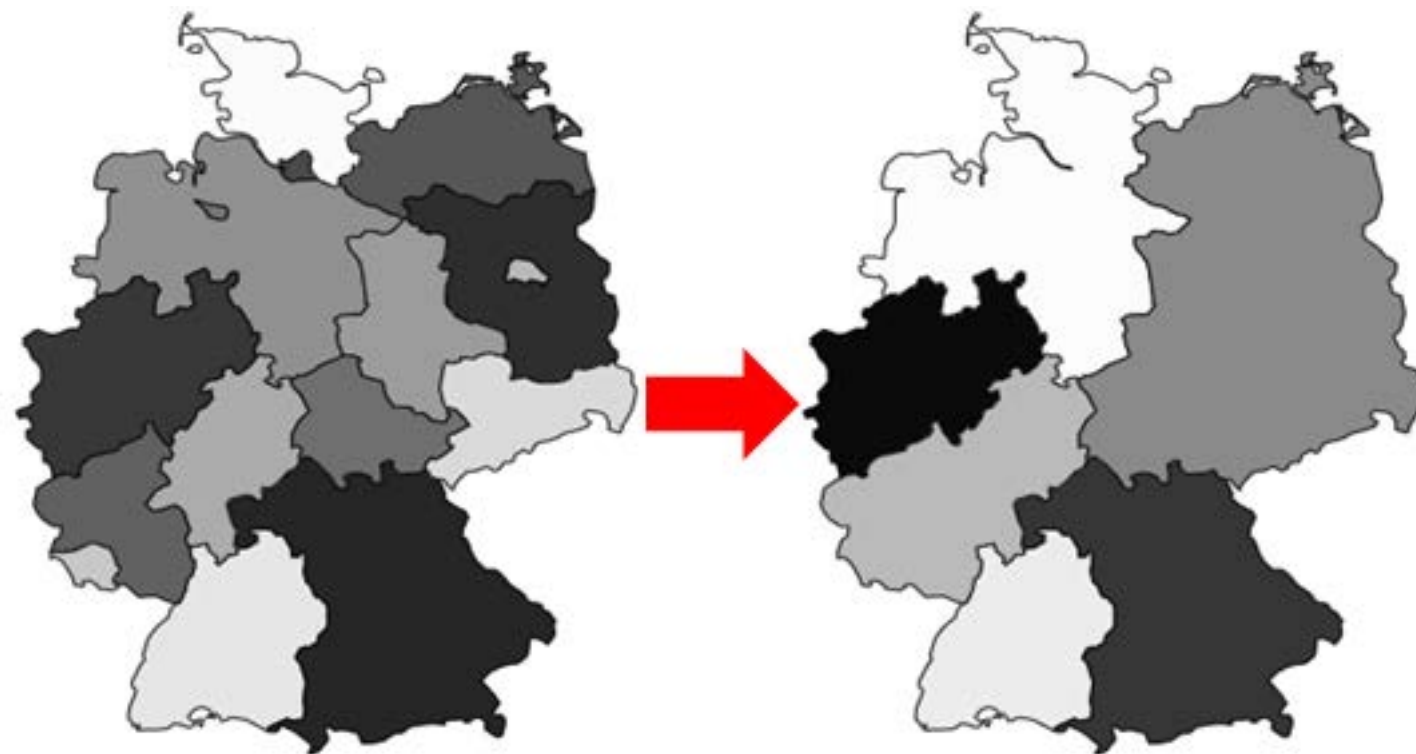
Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



*Ein Bundesland sollte zwischen **5 Mio** und **18 Mio** Einwohner haben, um effektiv wirtschaften zu können.
(www.tagesschau.de, 18.7.2006)*

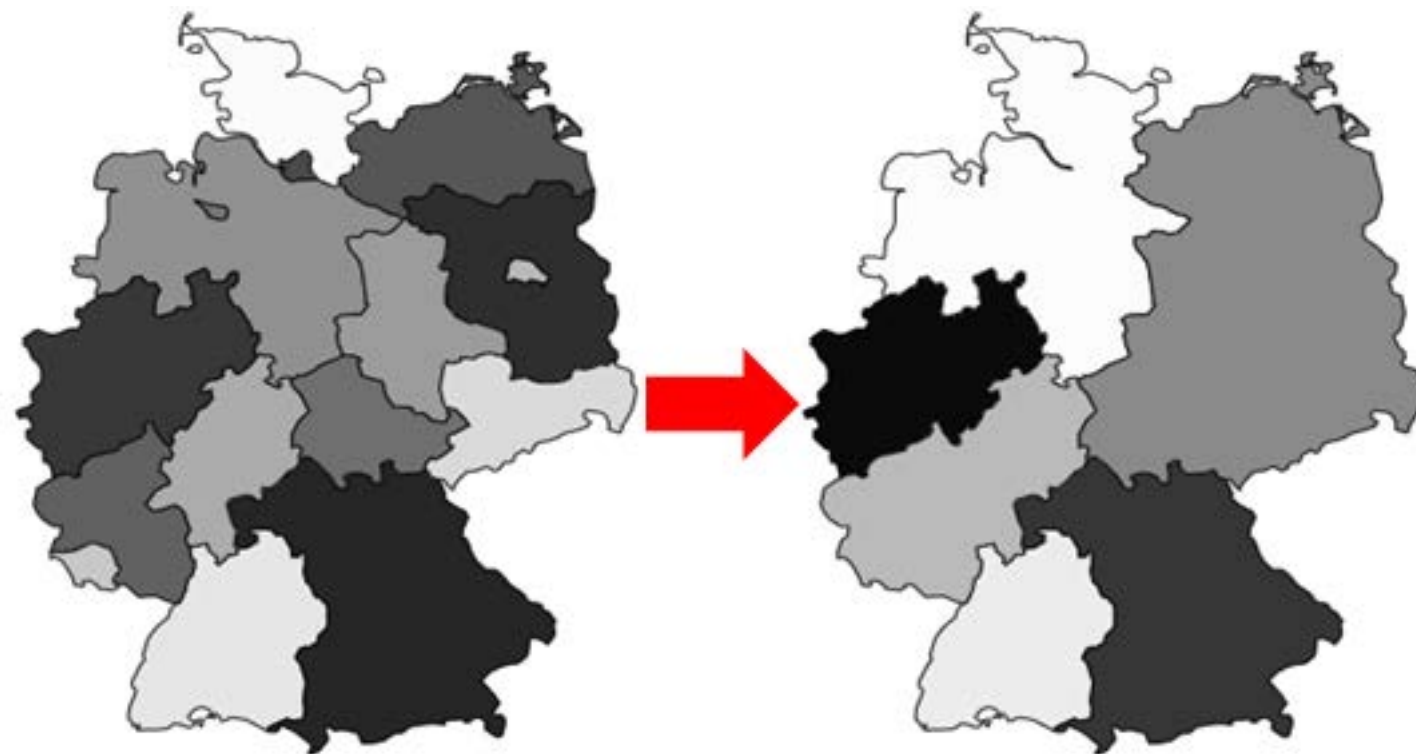
Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



*Ein Bundesland sollte zwischen **5 Mio** und **18 Mio** Einwohner haben, um effektiv wirtschaften zu können.
(www.tagesschau.de, 18.7.2006)*

(minimale Grenzlänge)

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information

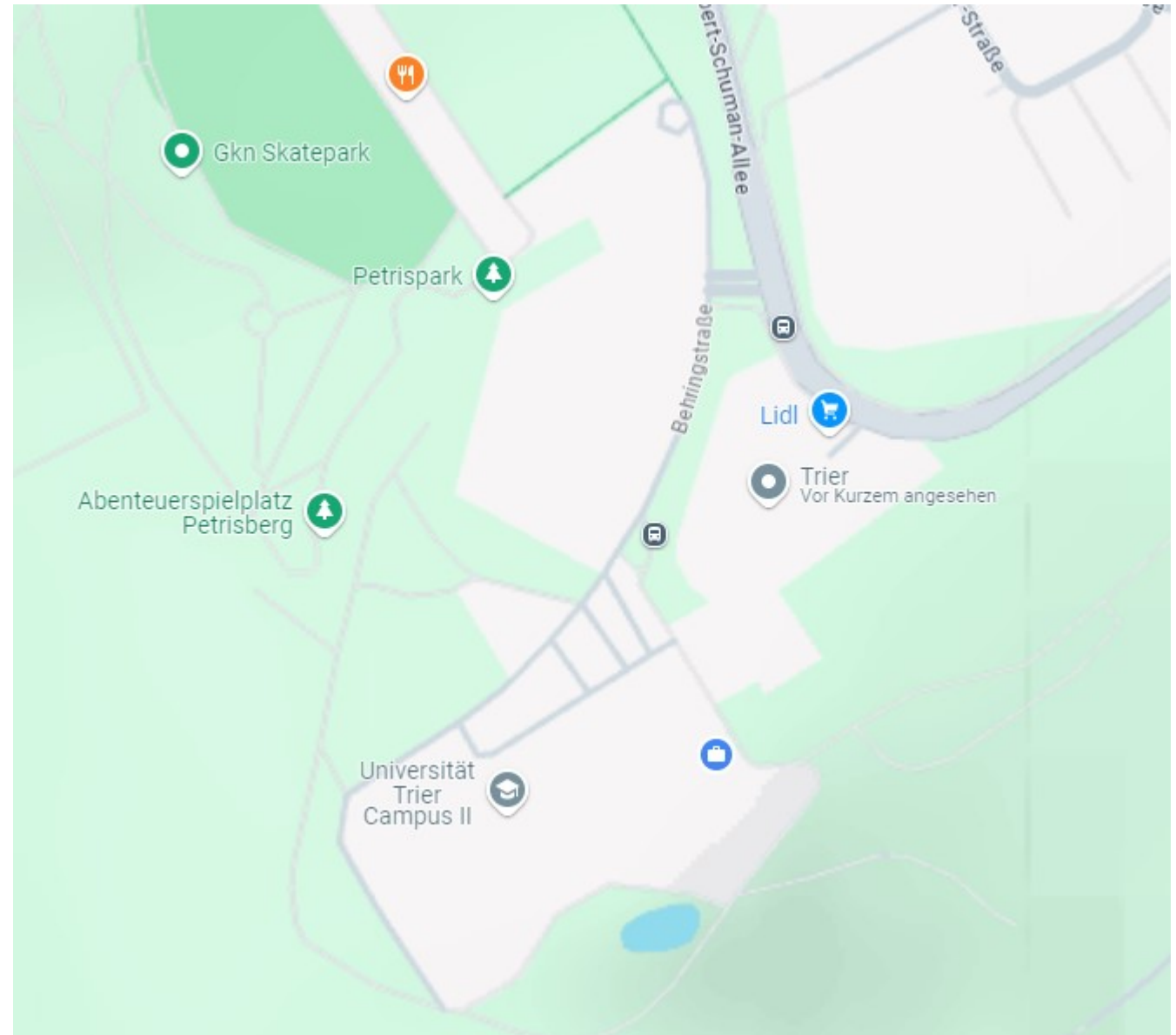
Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



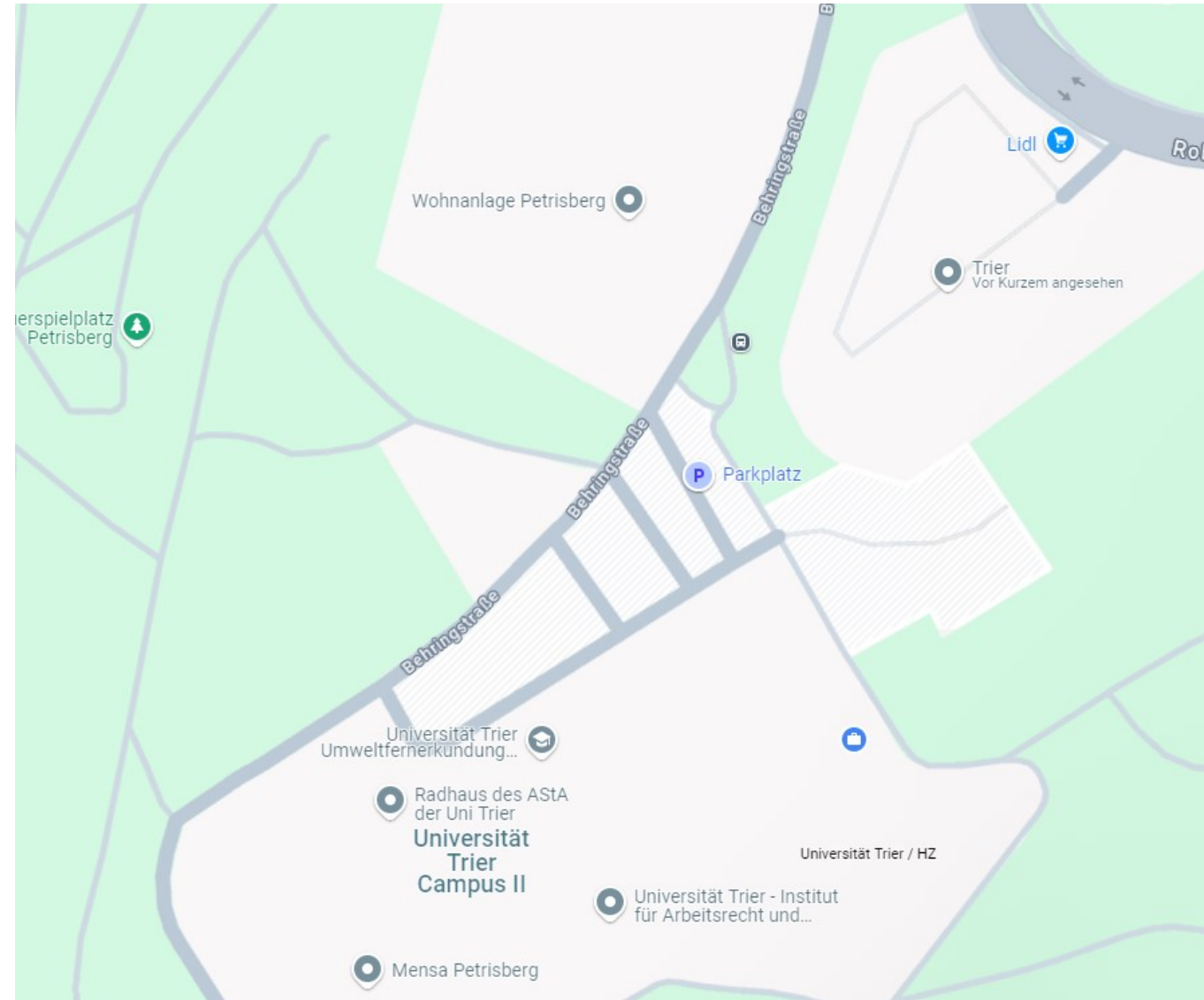
Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



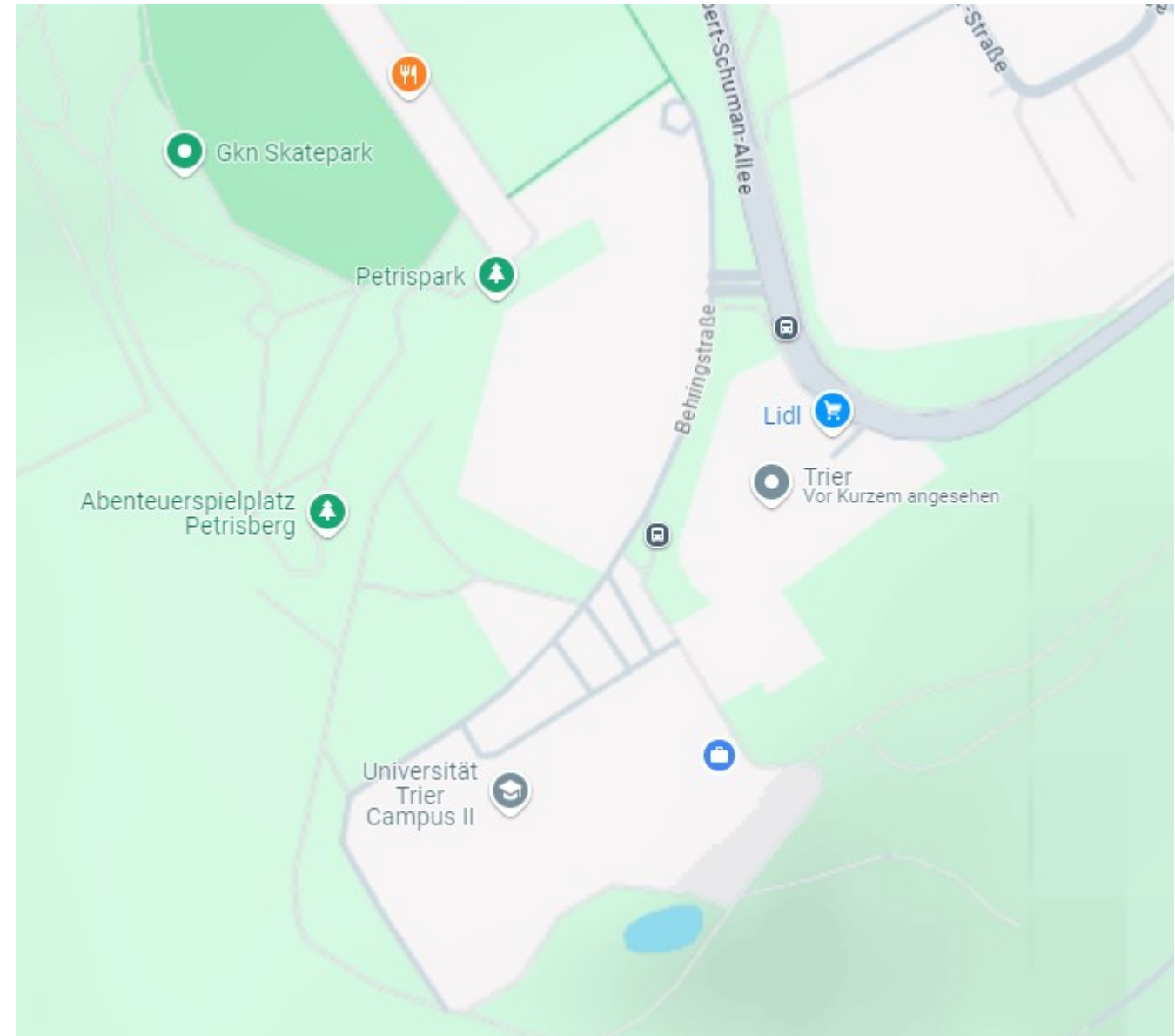
Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



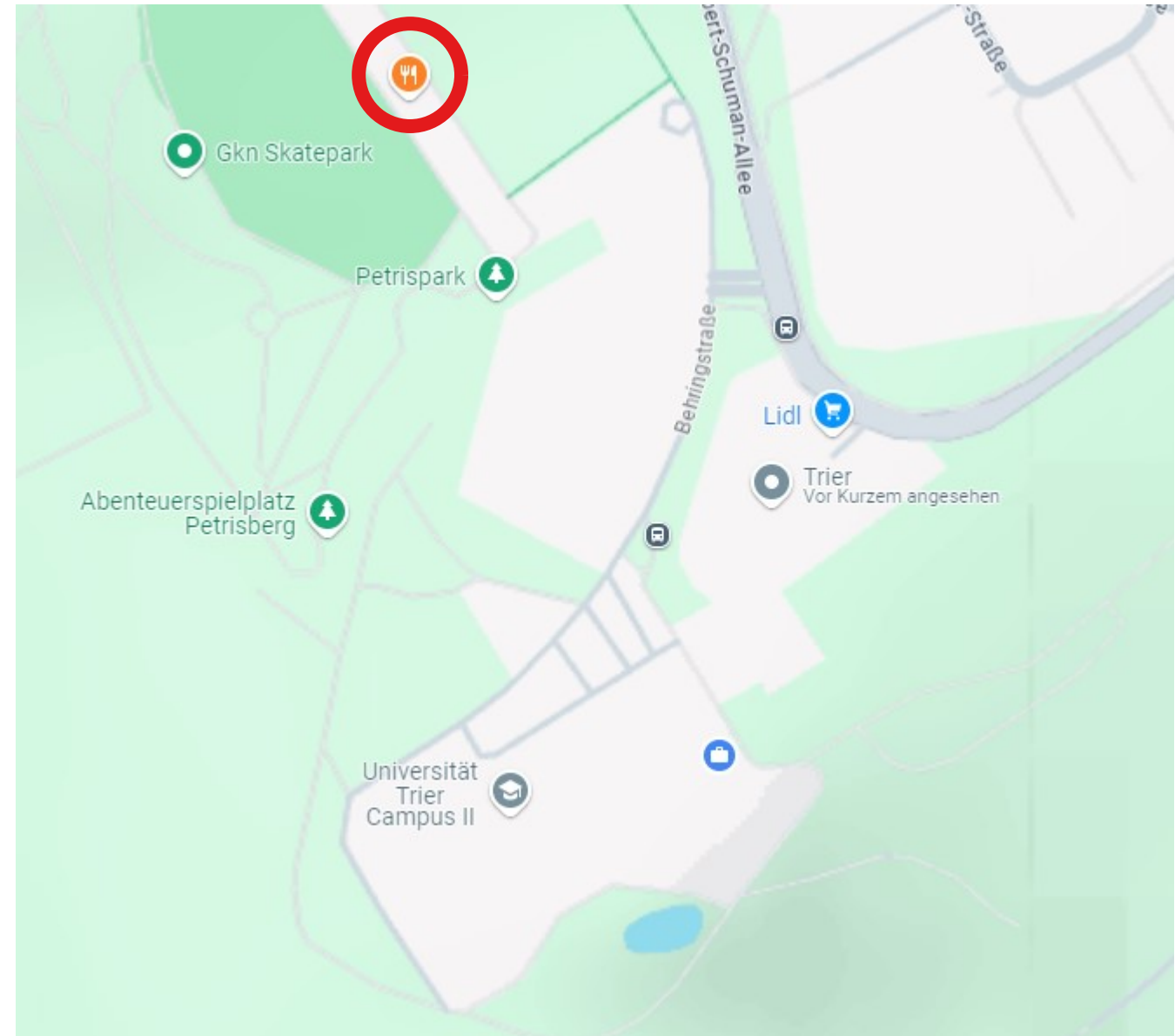
Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für Geographische Informationssysteme (GIS)

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für **Geographische Informationssysteme (GIS)**

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



London U-Bahn-Plan 1908

Geoinformatik



Wissenschaftliche Grundlage für Geographische Informationssysteme (GIS)

- Erfassung
- Verwaltung
- Analyse
- Präsentation

raumbezogener Information



Software



	Platzhirsche	freie Software

Software



	Platzhirsche	freie Software
Desktop-GIS		

Software



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



ArcGIS

Software



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



ArcGIS



QGIS
(Vektor)

Software

4 - 5



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



ArcGIS



QGIS
(Vektor)



Grass
(Raster)

Software



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



QGIS
(Vektor)



Grass
(Raster)

räumliche Datenbank

Software

4 - 7



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



ArcGIS



QGIS
(Vektor)



Grass
(Raster)

räumliche Datenbank



Software

4 - 8



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



QGIS
(Vektor)



Grass
(Raster)

räumliche Datenbank



Software

4 - 9



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



QGIS
(Vektor)



Grass
(Raster)

räumliche Datenbank



Programmierbibliothek

Software



Platzhirsche

freie Software

Desktop-GIS



ArcGIS



QGIS
(Vektor)

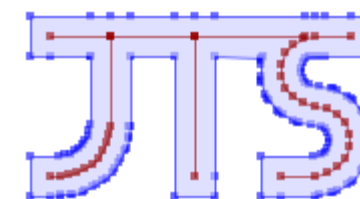


Grass
(Raster)

räumliche Datenbank



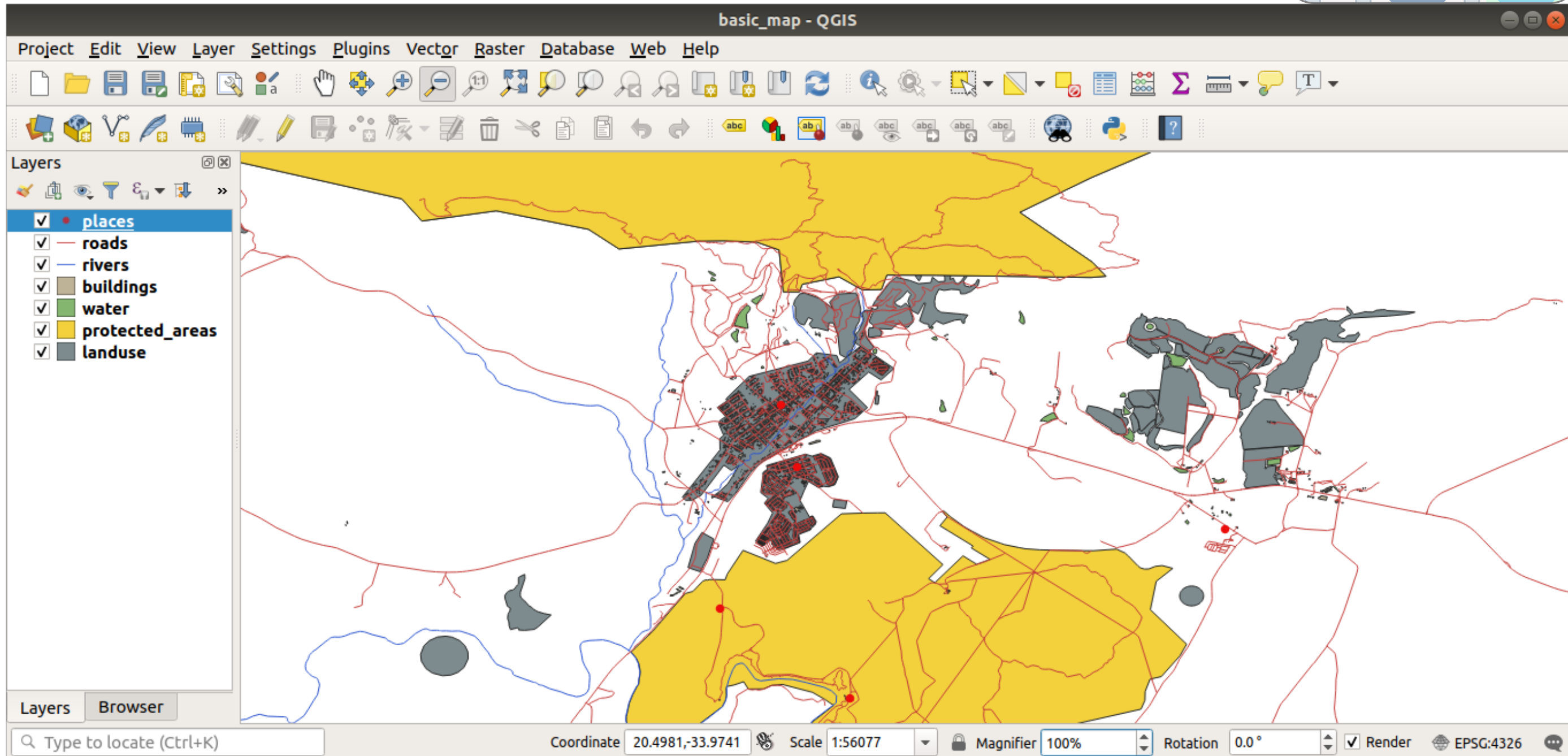
Programmierbibliothek



JTS Topology Suite

Software

4 - 11



Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen



- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert

Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen

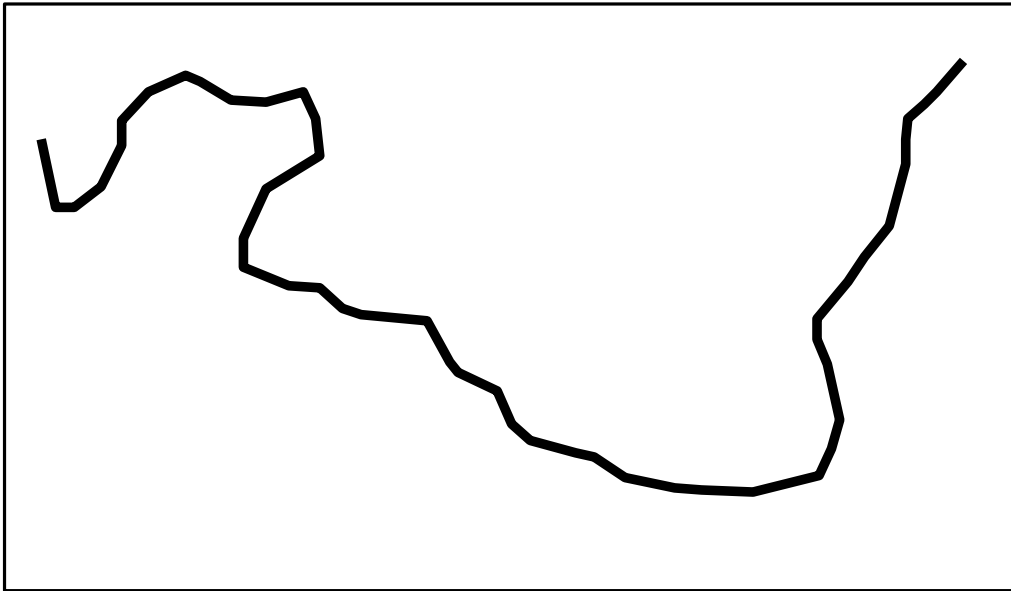


- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert
- Detailgrad abhängig vom Maßstab (Generalisierung)

Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen



- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert
- Detailgrad abhängig vom Maßstab (Generalisierung)

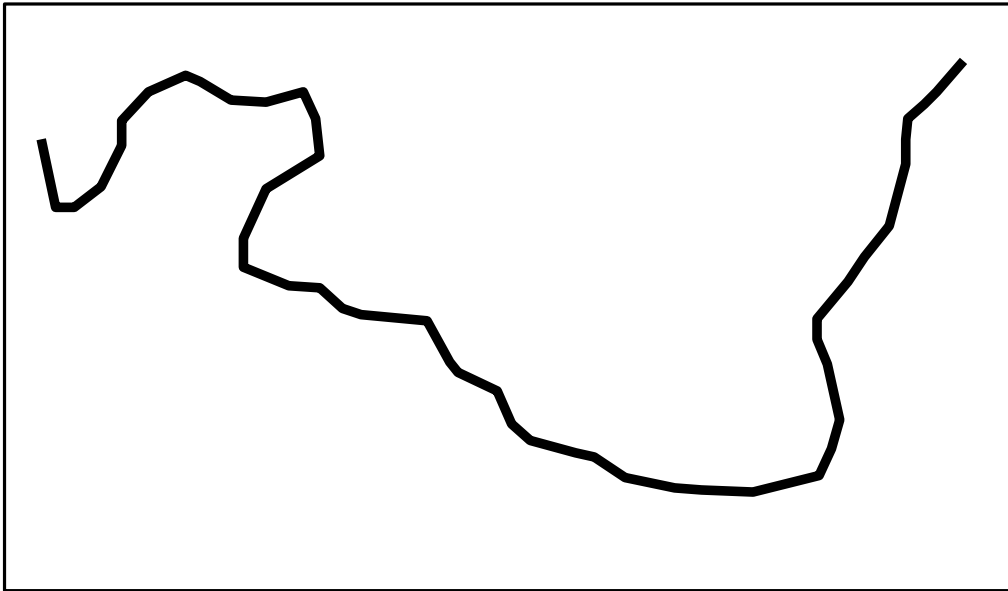


Maßstab 1 : X

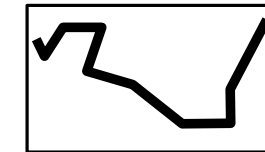
Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen



- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert
- Detailgrad abhängig vom Maßstab (Generalisierung)



Maßstab 1 : X

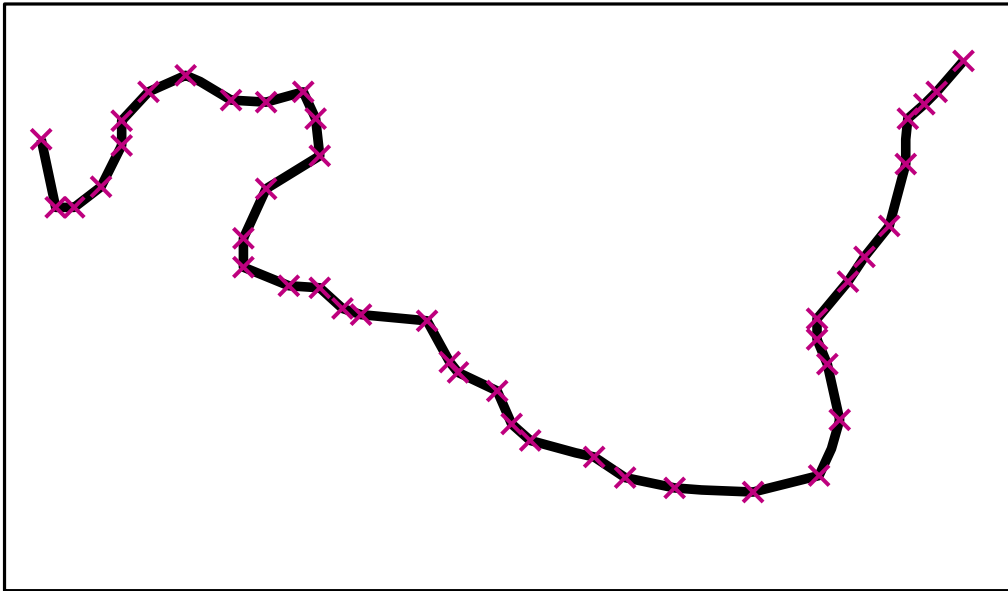


Maßstab 1 : (4X)

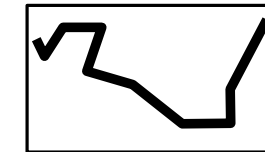
Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen



- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert
- Detailgrad abhängig vom Maßstab (Generalisierung)



Maßstab 1 : X

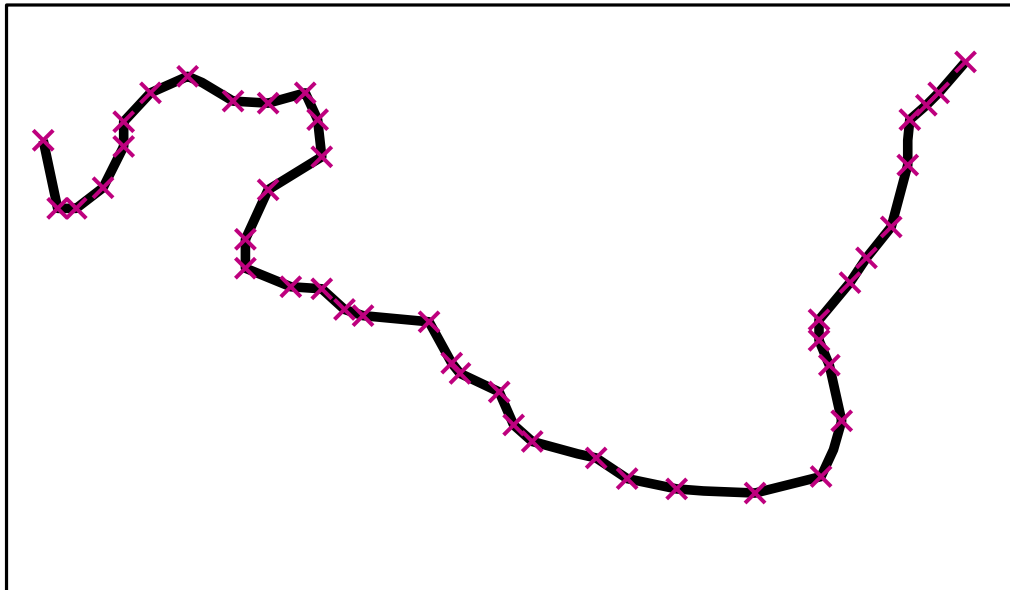


Maßstab 1 : (4X)

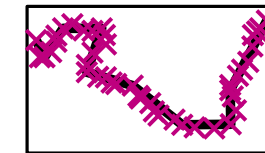
Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen



- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert
- Detailgrad abhängig vom Maßstab (Generalisierung)



Maßstab 1 : X

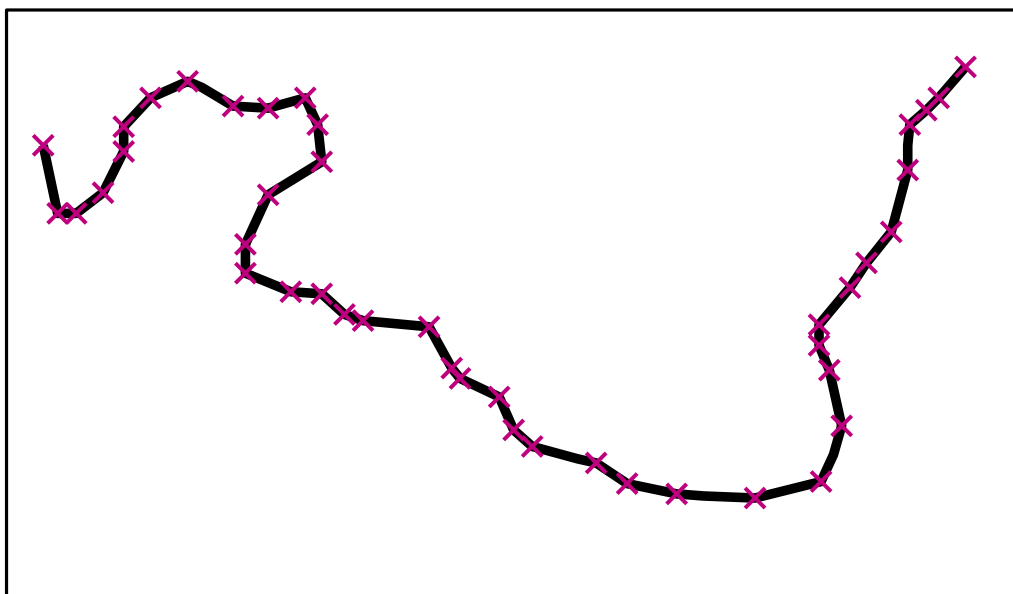


Maßstab 1 : (4X)

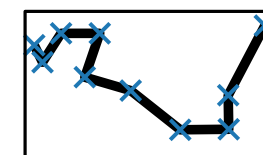
Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen



- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert
- Detailgrad abhängig vom Maßstab (Generalisierung)



Maßstab 1 : X

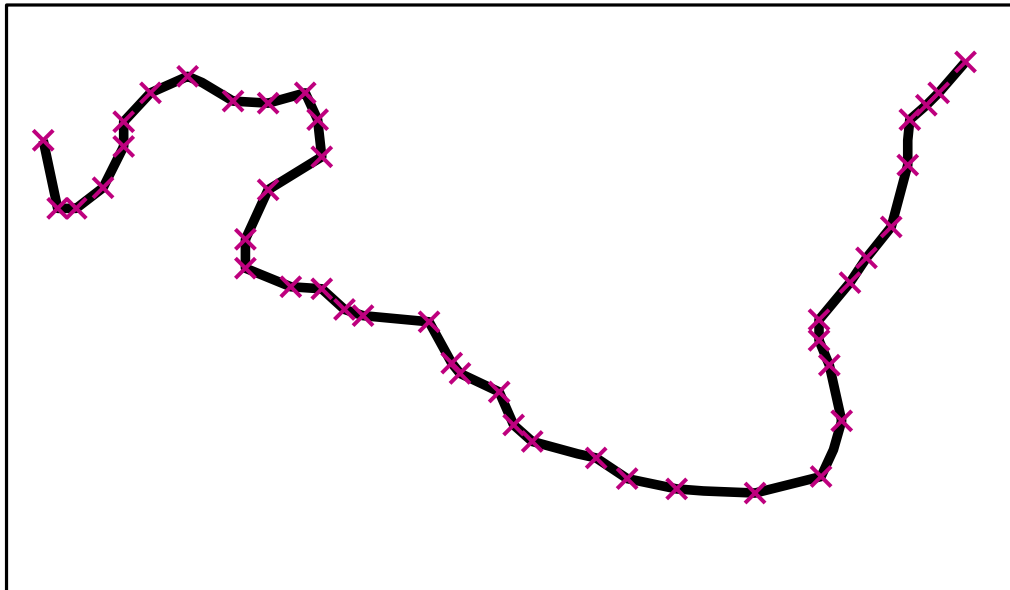


Maßstab 1 : (4X)

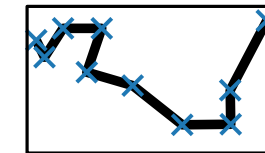
Beispiel 1: Vereinfachung von Kantenzügen



- viele Objekte in Landkarten werden durch Polygone oder Kantenzüge repräsentiert
- Detailgrad abhängig vom Maßstab (Generalisierung)



Maßstab 1 : X



Maßstab 1 : (4X)

Geg. Kantenzug P

Ges. Kantenzug Q mit weniger Knoten und kleinem Fehler $|P - Q|$

Beispiel 2: Schematisierung von Polygonen



- schematische Karten nutzen oft eingeschränkte Kantenrichtungen

Beispiel 2: Schematisierung von Polygonen



- schematische Karten nutzen oft eingeschränkte Kantenrichtungen
- Polygonflächen müssen geeignet schematisiert werden

Beispiel 2: Schematisierung von Polygonen



- schematische Karten nutzen oft eingeschränkte Kantenrichtungen
- Polygonflächen müssen geeignet schematisiert werden



Beispiel 2: Schematisierung von Polygonen

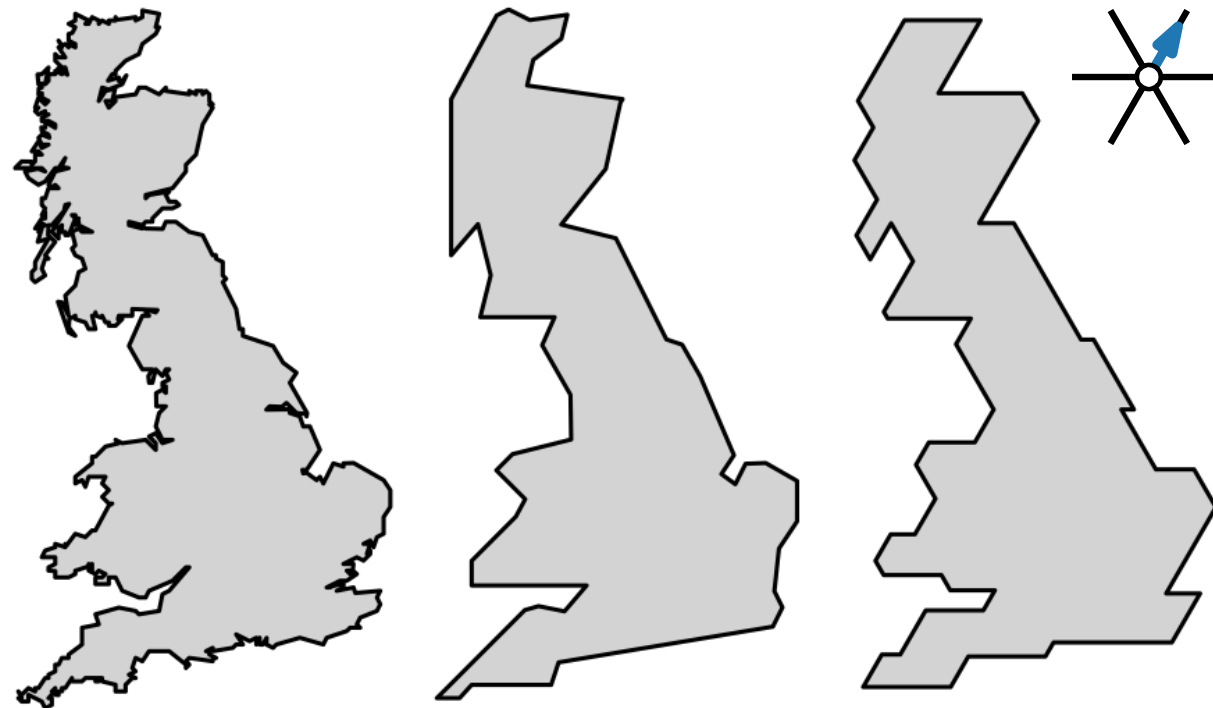


- schematische Karten nutzen oft eingeschränkte Kantenrichtungen
- Polygonflächen müssen geeignet schematisiert werden



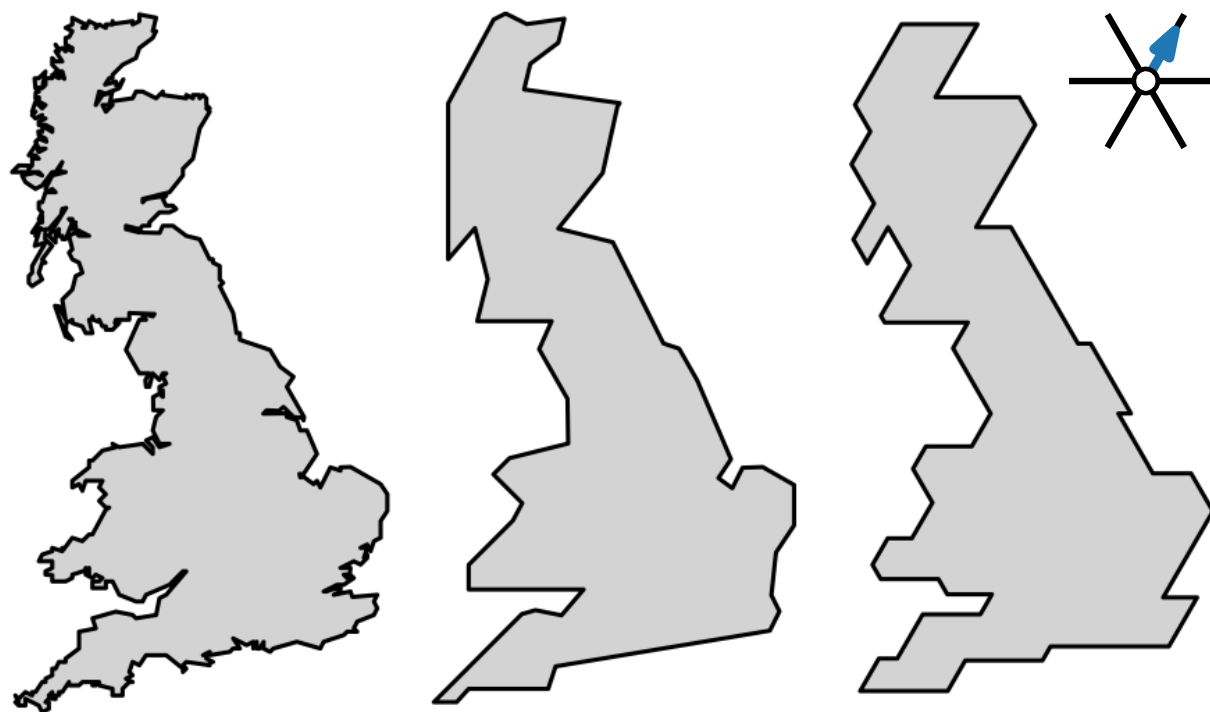
Beispiel 2: Schematisierung von Polygonen

- schematische Karten nutzen oft eingeschränkte Kantenrichtungen
- Polygonflächen müssen geeignet schematisiert werden



Beispiel 2: Schematisierung von Polygonen

- schematische Karten nutzen oft eingeschränkte Kantenrichtungen
- Polygonflächen müssen geeignet schematisiert werden



Geg. Polygon P mit Fläche A , Richtungsmenge $\mathcal{C}$

Ges. $\mathcal{C}$ -orientiertes Polygon Q mit gleicher Fläche A und kleinem Fehler $|P - Q|$

Beispiel 3: Flächenkartogramme



- abstrakte statistische thematische Karten nutzen u.a. verzerrte proportionale Flächen

Beispiel 3: Flächenkartogramme

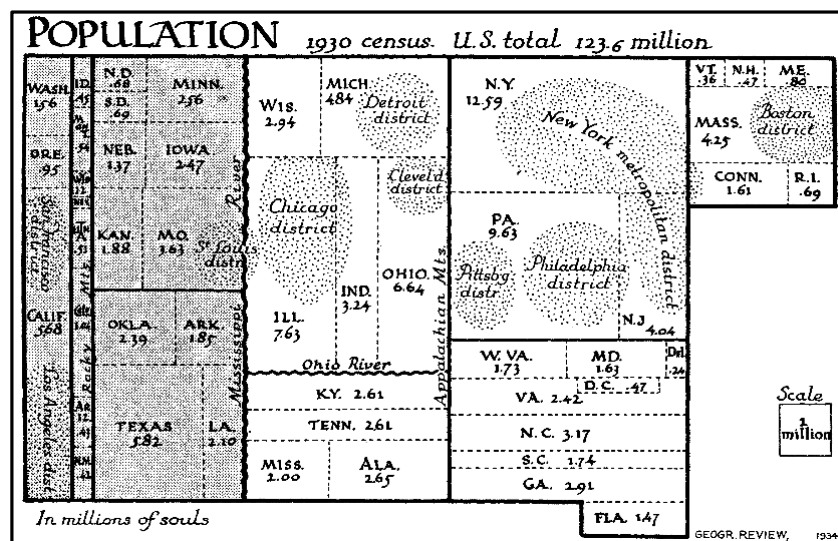


- abstrakte statistische thematische Karten nutzen u.a. verzerrte proportionale Flächen
- proportionale Kontaktrepräsentation des Dualgraphs

Beispiel 3: Flächenkartogramme



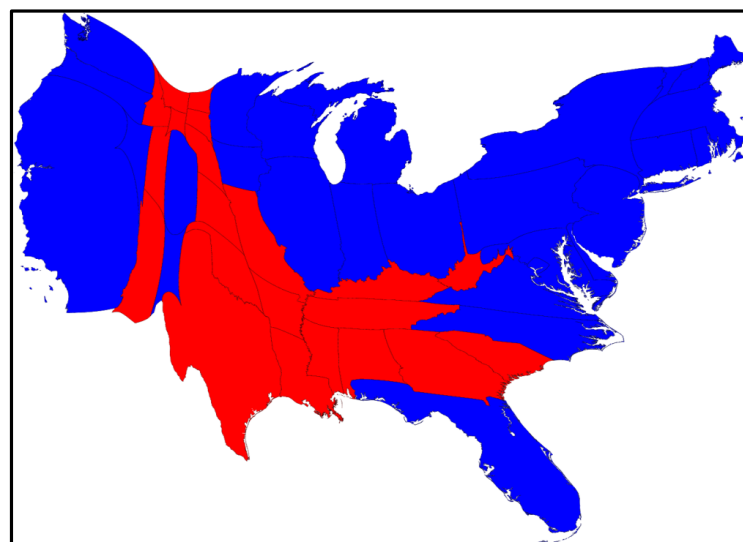
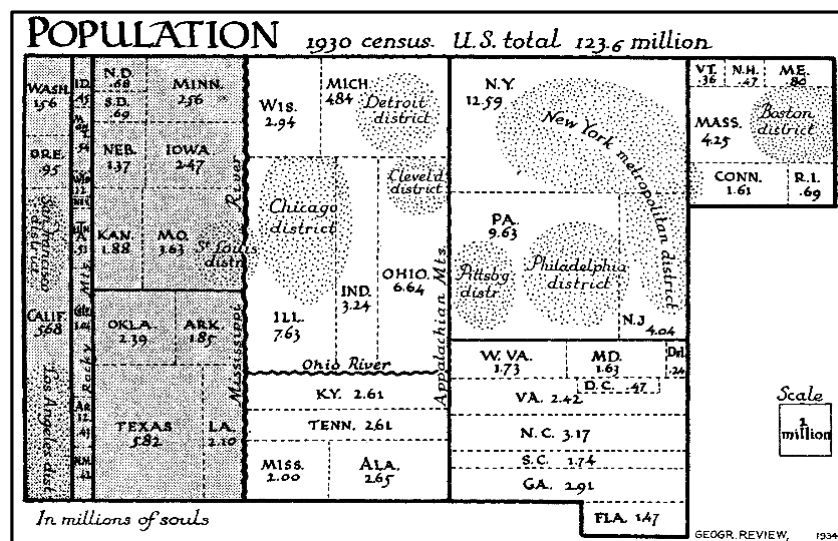
- abstrakte statistische thematische Karten nutzen u.a. verzerrte proportionale Flächen
- proportionale Kontaktrepräsentation des Dualgraphs



Beispiel 3: Flächenkartogramme



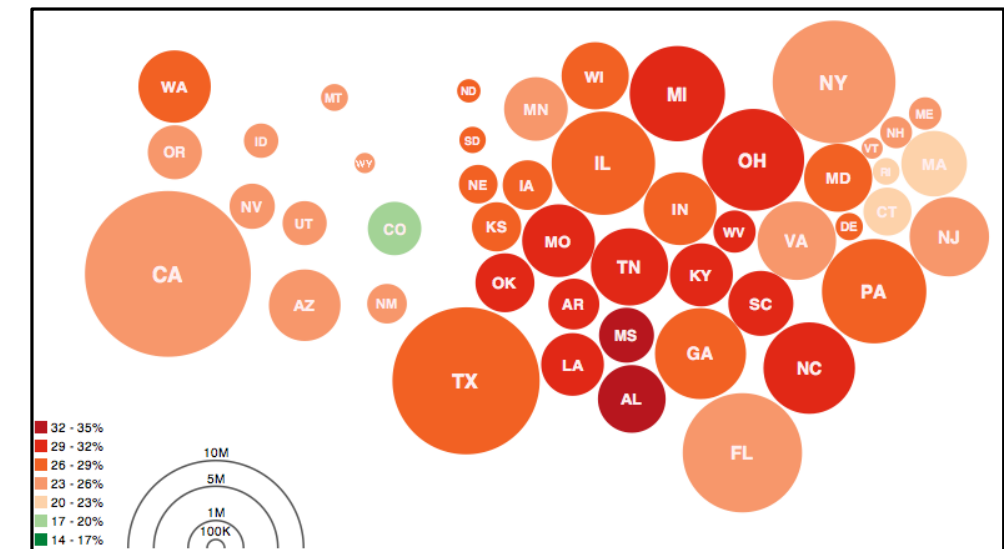
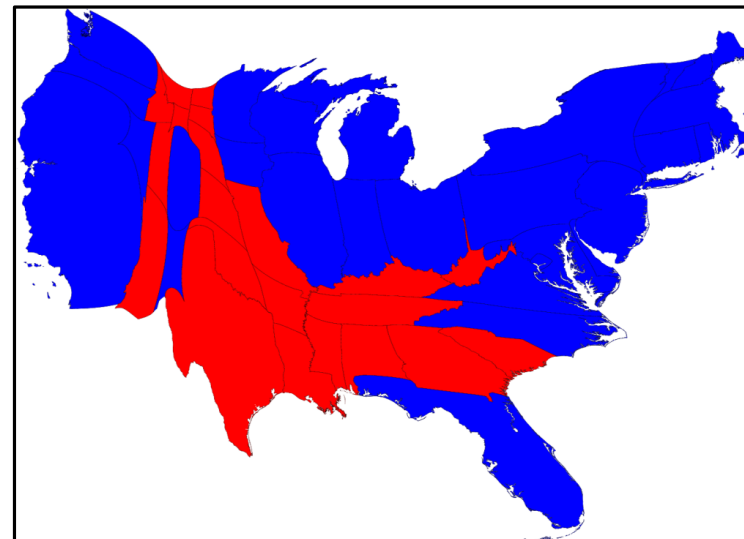
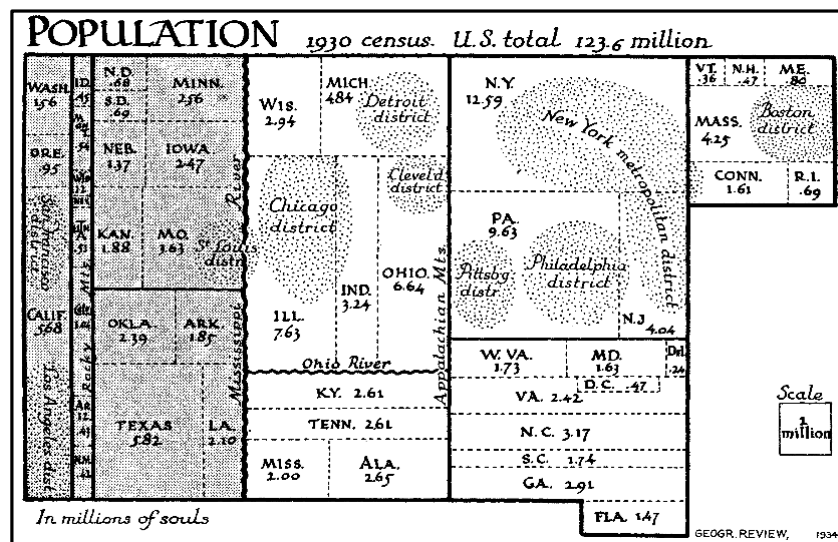
- abstrakte statistische thematische Karten nutzen u.a. verzerrte proportionale Flächen
- proportionale Kontaktrepräsentation des Dualgraphs



Beispiel 3: Flächenkartogramme

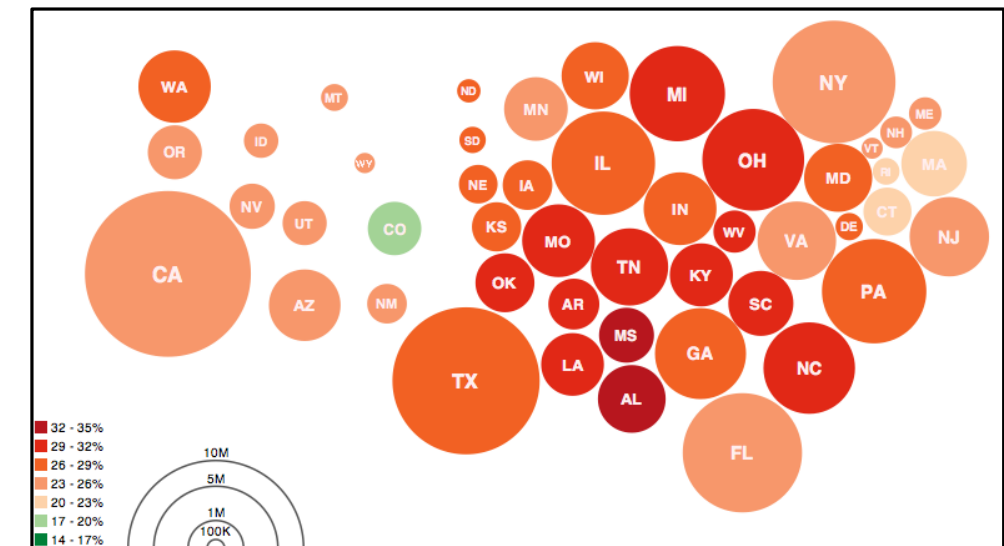
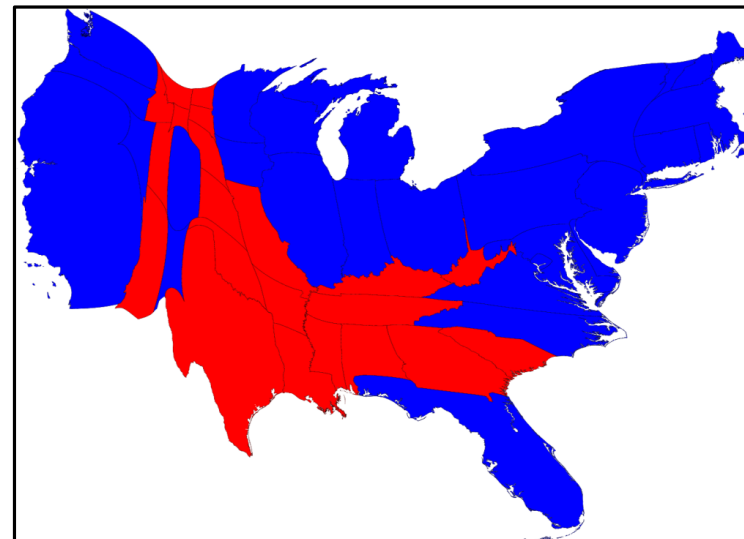
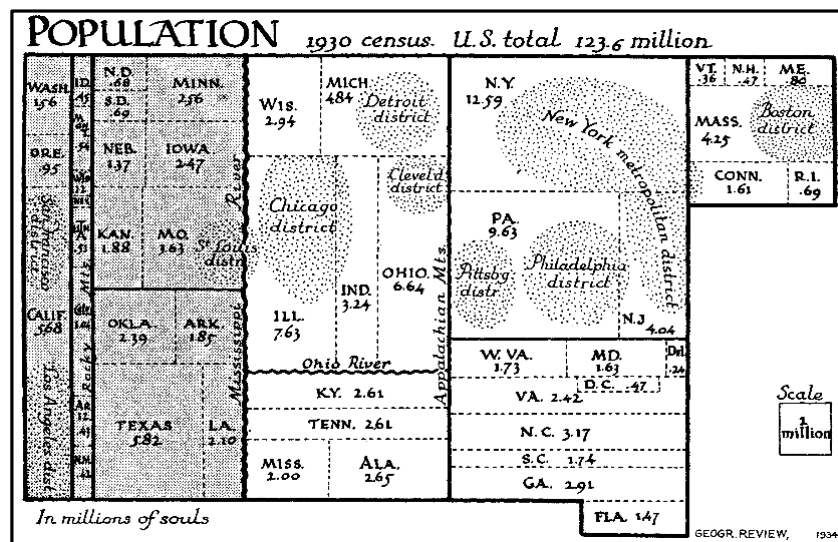


- abstrakte statistische thematische Karten nutzen u.a. verzerrte proportionale Flächen
- proportionale Kontaktrepräsentation des Dualgraphs



Beispiel 3: Flächenkartogramme

- abstrakte statistische thematische Karten nutzen u.a. verzerrte proportionale Flächen
- proportionale Kontaktrepräsentation des Dualgraphs



Geg. gewichtete politische Karte (Unterteilung der Ebene)

Ges. entsprechende verzerrte Karte, deren Flächen proportional zu den Gewichten sind

Beispiel 4: Beschriftung von Landkarten



- Objekte in Karten benötigen meist einen eindeutig zugeordneten Namen (Label)

Beispiel 4: Beschriftung von Landkarten



- Objekte in Karten benötigen meist einen eindeutig zugeordneten Namen (Label)
- verschiedene interne und externe Labelpositionen möglich

Beispiel 4: Beschriftung von Landkarten



- Objekte in Karten benötigen meist einen eindeutig zugeordneten Namen (Label)
- verschiedene interne und externe Labelpositionen möglich



MaxNumber

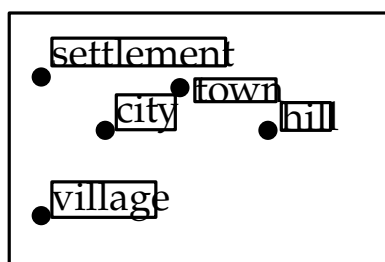
Beispiel 4: Beschriftung von Landkarten



- Objekte in Karten benötigen meist einen eindeutig zugeordneten Namen (Label)
- verschiedene interne und externe Labelpositionen möglich



MaxNumber



MaxSize

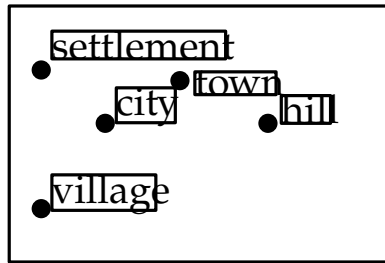
Beispiel 4: Beschriftung von Landkarten



- Objekte in Karten benötigen meist einen eindeutig zugeordneten Namen (Label)
- verschiedene interne und externe Labelpositionen möglich



MaxNumber



MaxSize



interne Label

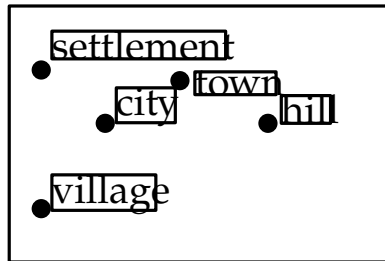
Beispiel 4: Beschriftung von Landkarten



- Objekte in Karten benötigen meist einen eindeutig zugeordneten Namen (Label)
- verschiedene interne und externe Labelpositionen möglich



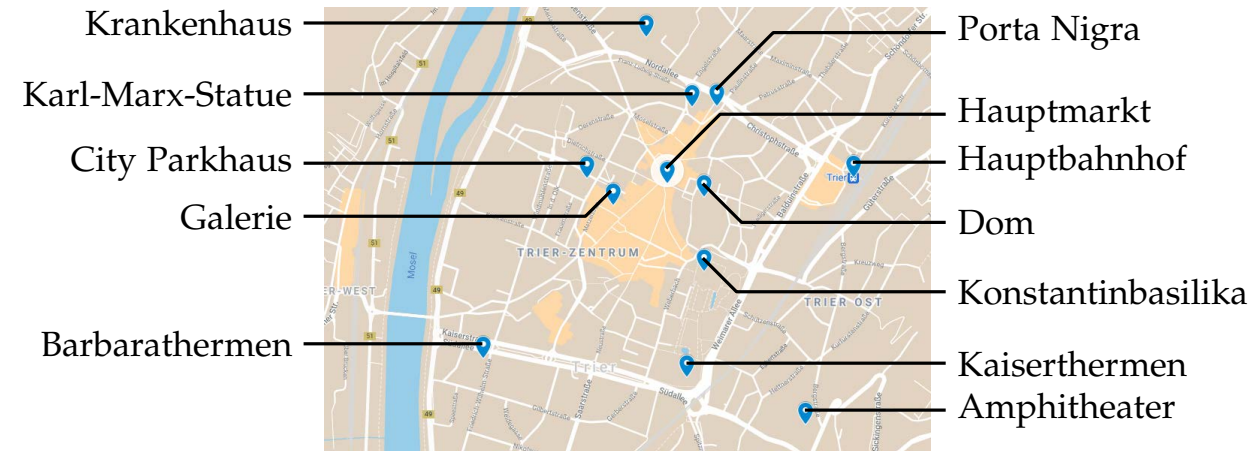
MaxNumber



MaxSize



interne Label



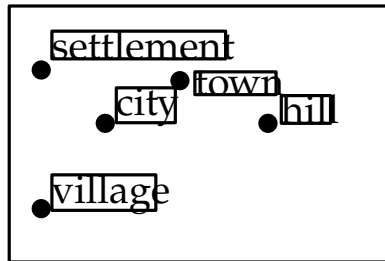
externe Label

Beispiel 4: Beschriftung von Landkarten

- Objekte in Karten benötigen meist einen eindeutig zugeordneten Namen (Label)
- verschiedene interne und externe Labelpositionen möglich



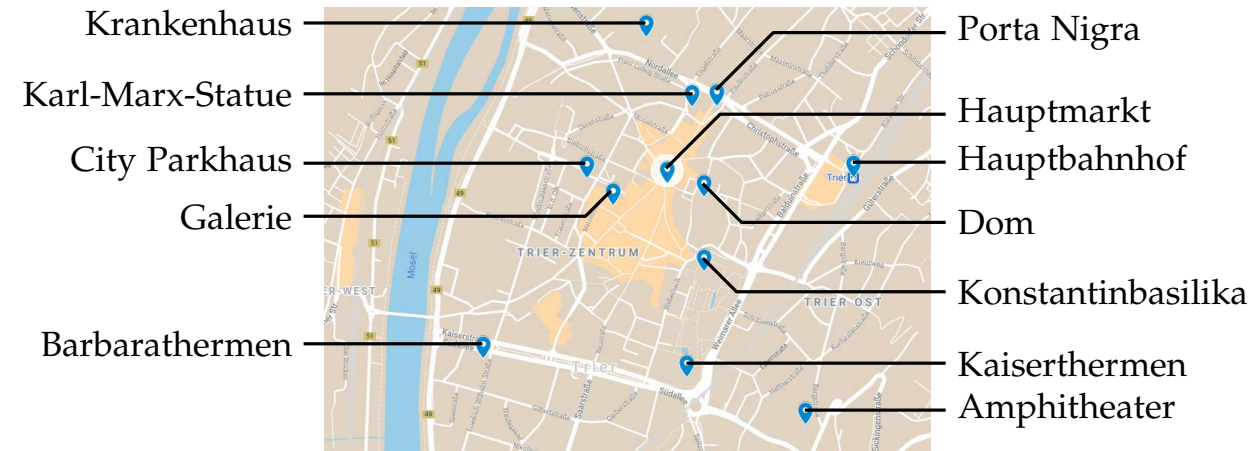
MaxNumber



MaxSize



interne Label



externe Label

Geg. Punktmenge P mit Labelmenge L

Ges. gültige, optimale Beschriftung von P mit L , je nach Beschriftungsmodell

Beispiel 5: Dynamische Karten



- moderne elektronische Karten sind interaktiv & dynamisch

Beispiel 5: Dynamische Karten



- moderne elektronische Karten sind interaktiv & dynamisch
- Formen und Beschriftungen müssen sich kontinuierlich an die Kartenansicht anpassen

Beispiel 5: Dynamische Karten



- moderne elektronische Karten sind interaktiv & dynamisch
- Formen und Beschriftungen müssen sich kontinuierlich an die Kartenansicht anpassen



Beispiel 5: Dynamische Karten



- moderne elektronische Karten sind interaktiv & dynamisch
- Formen und Beschriftungen müssen sich kontinuierlich an die Kartenansicht anpassen



Beispiel 5: Dynamische Karten

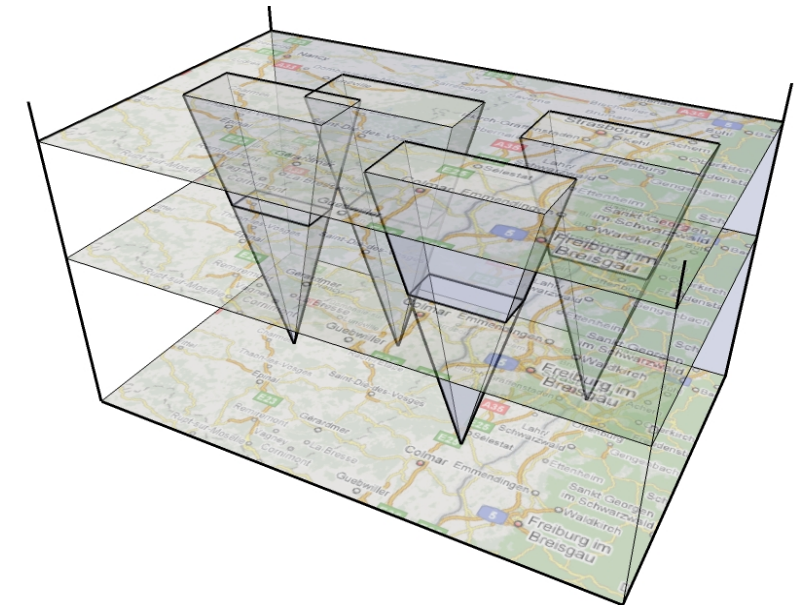
- moderne elektronische Karten sind interaktiv & dynamisch
- Formen und Beschriftungen müssen sich kontinuierlich an die Kartenansicht anpassen



Beispiel 5: Dynamische Karten

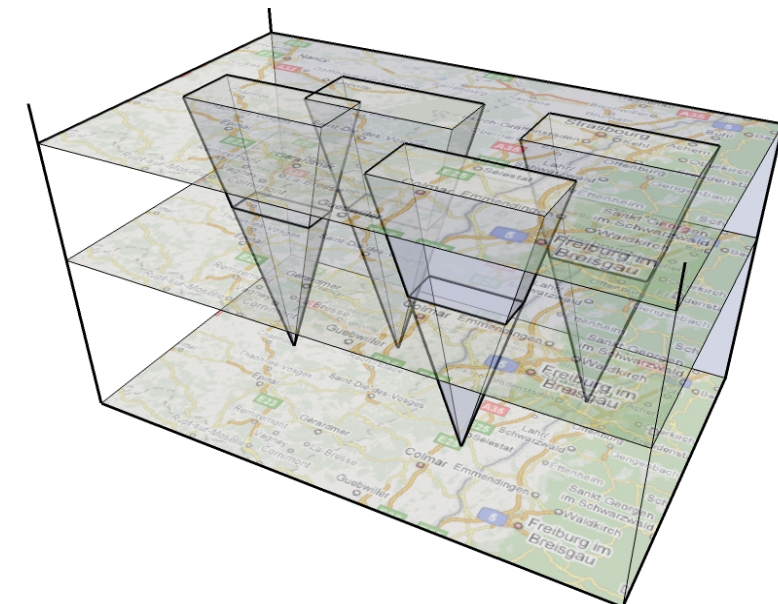


- moderne elektronische Karten sind interaktiv & dynamisch
- Formen und Beschriftungen müssen sich kontinuierlich an die Kartenansicht anpassen



Beispiel 5: Dynamische Karten

- moderne elektronische Karten sind interaktiv & dynamisch
- Formen und Beschriftungen müssen sich kontinuierlich an die Kartenansicht anpassen



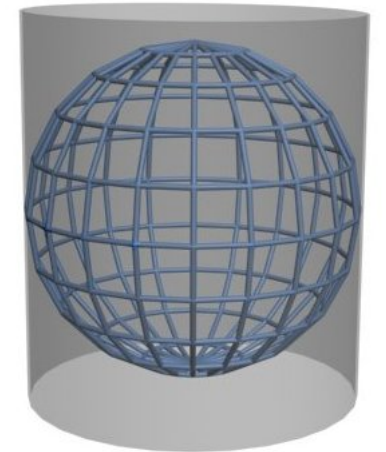
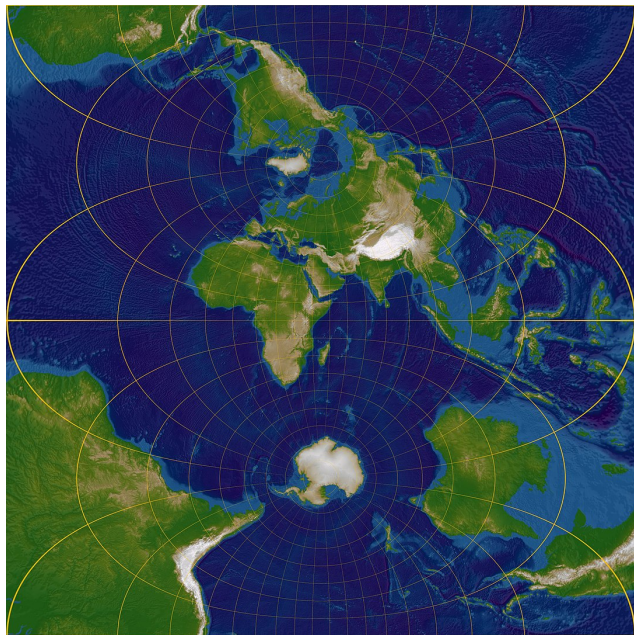
Geg. Punktmenge P mit Labelmenge L

Ges. gültige, optimale und **konsistente** Beschriftung von P mit L unter Zoom, Drehen etc.

Algorithmen für geographische Informationssysteme

1. Vorlesung Einführung & Geodäsie

Teil II: Geodätische Grundlagen

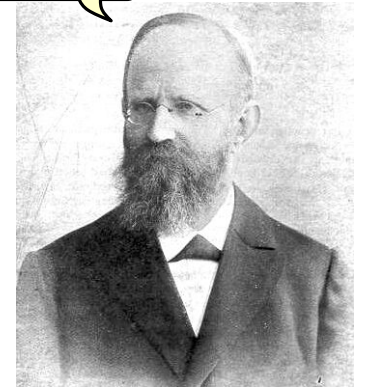


Geodätische Grundlagen



Geodäsie:

„Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche“

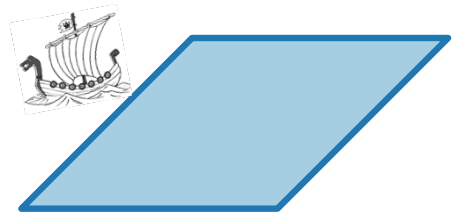


Friedrich Robert Helmert
(1843–1917)

Welche Form hat die Erde?

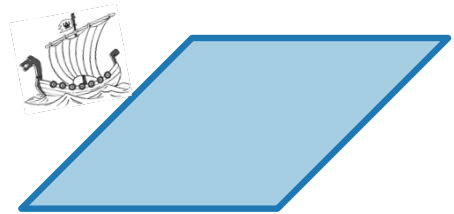


Welche Form hat die Erde?

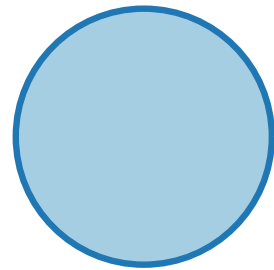


Ebene

Welche Form hat die Erde?

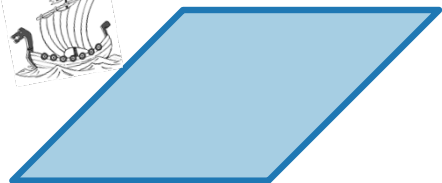


Ebene

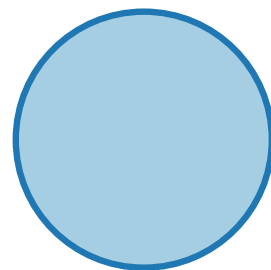


Kugel

Welche Form hat die Erde?



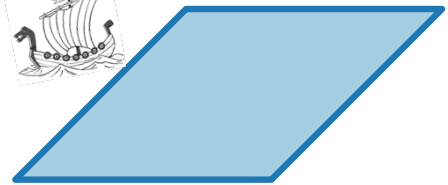
Ebene



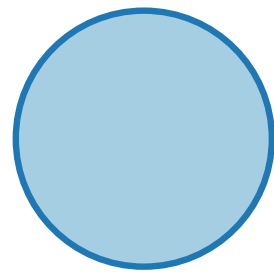
Kugel

(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)

Welche Form hat die Erde?



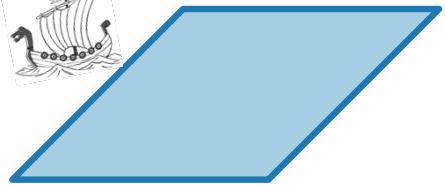
Ebene



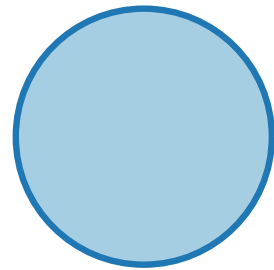
Kugel

(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km

Welche Form hat die Erde?

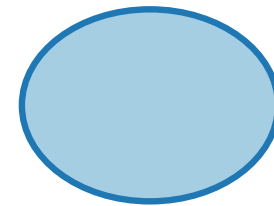


Ebene



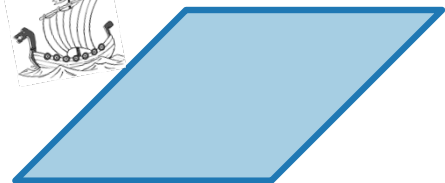
Kugel

(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km

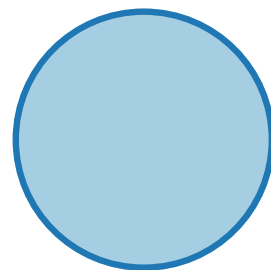


Ellipsoid

Welche Form hat die Erde?

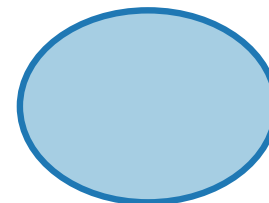


Ebene



Kugel

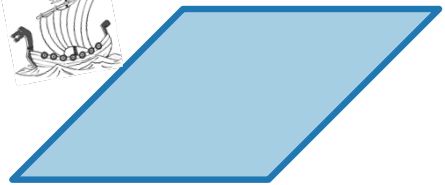
(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km



Ellipsoid

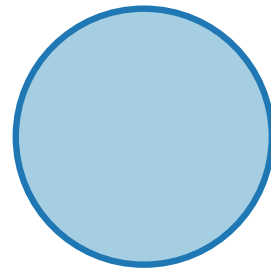
(um 1736 nachgewiesen)

Welche Form hat die Erde?



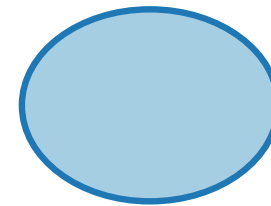
Ebene

(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km



Kugel

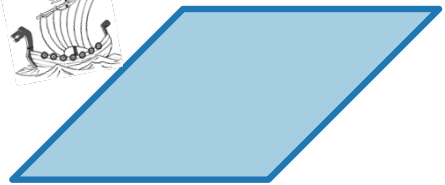
(um 1736 nachgewiesen)
gr. Halbachse $a \approx 6378$ km
kl. Halbachse $b \approx 6357$ km



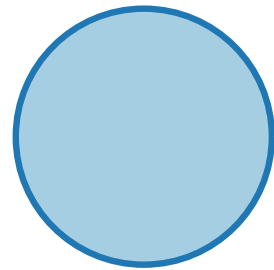
Ellipsoid



Welche Form hat die Erde?

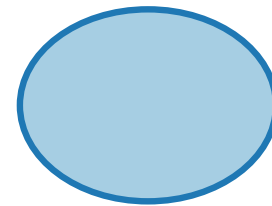


Ebene



Kugel

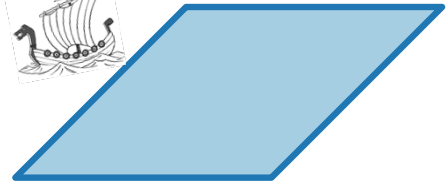
(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km



Ellipsoid

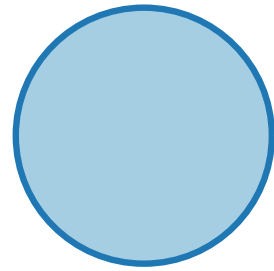
(um 1736 nachgewiesen)
gr. Halbachse $a \approx 6378$ km
kl. Halbachse $b \approx 6357$ km
Abplattung $f = \frac{a-b}{a} \approx 1 : 300$

Welche Form hat die Erde?

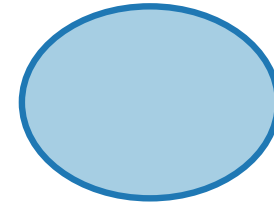


Ebene

(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km

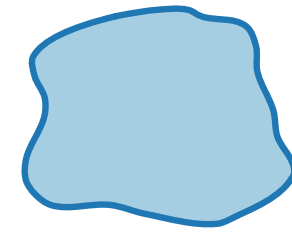


Kugel



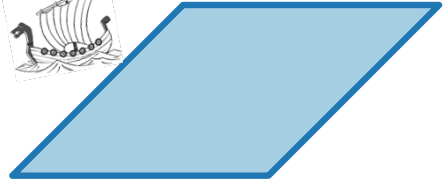
Ellipsoid

(um 1736 nachgewiesen)
gr. Halbachse $a \approx 6378$ km
kl. Halbachse $b \approx 6357$ km
Abplattung $f = \frac{a-b}{a} \approx 1 : 300$

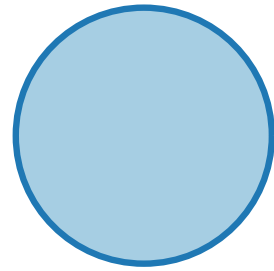


Geoid

Welche Form hat die Erde?

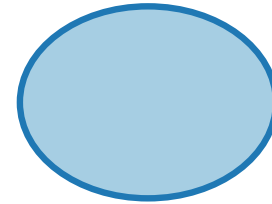


Ebene



Kugel

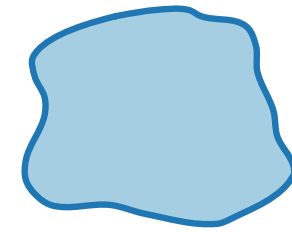
(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km



Ellipsoid

(um 1736 nachgewiesen)

gr. Halbachse $a \approx 6378$ km
kl. Halbachse $b \approx 6357$ km
Abplattung $f = \frac{a-b}{a} \approx 1 : 300$

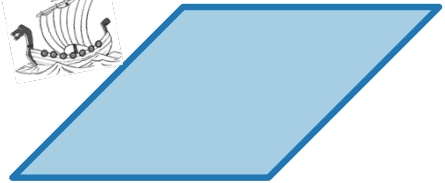


Geoid

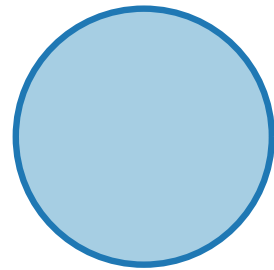
(ab 1828)



Welche Form hat die Erde?

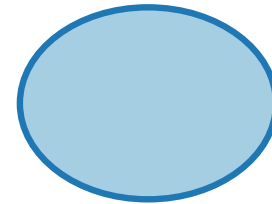


Ebene



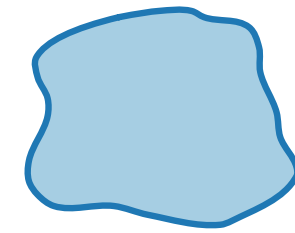
Kugel

(zuerst ca. 500 v.
Chr. bekannt)
Radius ≈ 6370 km



Ellipsoid

(um 1736 nachgewiesen)
gr. Halbachse $a \approx 6378$ km
kl. Halbachse $b \approx 6357$ km
Abplattung $f = \frac{a-b}{a} \approx 1 : 300$



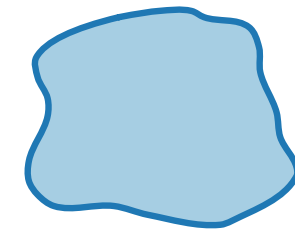
Geoid

(ab 1828)
−106 bis +85 m
Abweichung von
Ellipsoid

Welche Form hat die Erde?



- Wie definieren wir *nach oben*?



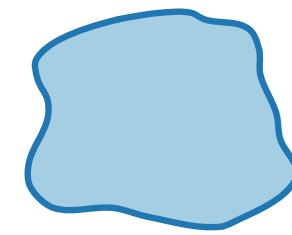
Geoid
(ab 1828)

−106 bis +85 m
Abweichung von
Ellipsoid

Welche Form hat die Erde?



- Wie definieren wir *nach oben*?
- Wie definieren wir die *Höhe*?



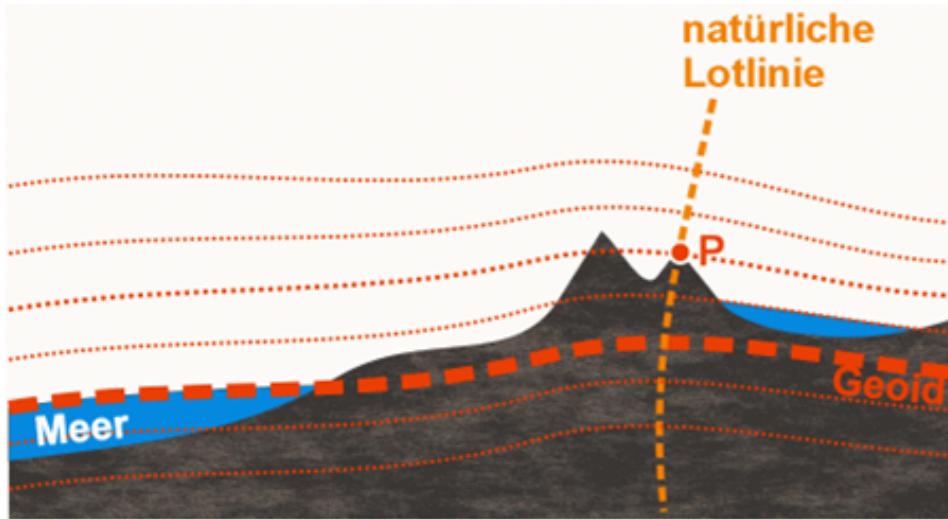
Geoid
(ab 1828)

–106 bis +85 m
Abweichung von
Ellipsoid

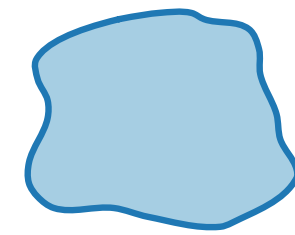


Welche Form hat die Erde?

- Wie definieren wir *nach oben*?
- Wie definieren wir die *Höhe*?



Das **Geoid** entspricht einer ruhend gedachtes Meeresoberfläche (fortgesetzt unter den Kontinenten).



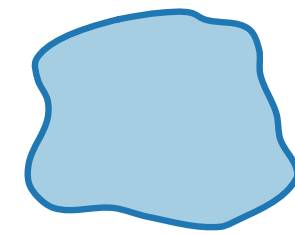
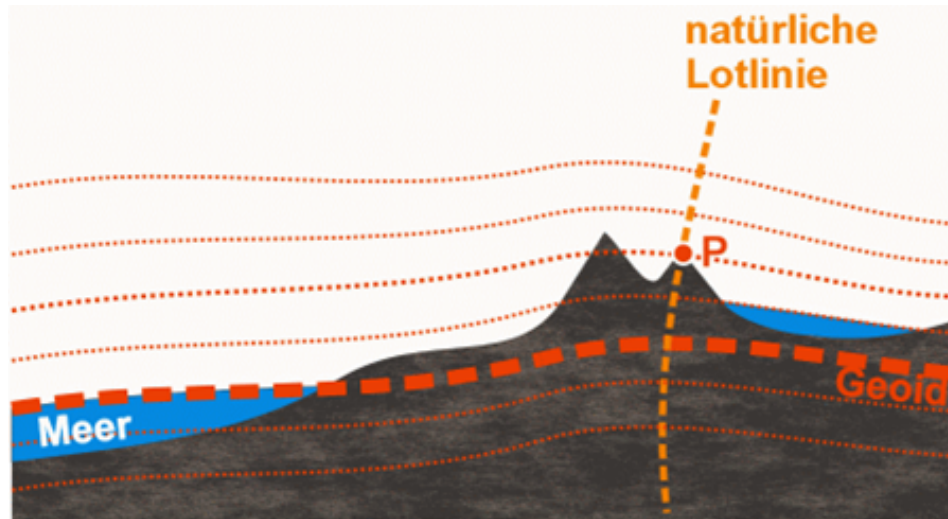
Geoid
(ab 1828)

–106 bis +85 m
Abweichung von
Ellipsoid



Welche Form hat die Erde?

- Wie definieren wir *nach oben*?
- Wie definieren wir die *Höhe*?



Geoid
(ab 1828)

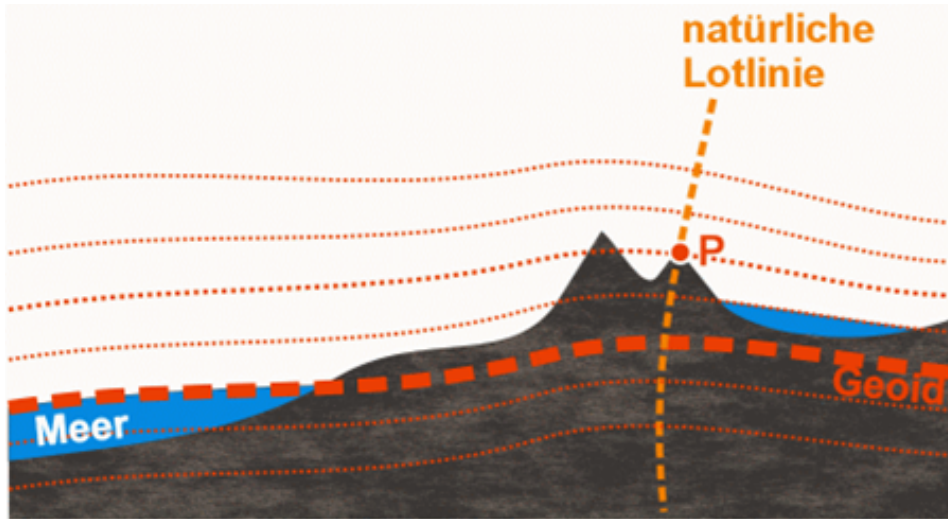
Das **Geoid** entspricht einer ruhend gedachtes Meeresoberfläche (fortgesetzt unter den Kontinenten).

Geoid = Fläche gleichen Schwerepotentials

–106 bis +85 m
Abweichung von
Ellipsoid

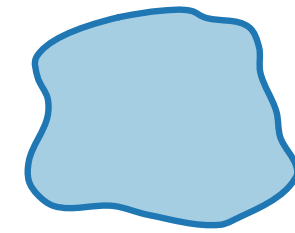
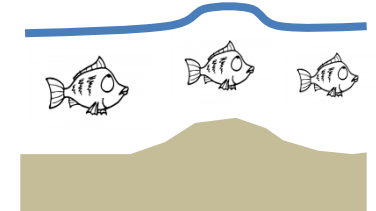
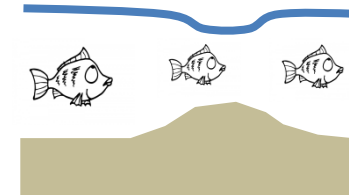
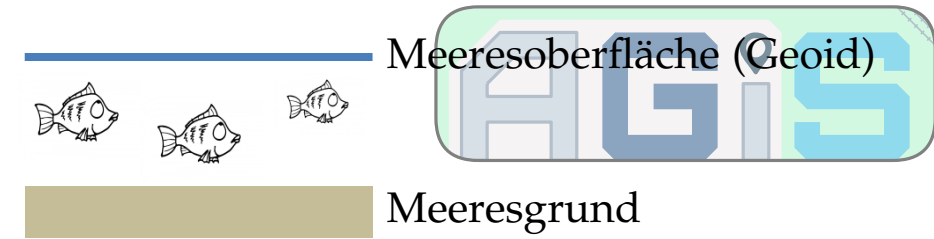
Welche Form hat die Erde?

- Wie definieren wir *nach oben*?
- Wie definieren wir die *Höhe*?



Das **Geoid** entspricht einer ruhend gedachten Meeresoberfläche (fortgesetzt unter den Kontinenten).

Geoid = Fläche gleichen Schwerepotentials

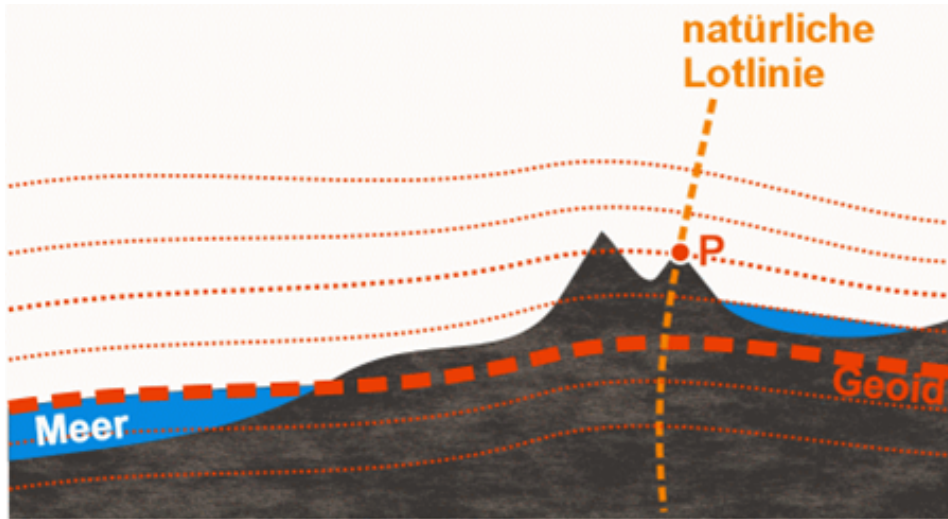


Geoid
(ab 1828)

–106 bis +85 m
Abweichung von
Ellipsoid

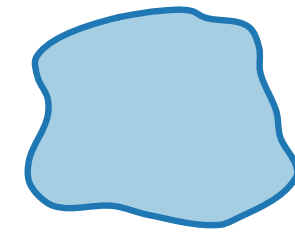
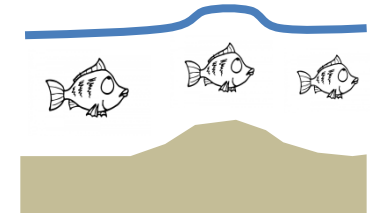
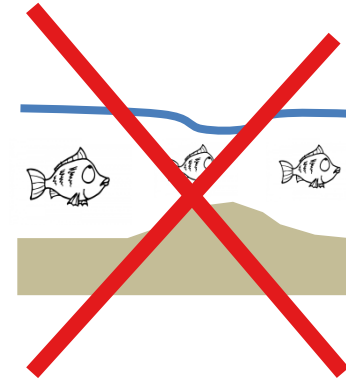
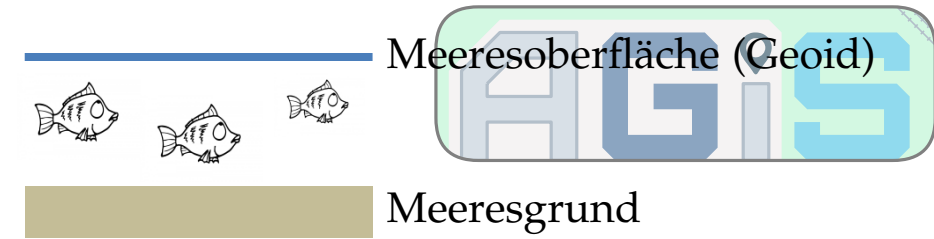
Welche Form hat die Erde?

- Wie definieren wir *nach oben*?
- Wie definieren wir die *Höhe*?



Das **Geoid** entspricht einer ruhend gedachten Meeresoberfläche (fortgesetzt unter den Kontinenten).

Geoid = Fläche gleichen Schwerepotentials



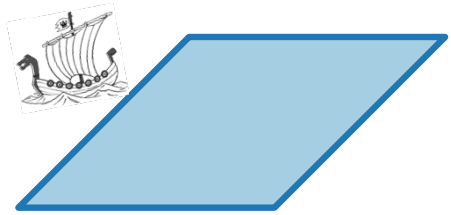
Geoid
(ab 1828)

–106 bis +85 m
Abweichung von
Ellipsoid

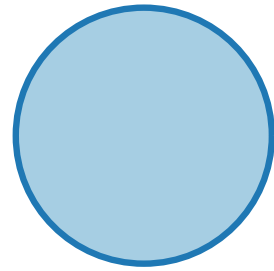
Welche Form hat die Erde?



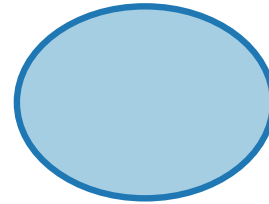
- Wann verwenden wir welches Modell?



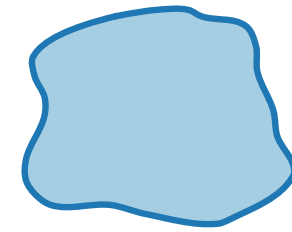
Ebene



Kugel



Ellipsoid

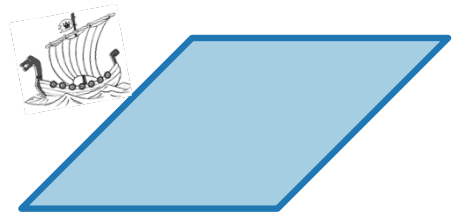


Geoid

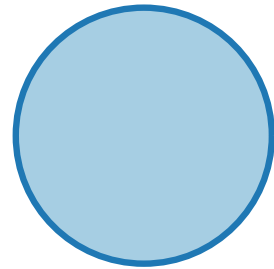


Welche Form hat die Erde?

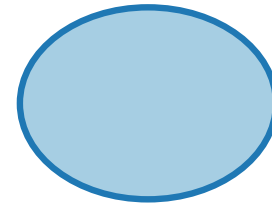
- Wann verwenden wir welches Modell?



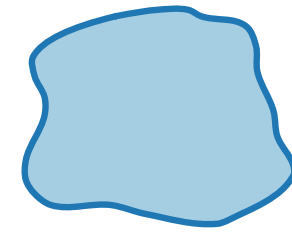
Ebene



Kugel



Ellipsoid



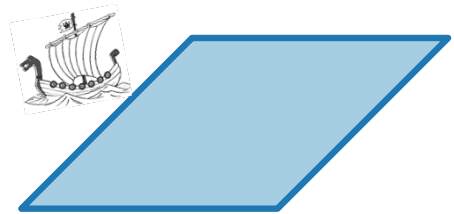
Geoid

als lokale Näherung;
Distanzmessungen
> 10 km müssen auf
Kugel reduziert
werden



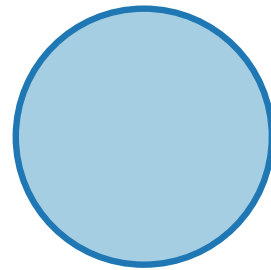
Welche Form hat die Erde?

- Wann verwenden wir welches Modell?



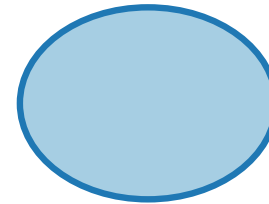
Ebene

als lokale Näherung;
Distanzmessungen
> 10 km müssen auf
Kugel reduziert
werden

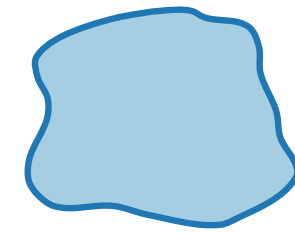


Kugel

als Grundlage für
Karten mit
Maßstab < 1 : 2
Mio.



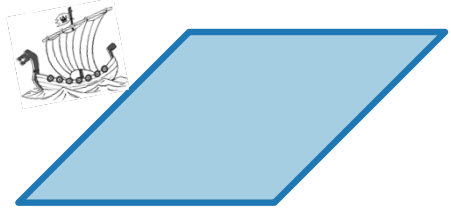
Ellipsoid



Geoid

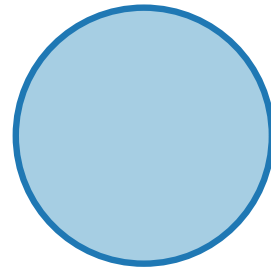
Welche Form hat die Erde?

- Wann verwenden wir welches Modell?



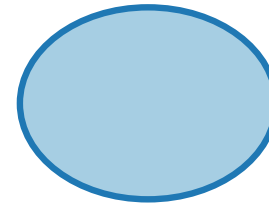
Ebene

als lokale Näherung;
Distanzmessungen
> 10 km müssen auf
Kugel reduziert
werden



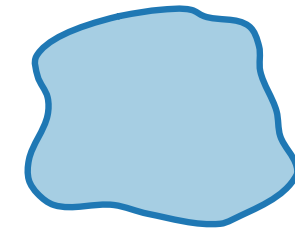
Kugel

als Grundlage für
Karten mit
Maßstab $< 1 : 2$
Mio.



Ellipsoid

als Grundlage für
Karten mit
Maßstab $\geq 1 : 2$
Mio.

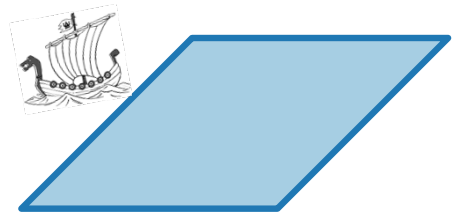


Geoid



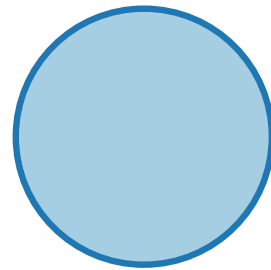
Welche Form hat die Erde?

- Wann verwenden wir welches Modell?



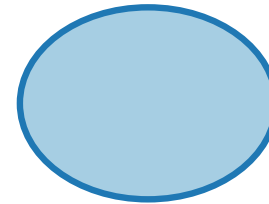
Ebene

als lokale Näherung;
Distanzmessungen
> 10 km müssen auf
Kugel reduziert
werden



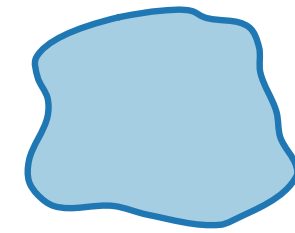
Kugel

als Grundlage für
Karten mit
Maßstab $< 1 : 2$
Mio.



Ellipsoid

als Grundlage für
Karten mit
Maßstab $\geq 1 : 2$
Mio.



Geoid

Für Höhen

Wie gebe ich eine Position an?



Wie gebe ich eine Position an?



Geodätisches Datum bestimmt **Ursprung, Orientierung und Maßstab** eines Bezugssystems X, Y, Z im Verhältnis zu einem grundlegenden absoluten System.

Wie gebe ich eine Position an?

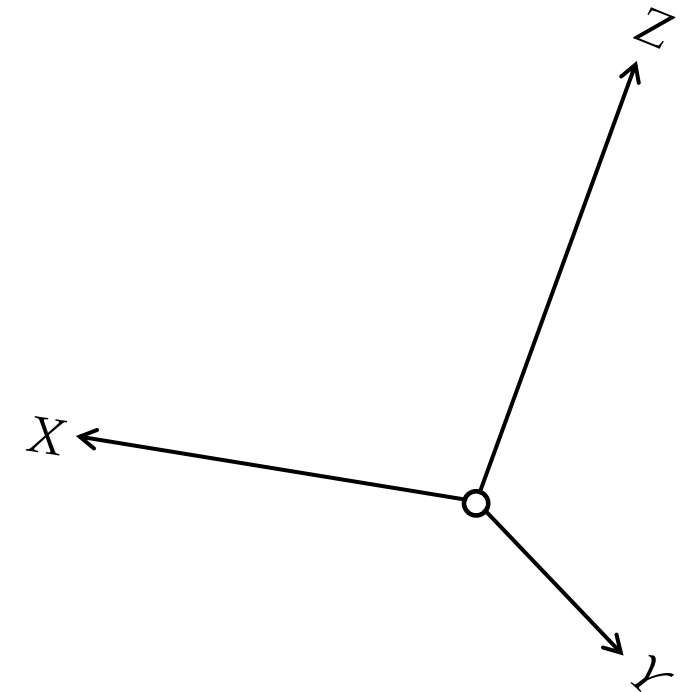


Geodätisches Datum bestimmt **Ursprung**, **Orientierung** und **Maßstab** eines Bezugssystems X, Y, Z im Verhältnis zu einem grundlegenden absoluten System.

Wie gebe ich eine Position an?



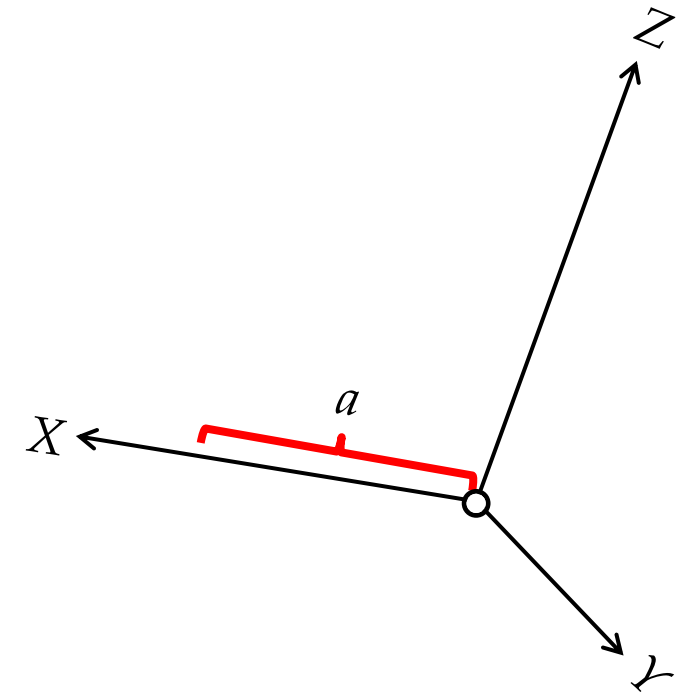
Geodätisches Datum bestimmt **Ursprung**, **Orientierung** und **Maßstab** eines Bezugssystems X, Y, Z im Verhältnis zu einem grundlegenden absoluten System.



Wie gebe ich eine Position an?



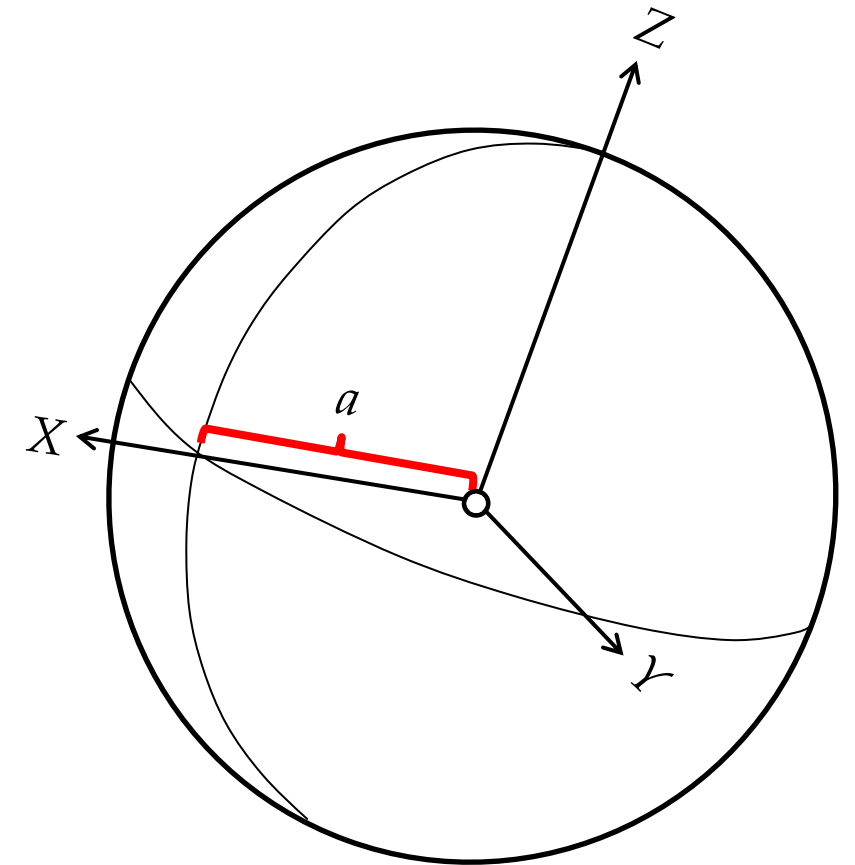
Geodätisches Datum bestimmt **Ursprung**, **Orientierung** und **Maßstab** eines Bezugssystems X, Y, Z im Verhältnis zu einem grundlegenden absoluten System.



Wie gebe ich eine Position an?



Geodätisches Datum bestimmt **Ursprung**, **Orientierung** und **Maßstab** eines Bezugssystems X, Y, Z im Verhältnis zu einem grundlegenden absoluten System.

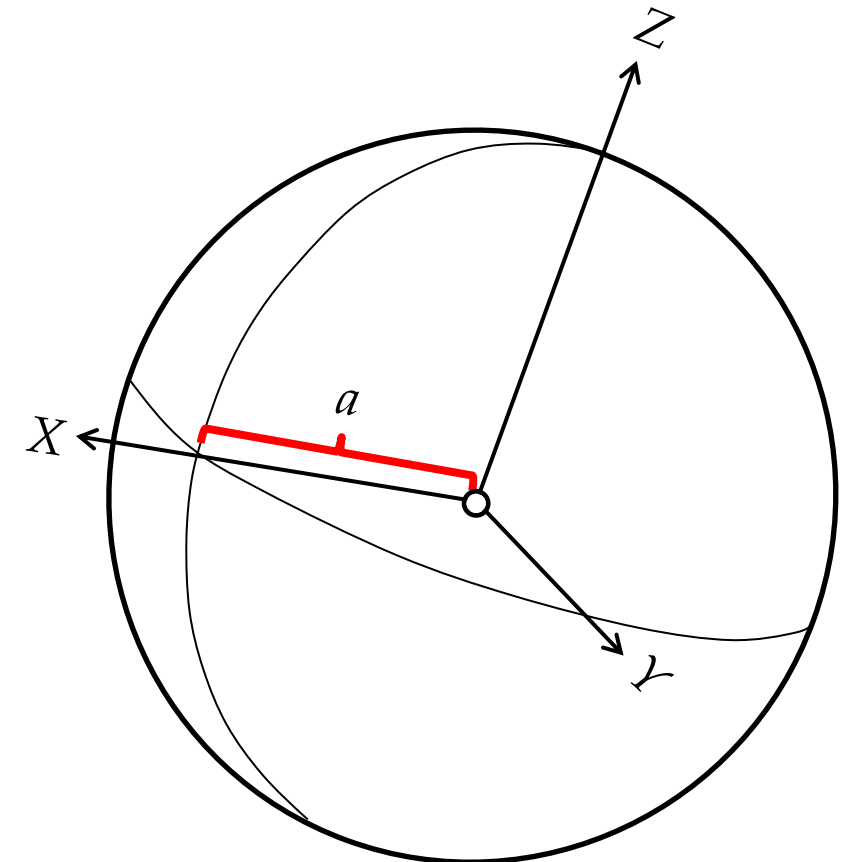


Wie gebe ich eine Position an?



Geodätisches Datum bestimmt **Ursprung**, **Orientierung** und **Maßstab** eines Bezugssystems X, Y, Z im Verhältnis zu einem grundlegenden absoluten System.

Außerdem: **Form eines Bezugsellipsoids**

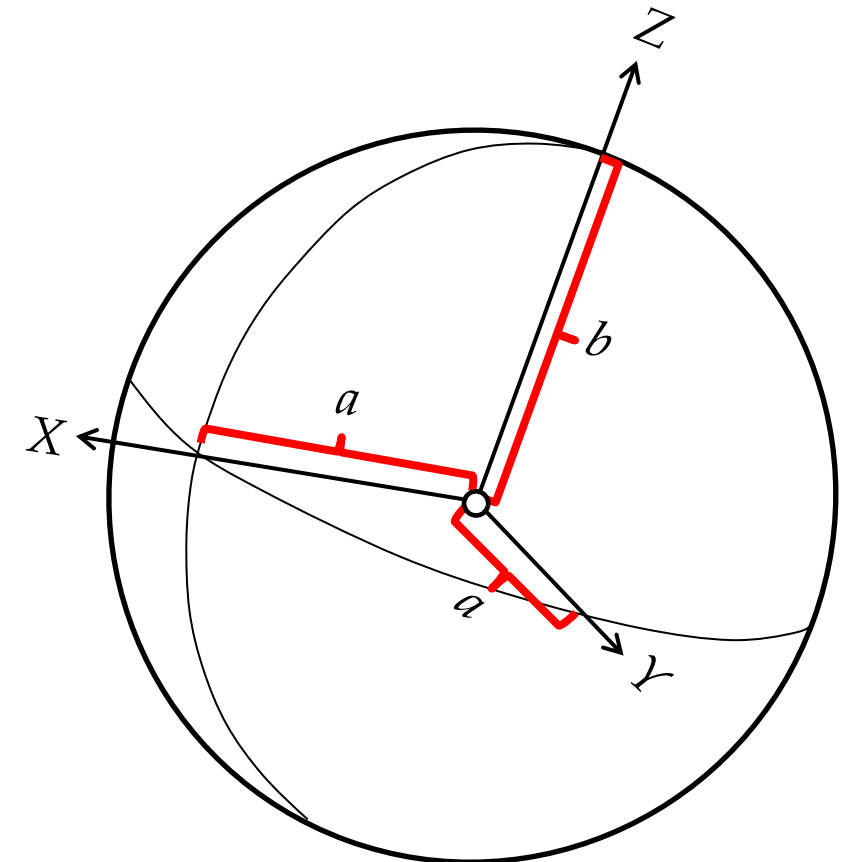


Wie gebe ich eine Position an?



Geodätisches Datum bestimmt **Ursprung**, **Orientierung** und **Maßstab** eines Bezugssystems X, Y, Z im Verhältnis zu einem grundlegenden absoluten System.

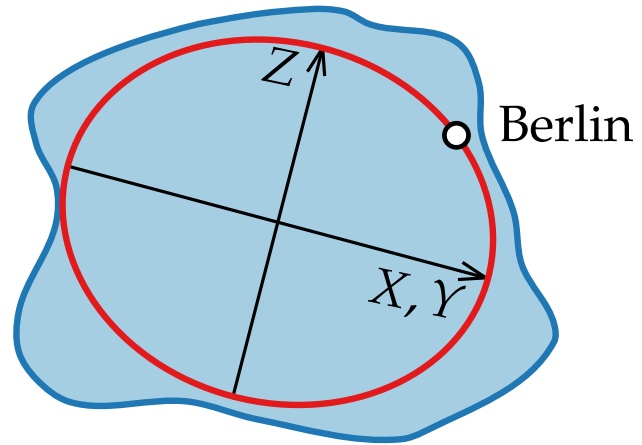
Außerdem: **Form eines Bezugsellipsoids**



Wie gebe ich eine Position an?



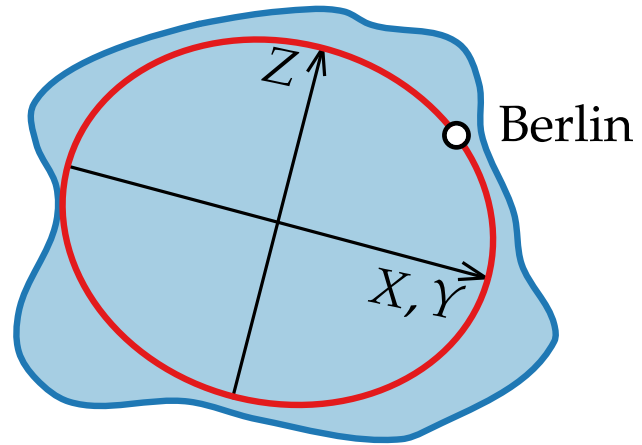
Beispiel 1: Rauenberg-Datum (auch Potsdam-Datum)





Wie gebe ich eine Position an?

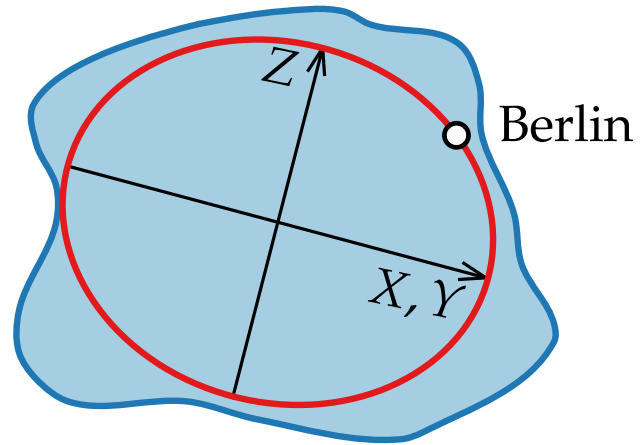
Beispiel 1: Rauenberg-Datum (auch Potsdam-Datum)



Form: lokal an Deutschland angepasst (Bessel-Ellipsoid)

Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 1: Rauenberg-Datum (auch Potsdam-Datum)

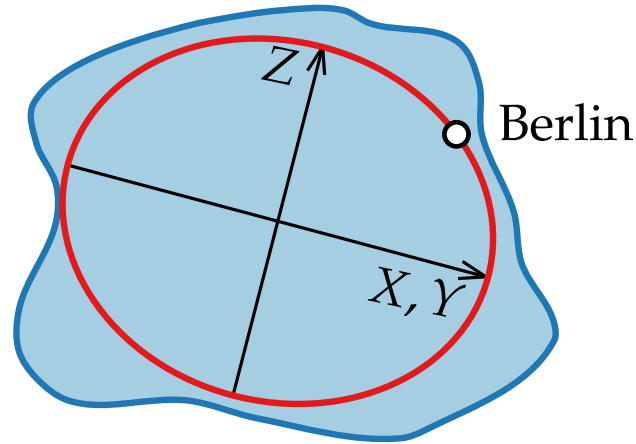


Form: lokal an Deutschland angepasst (Bessel-Ellipsoid)

Lage: Lage Fundamentalpunkt Rauenberg & Azimut zur Marienkirche in Berlin festgelegt

Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 1: Rauenberg-Datum (auch Potsdam-Datum)



Form: lokal an Deutschland angepasst (Bessel-Ellipsoid)

Lage: Lage Fundamentalpunkt Rauenberg & Azimut zur Marienkirche in Berlin festgelegt

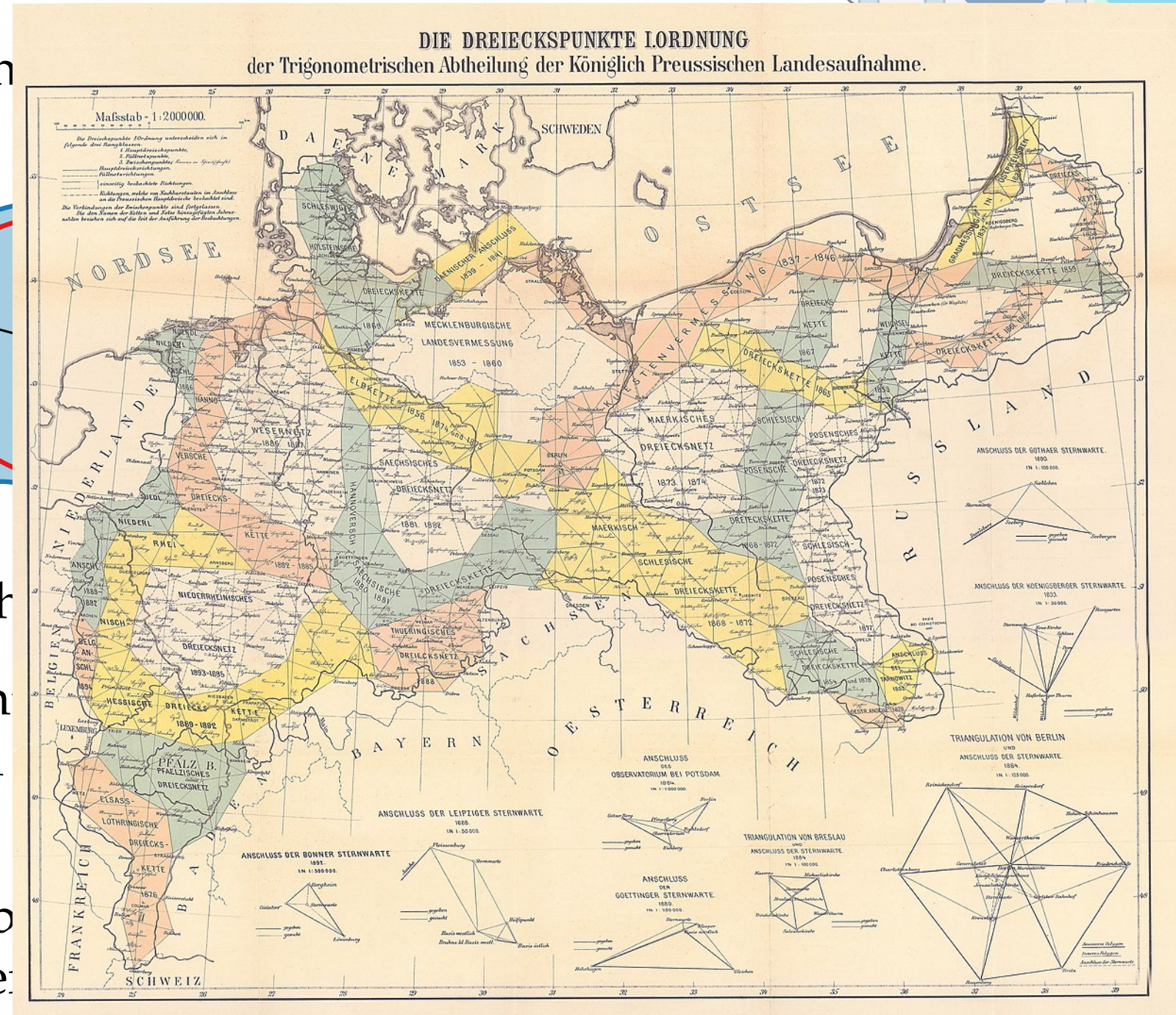
Verwendung: Deutsches Hauptdreiecksnetz, auch heute noch Grundlage vieler Daten

Beispiel 1: Rauenberg-Datum (auch

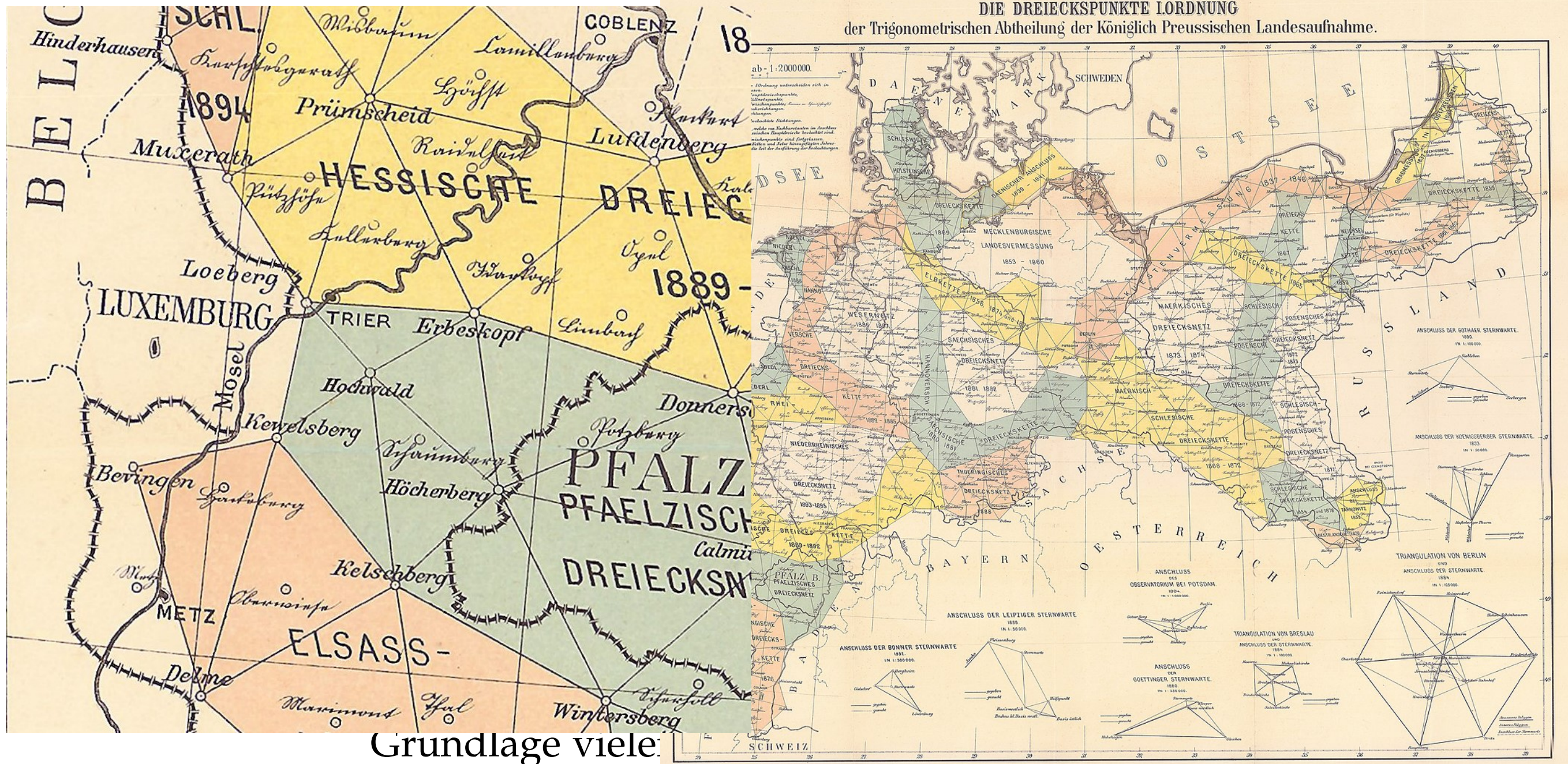
lokal an Deutsch

Lage Fundamen Marienkirche in

Deutsches Haupt Grundlage vieler



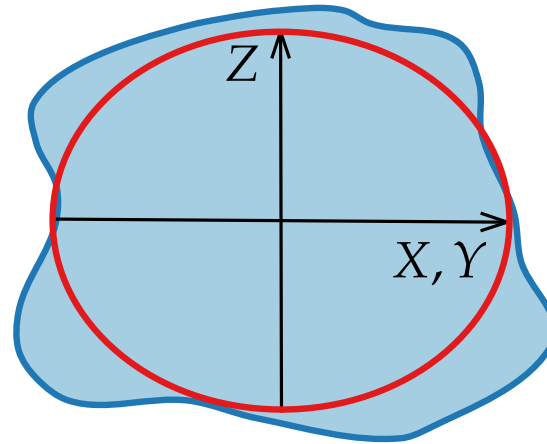
Wie gebe ich eine Position an?



Wie gebe ich eine Position an?



Beispiel 2: WGS84



Form:

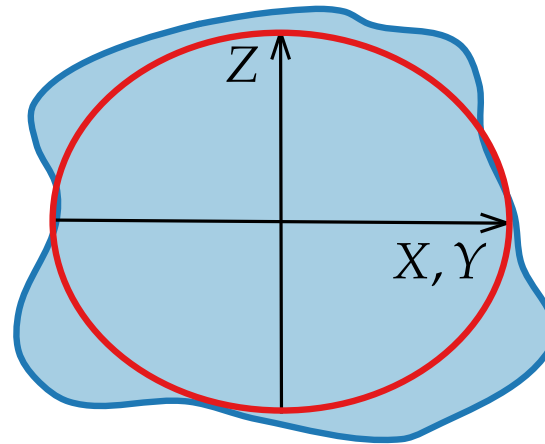
Lage:

Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 2: WGS84



Form: global angepasst

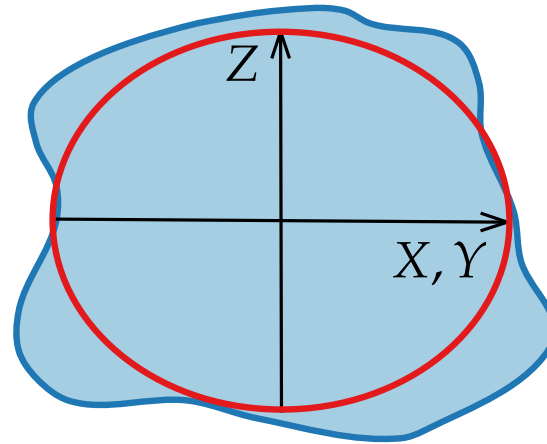
Lage:

Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 2: WGS84



Form: global angepasst

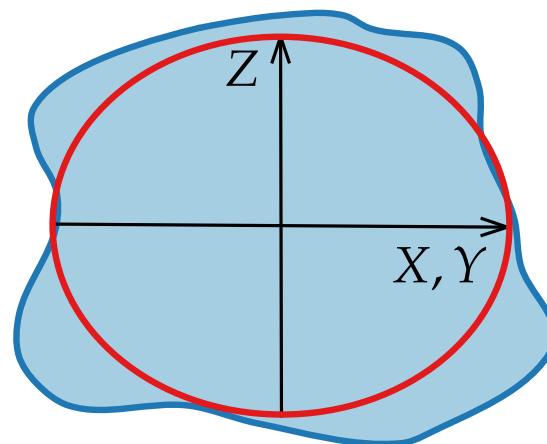
Lage: Zentrum des Ellipsoids = Massenschwerpunkt Erde

Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 2: WGS84



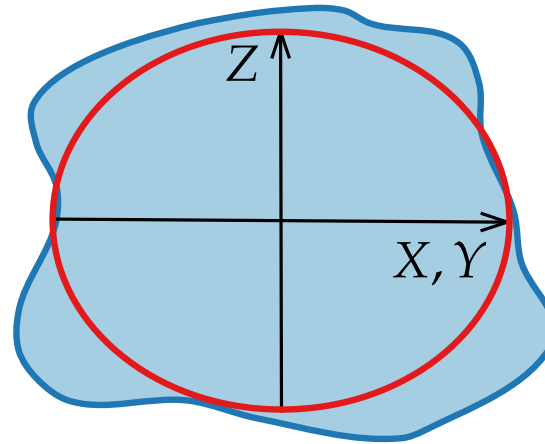
Form: global angepasst

Lage: Zentrum des Ellipsoids = Massenschwerpunkt Erde
Z-Achse in Richtung Nordpol; Greenwich in X-Z-Ebene

Verwendung:

Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 2: WGS84



Form:

global angepasst

Lage:

Zentrum des Ellipsoids = Massenschwerpunkt Erde
Z-Achse in Richtung Nordpol; Greenwich in X-Z-Ebene
Realisiert durch Fundamentalstationen

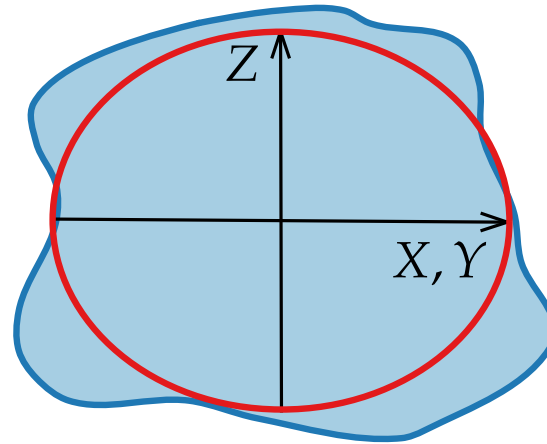
Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?



Beispiel 2: WGS84



Form:

global angepasst

Lage:

Zentrum des Ellipsoids = Massenschwerpunkt Erde
Z-Achse in Richtung Nordpol; Greenwich in X-Z-Ebene
Realisiert durch Fundamentalstationen

Verwendung:

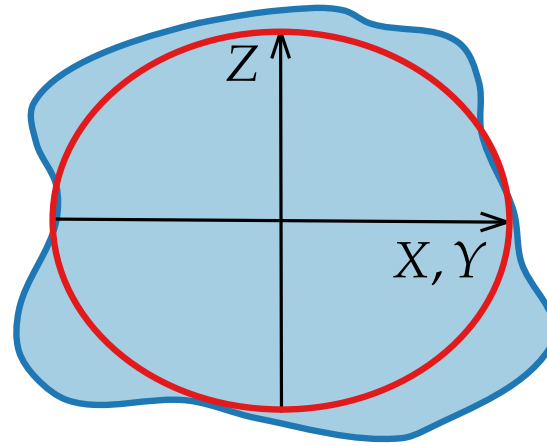
GPS



Wie gebe ich eine Position an?



Beispiel 3: ETRS89



Form:

Lage:

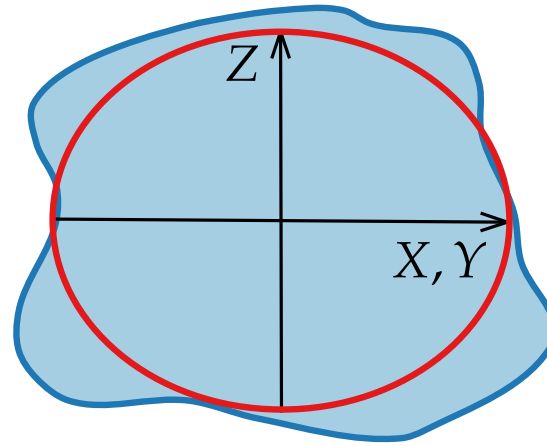
Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?



Beispiel 3: ETRS89



Form: global angepasst

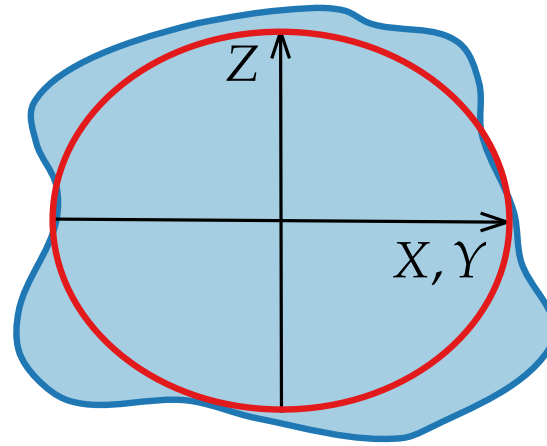
Lage:

Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 3: ETRS89



Form: global angepasst

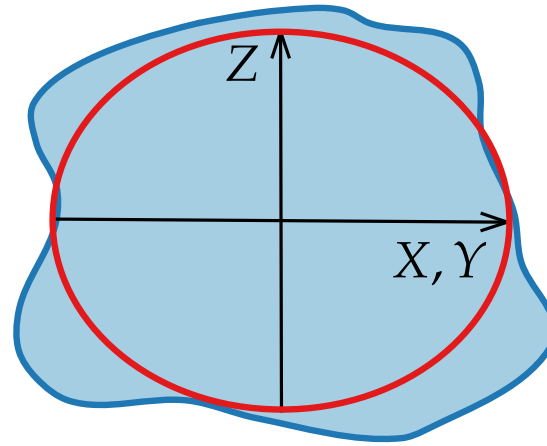
Lage: bis 1.1.1989 wie WGS84

Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?

Beispiel 3: ETRS89



Form:

global angepasst

Lage:

bis 1.1.1989 wie WGS84
danach an aurasische Platte gebunden

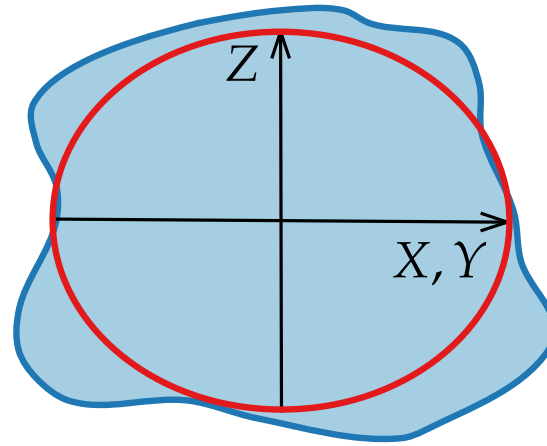
Verwendung:



Wie gebe ich eine Position an?



Beispiel 3: ETRS89



Form:

global angepasst

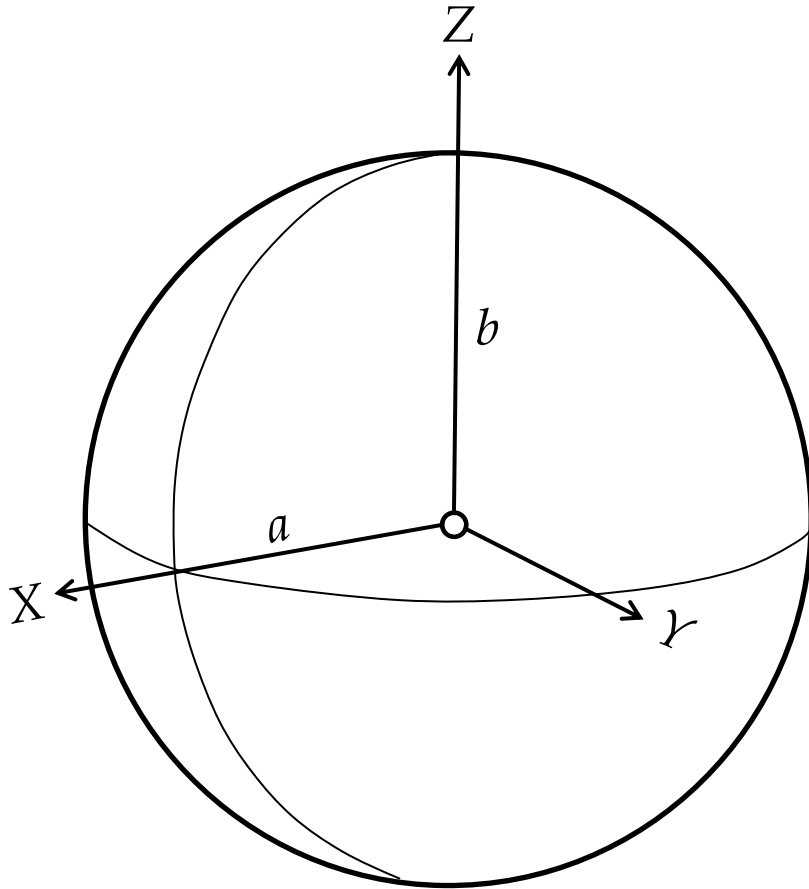
Lage:

bis 1.1.1989 wie WGS84
danach an aurasische Platte gebunden

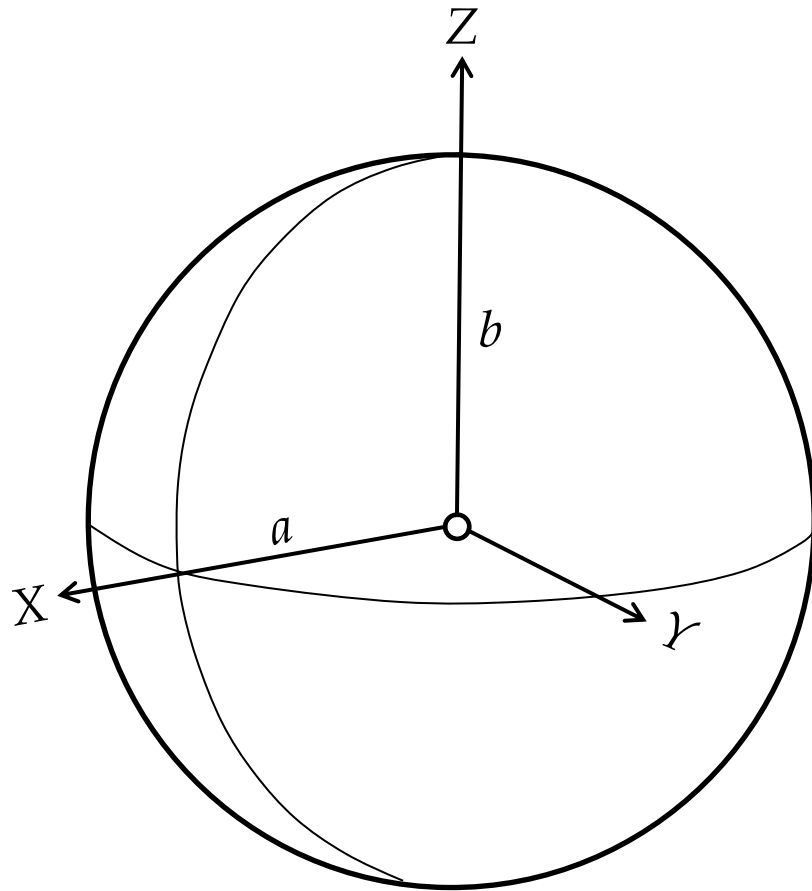
Verwendung: Deutsche Landesvermessungen ab 1991



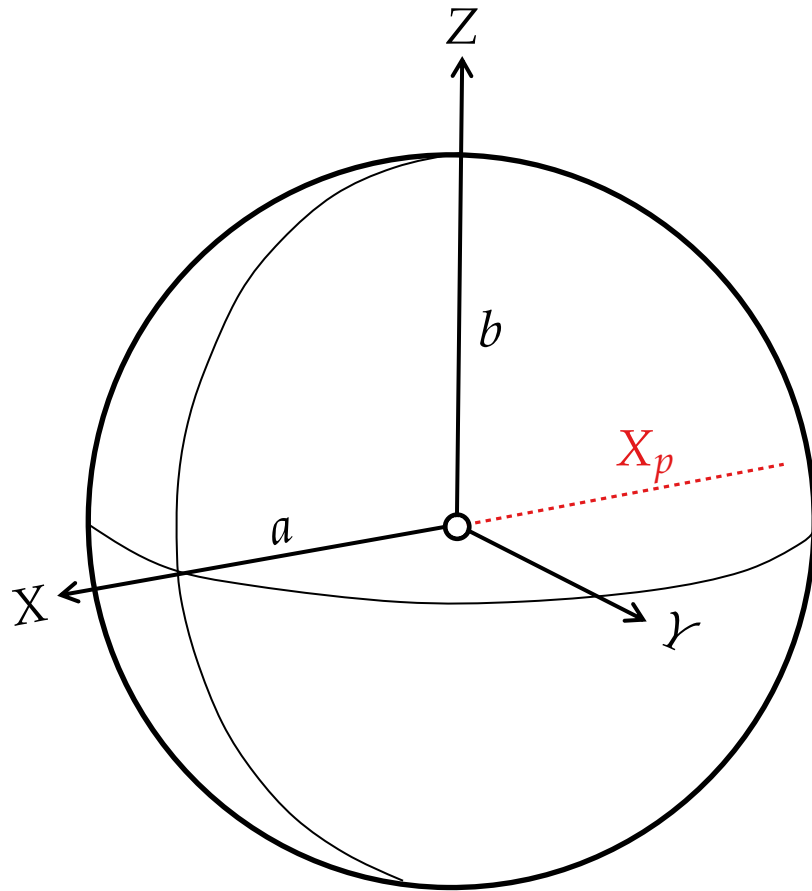
Dreidimensionale kartesische Koordinaten



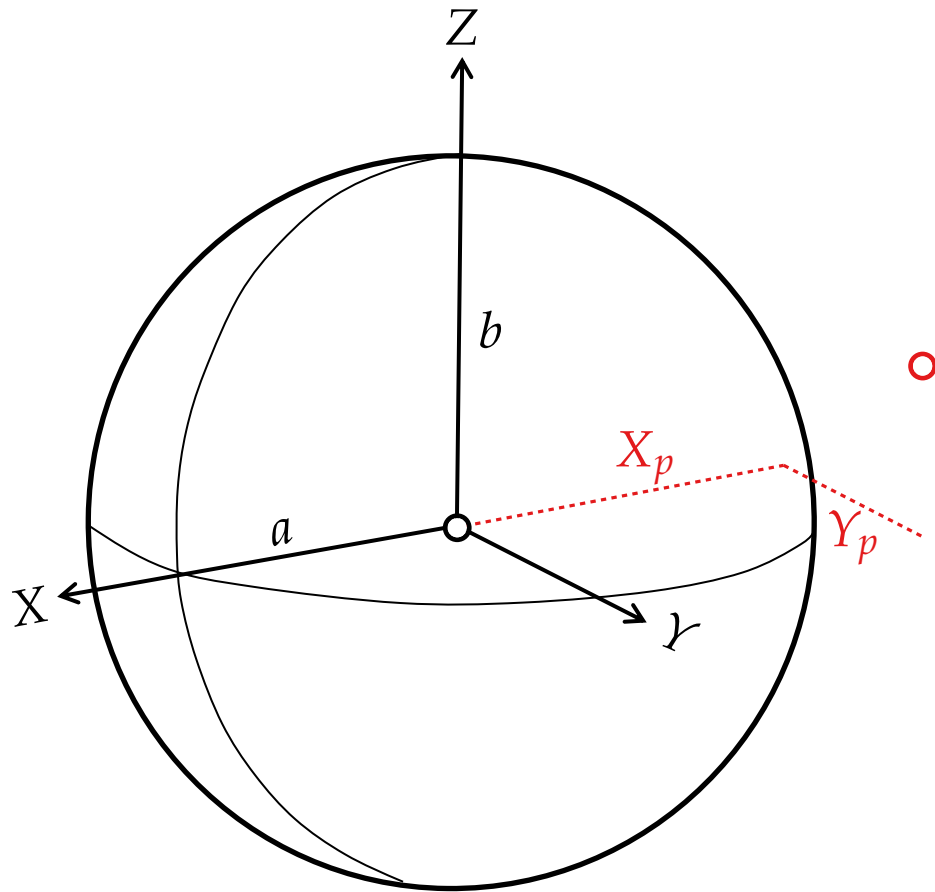
Dreidimensionale kartesische Koordinaten



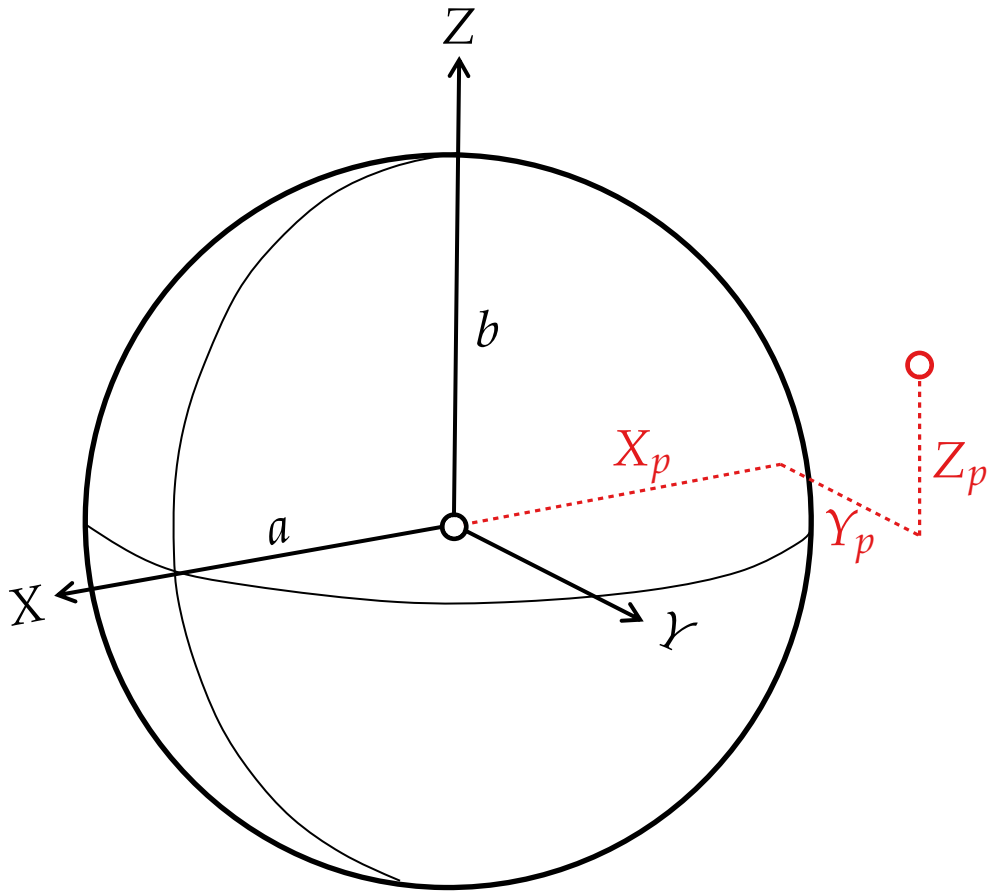
Dreidimensionale kartesische Koordinaten



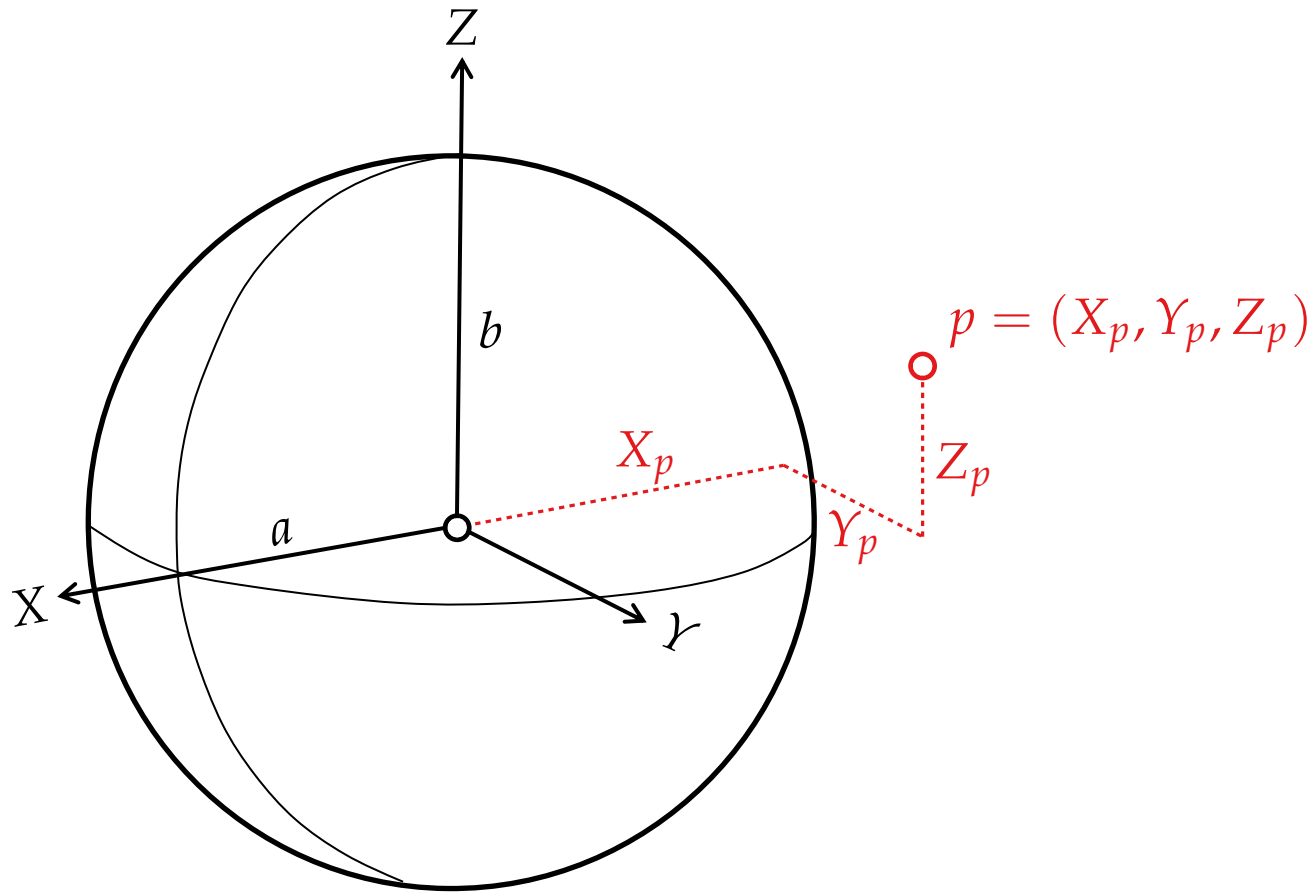
Dreidimensionale kartesische Koordinaten



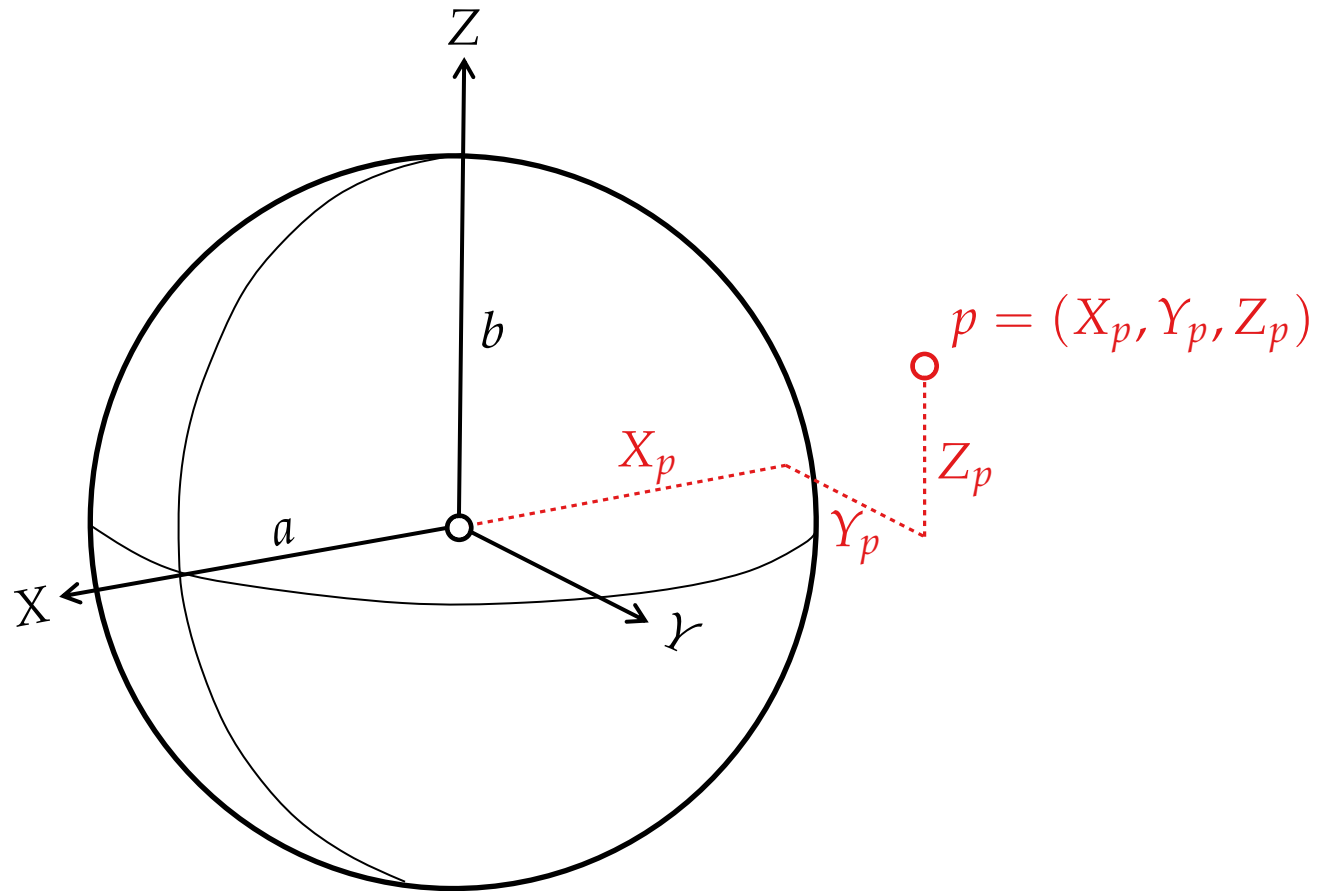
Dreidimensionale kartesische Koordinaten



Dreidimensionale kartesische Koordinaten



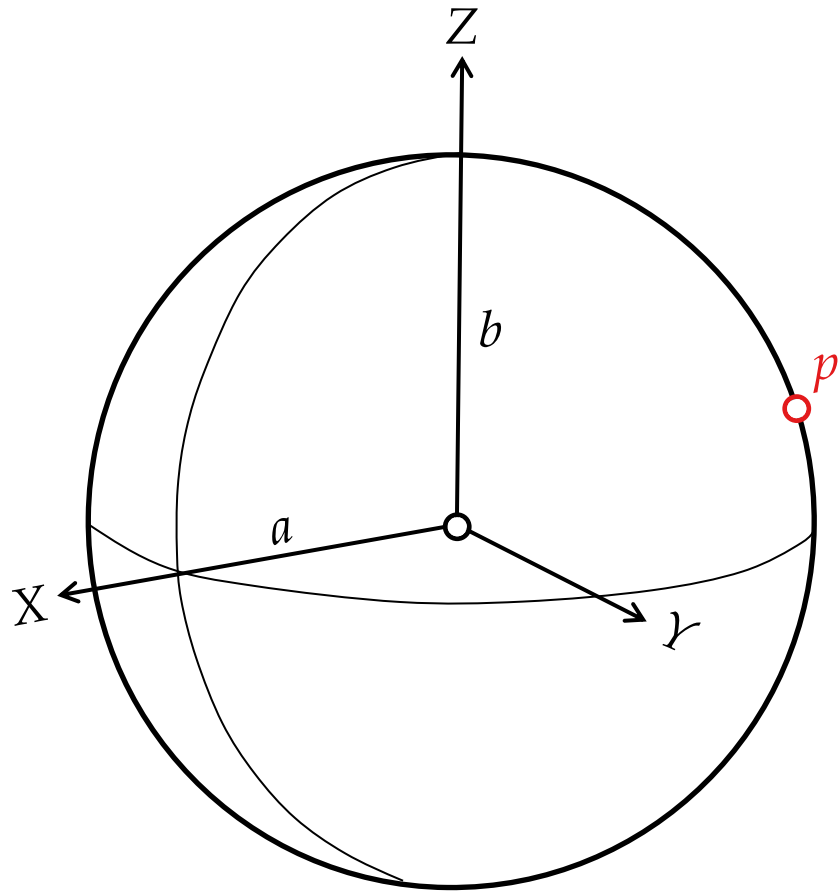
Dreidimensionale kartesische Koordinaten



Verwendung: z.B. Rechnen mit Raumstrecken



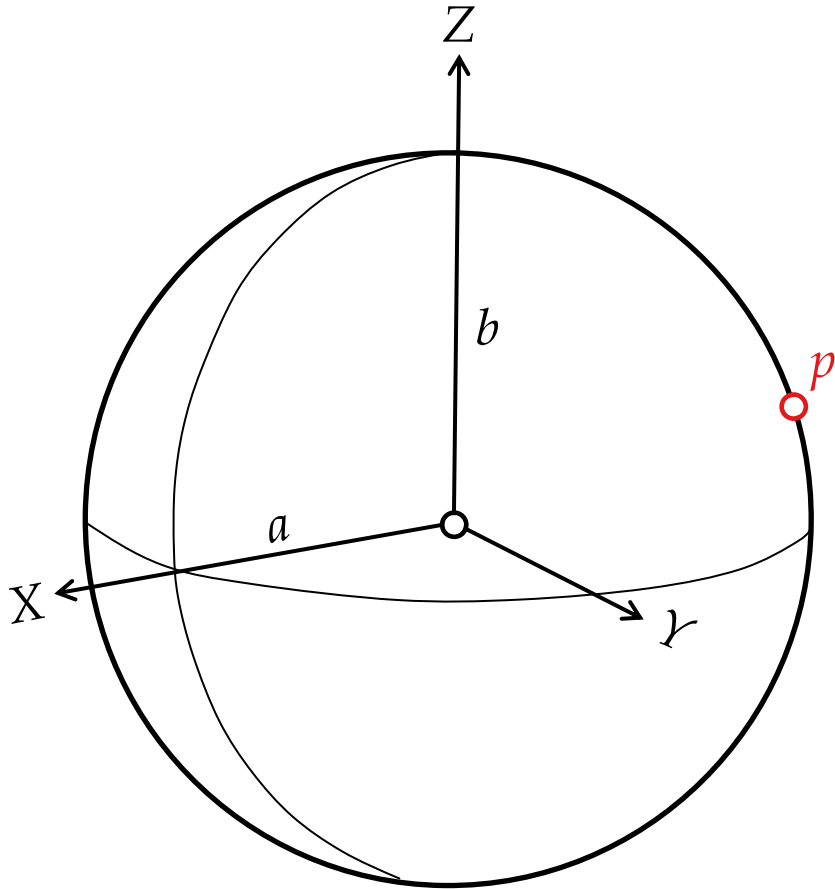
Geographische Koordinaten



Geographische Koordinaten



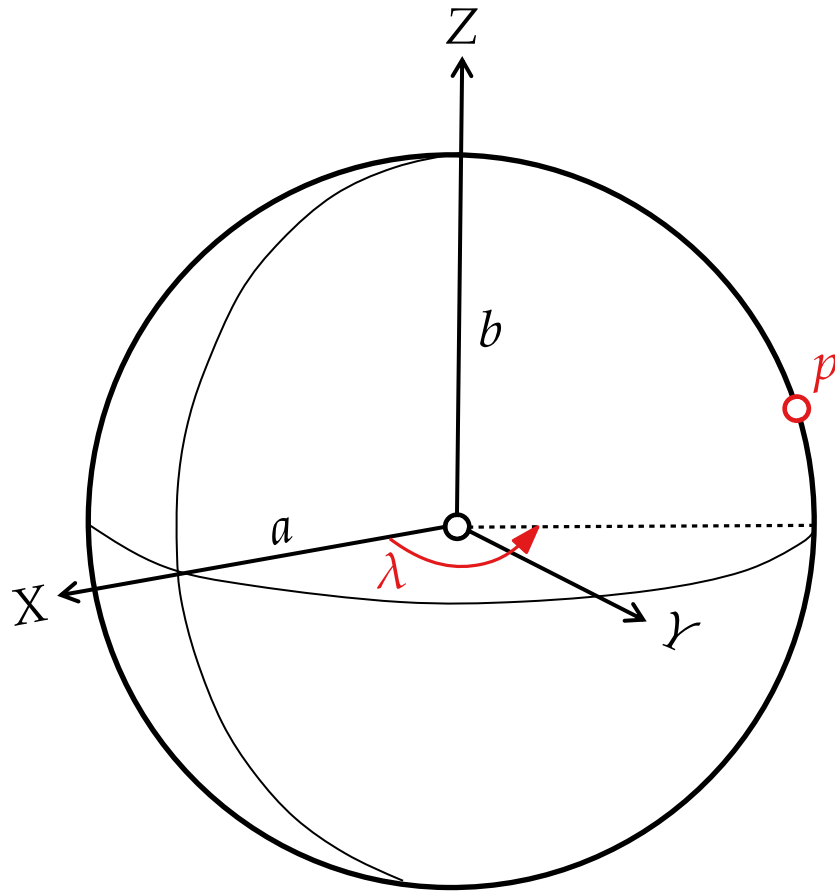
Länge λ und Breite φ



Geographische Koordinaten



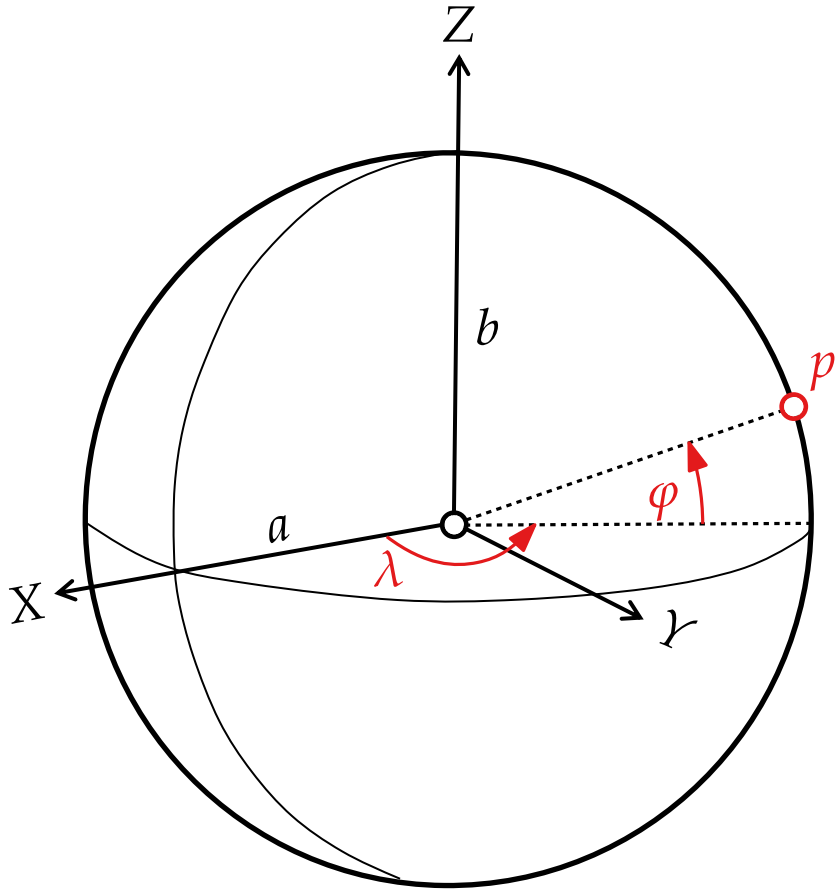
Länge λ und Breite φ



Geographische Koordinaten



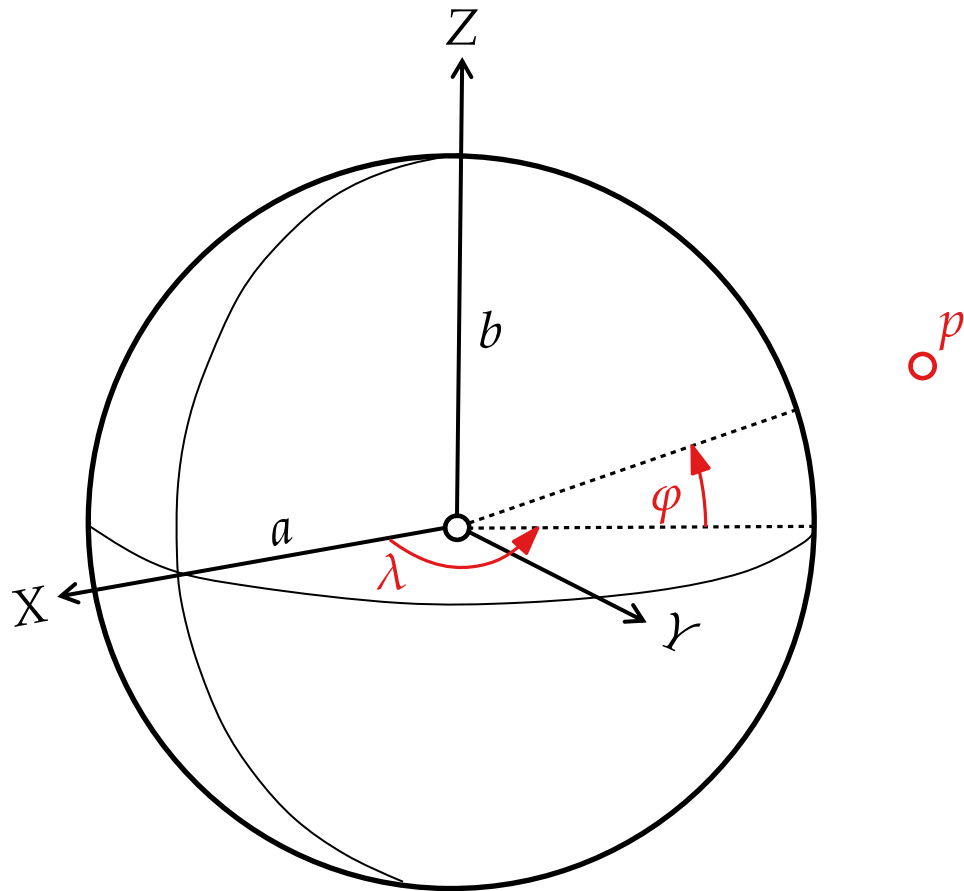
Länge λ und Breite φ



Geographische Koordinaten



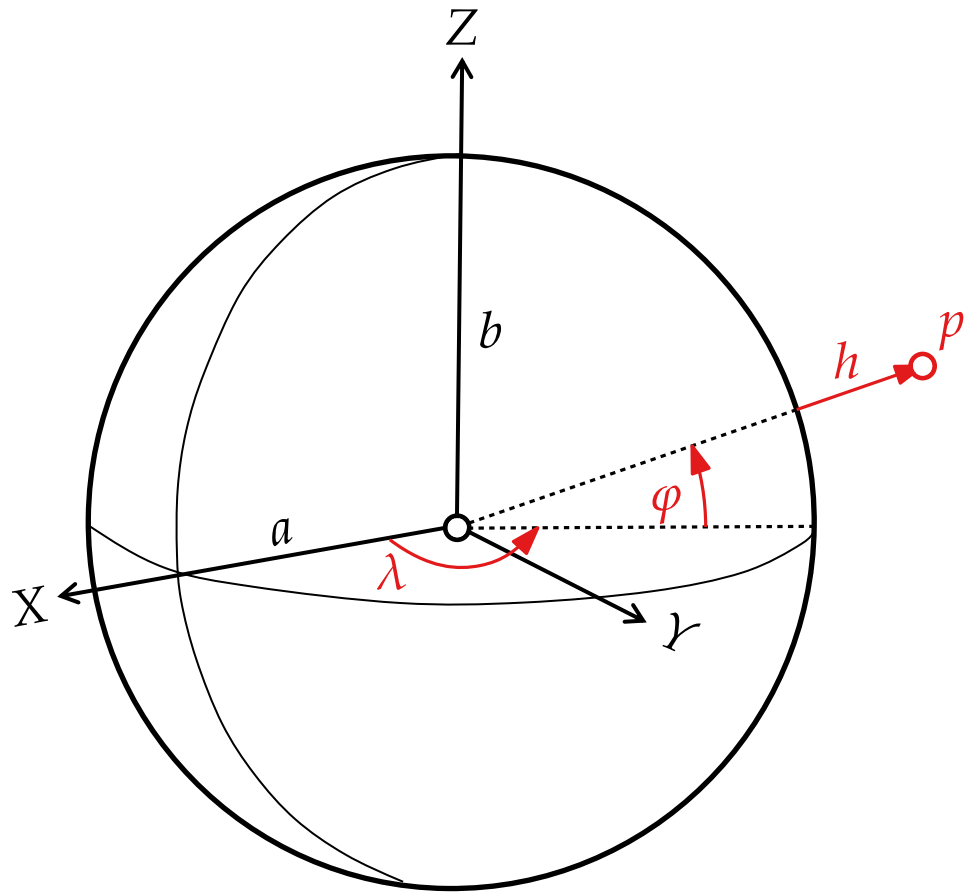
Länge λ und Breite φ



Geographische Koordinaten



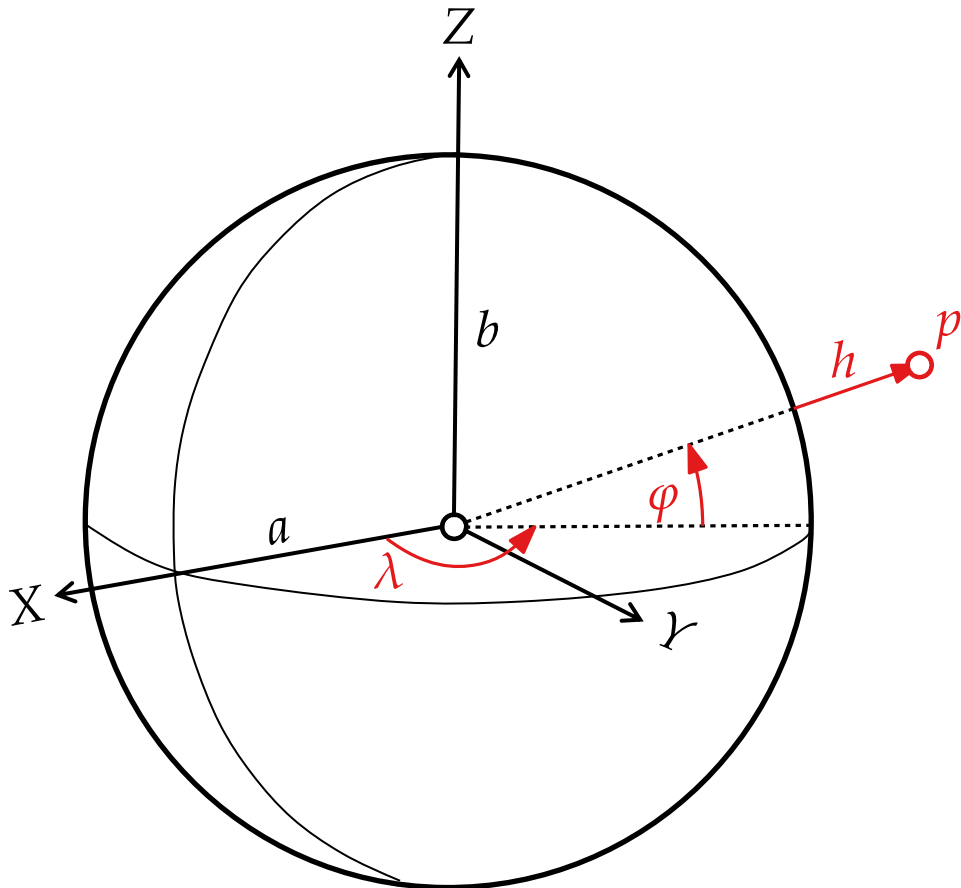
Länge λ und Breite φ



Geographische Koordinaten



Länge λ und Breite φ



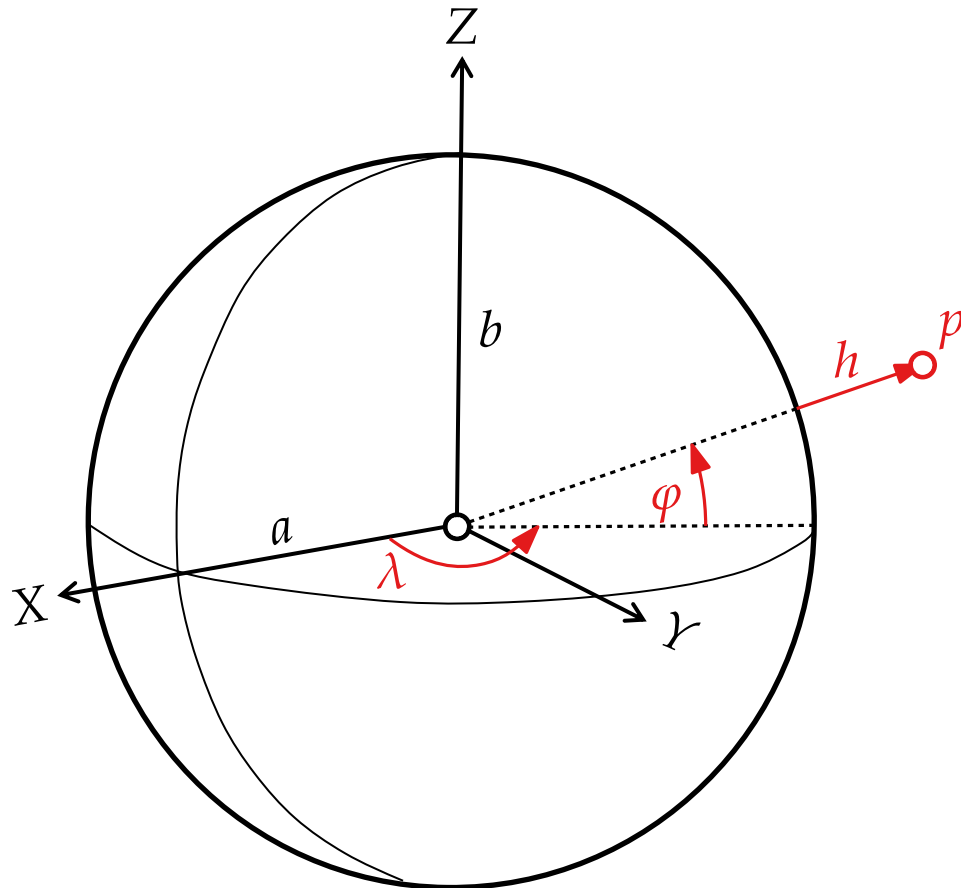
h = ellipsoidische Höhe von p
(wird selten verwendet, aber zur
Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
Koord. erforderlich)

Geographische Koordinaten



Länge λ und Breite φ

Einheiten:



h = ellipsoidische Höhe von p
(wird selten verwendet, aber zur
Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
Koord. erforderlich)

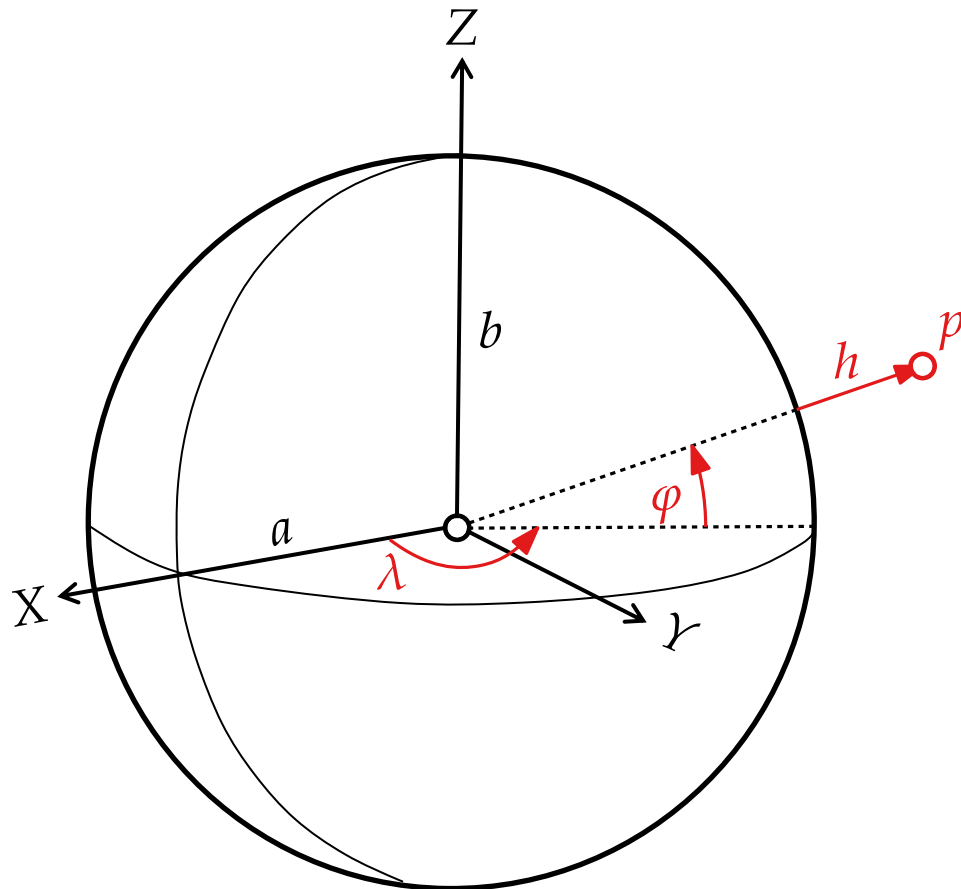
Geographische Koordinaten



Länge λ und Breite φ

Einheiten:

$$\varphi = 62^{\circ} \ 14' \ 13.33''$$



h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Geographische Koordinaten

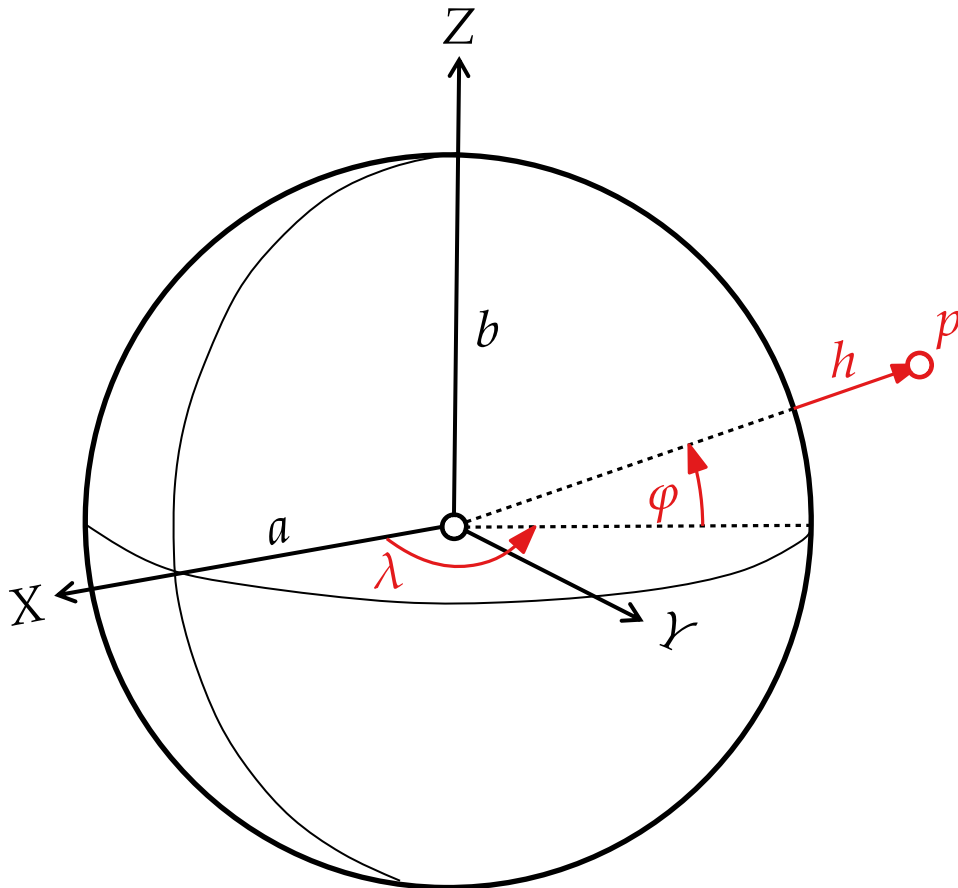


Länge λ und Breite φ

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

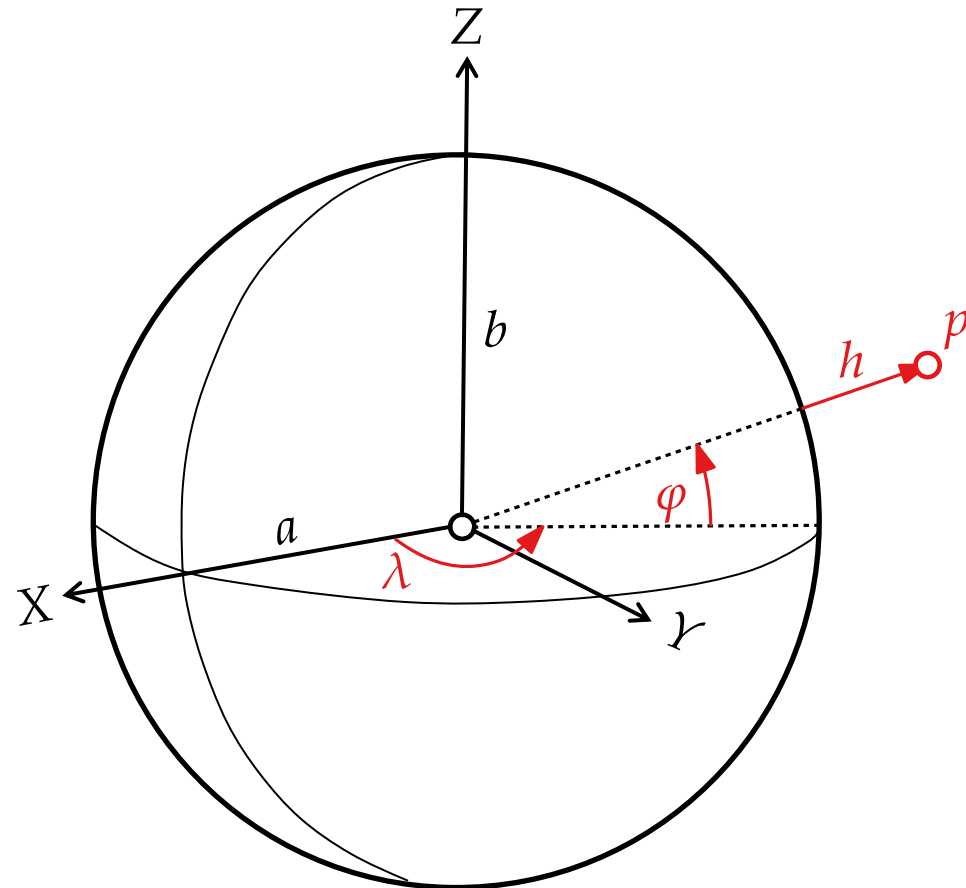


h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Geographische Koordinaten



Länge λ und Breite φ



h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

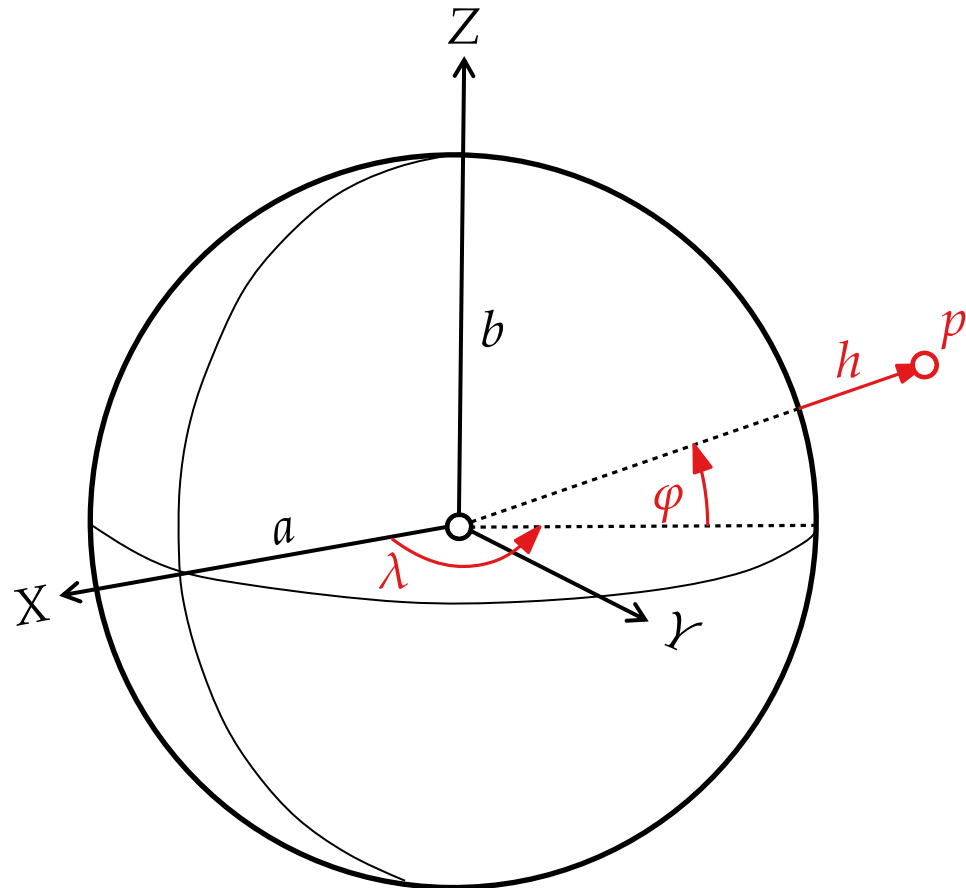
$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

Bogensekunden ($60'' = 1'$)

Geographische Koordinaten



Länge λ und Breite φ



h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

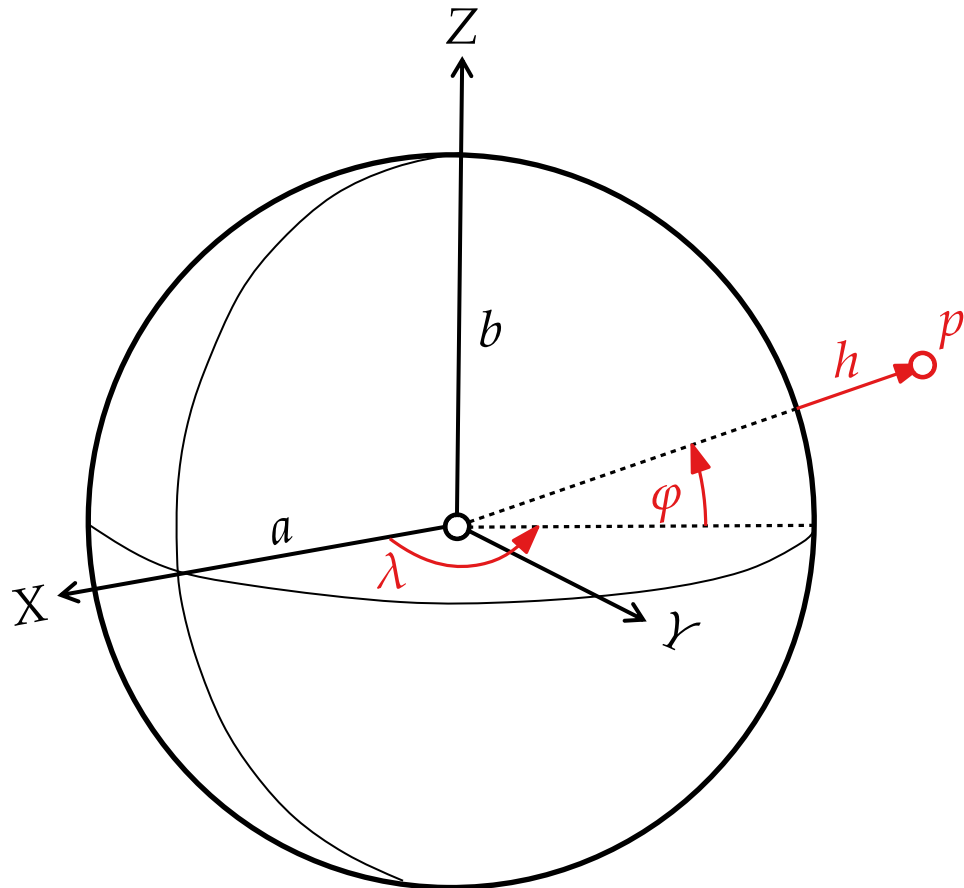
$$\approx 62,237036^\circ$$

Bogensekunden ($60'' = 1'$)



Geographische Koordinaten

Länge λ und Breite φ



h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

$$\approx 62,237036^\circ$$

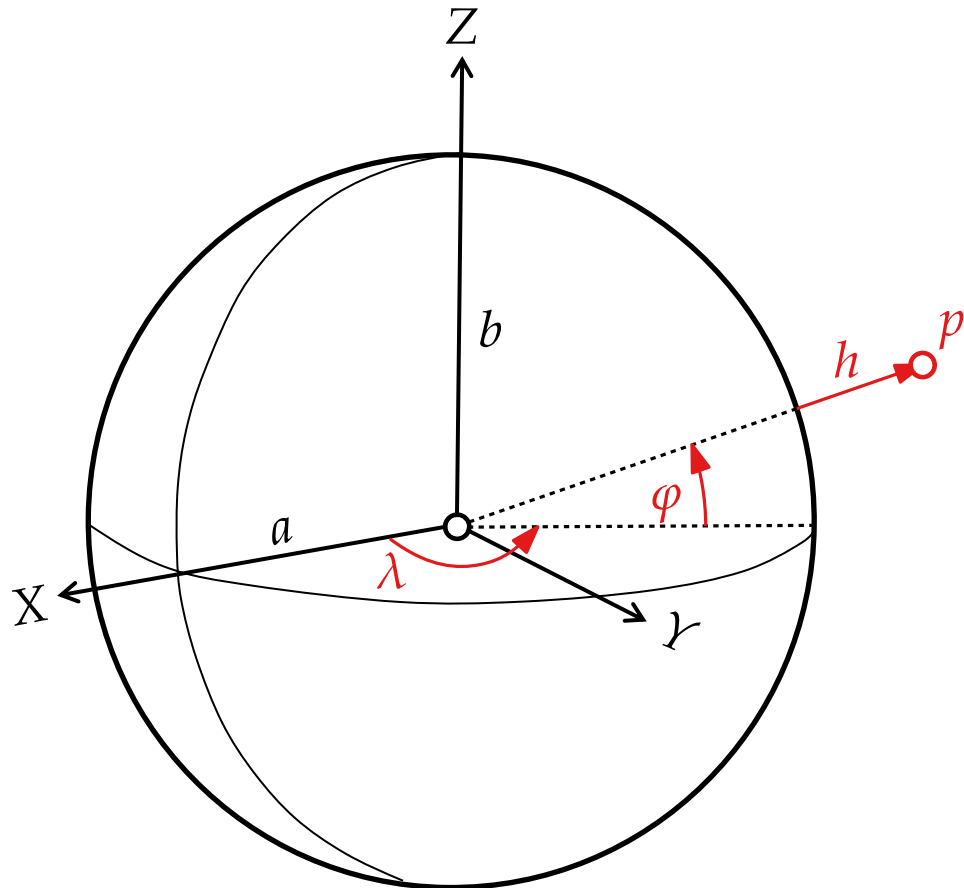
Bogensekunden ($60'' = 1'$)

Faustregel: $1'' \approx 30$ Meter

Geographische Koordinaten



Länge λ und Breite φ



h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

$$\approx 62,237036^\circ$$

Bogensekunden ($60'' = 1'$)

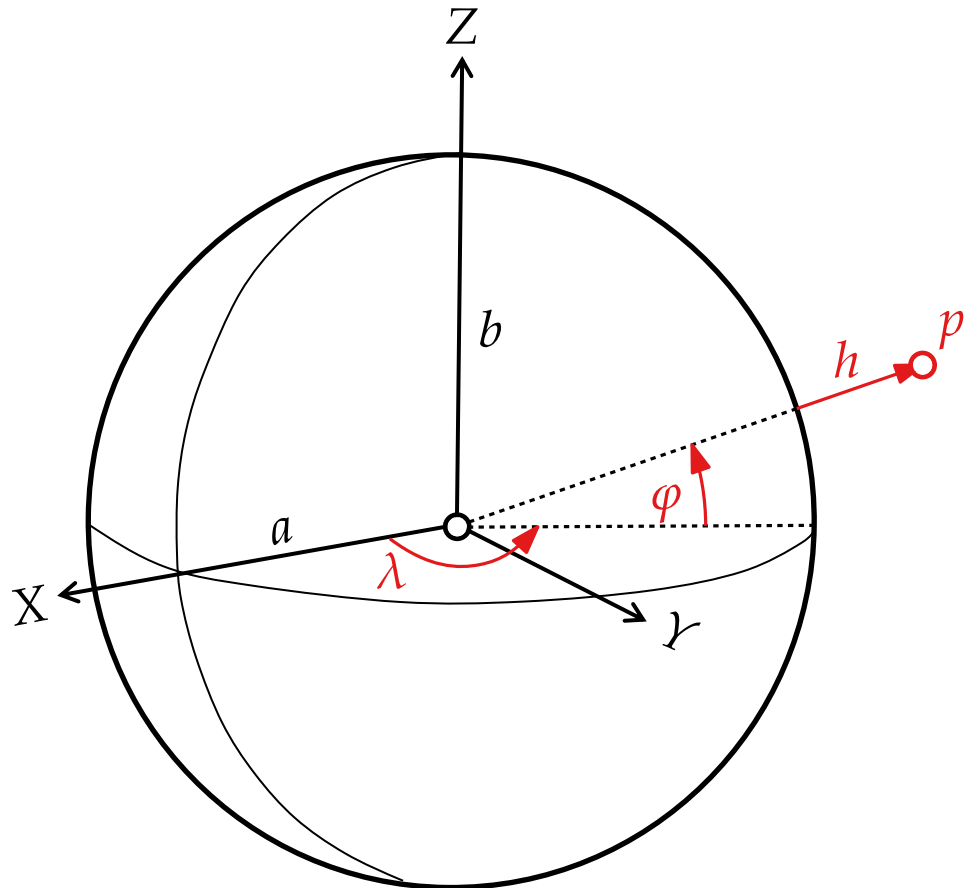
Faustregel: $1'' \approx 30$ Meter

Zusammenhang:



Geographische Koordinaten

Länge λ und Breite φ



h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

$$\approx 62,237036^\circ$$

Bogensekunden ($60'' = 1'$)

Faustregel: $1'' \approx 30$ Meter

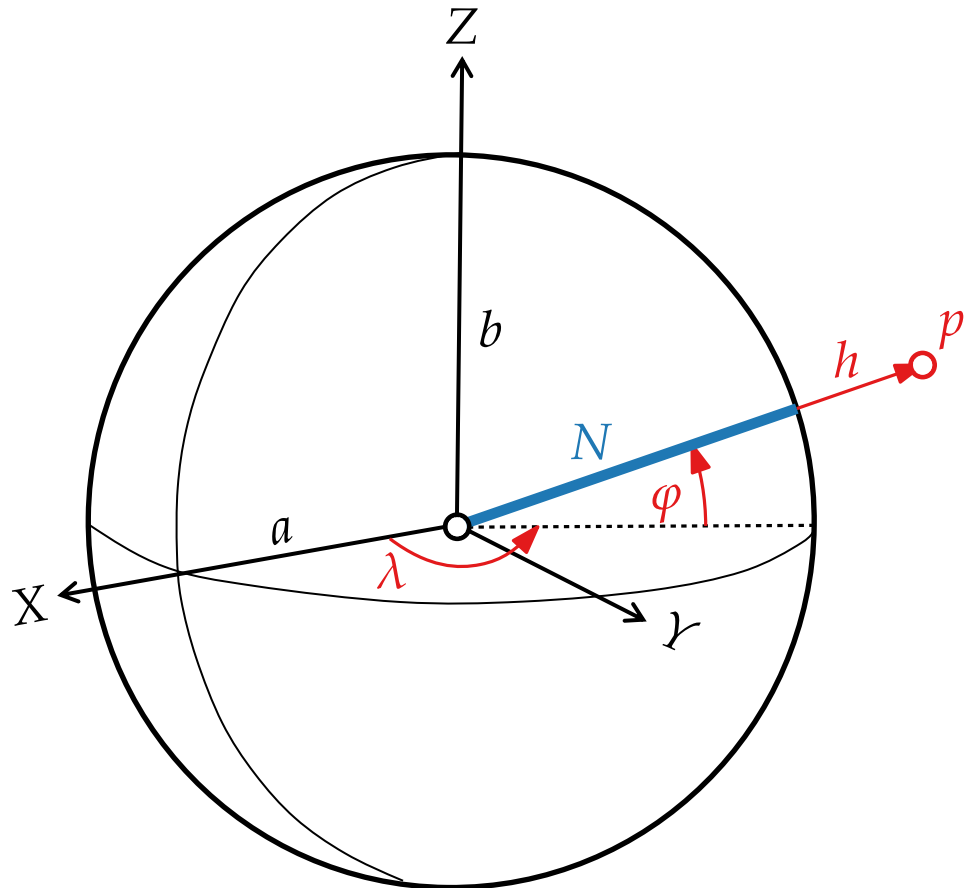
Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$



Geographische Koordinaten

Länge λ und Breite φ



h = ellipsoidische Höhe von p
 (wird selten verwendet, aber zur
 Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
 Koord. erforderlich)

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

$$\approx 62,237036^\circ$$

Bogensekunden ($60'' = 1'$)

Faustregel: $1'' \approx 30$ Meter

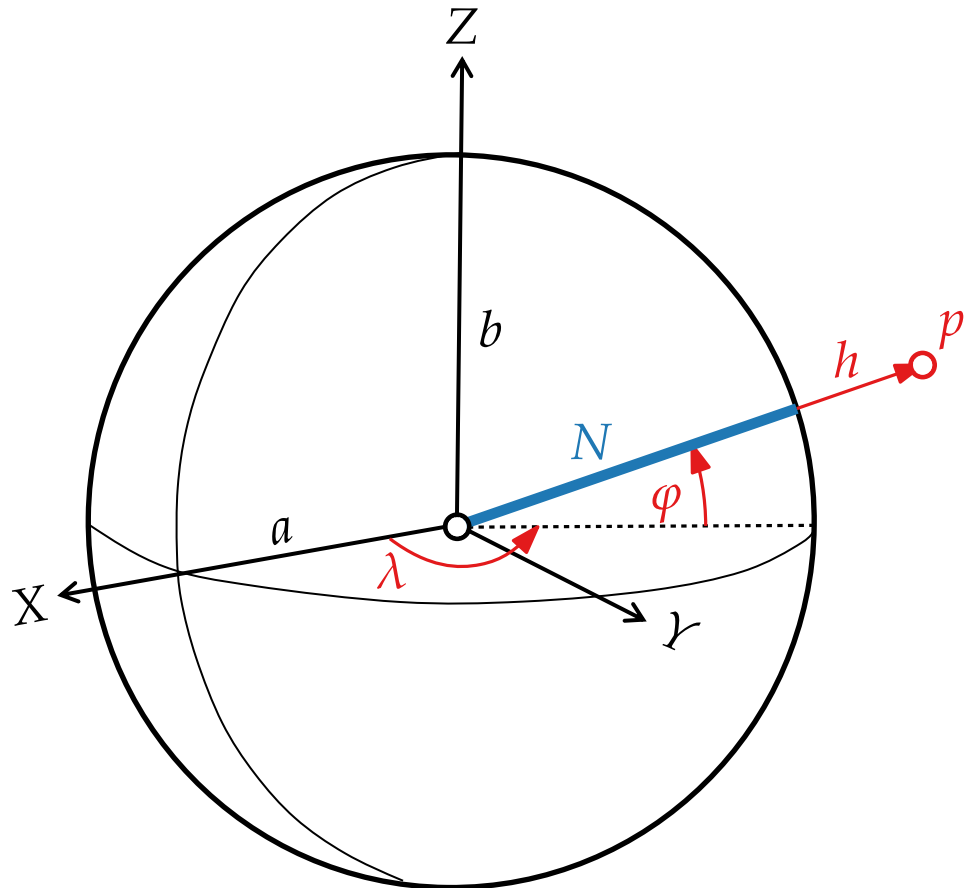
Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Geographische Koordinaten



Länge λ und Breite φ



h = ellipsoidische Höhe von p
(wird selten verwendet, aber zur
Berechnung von (X_p, Y_p, Z_p) aus geogr.
Koord. erforderlich)

Einheiten:

Bogenminuten ($60' = 1^\circ$)

$$\varphi = 62^\circ 14' 13.33''$$

$$\approx 62,237036^\circ$$

Bogensekunden ($60'' = 1'$)

Faustregel: $1'' \approx 30$ Meter

Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

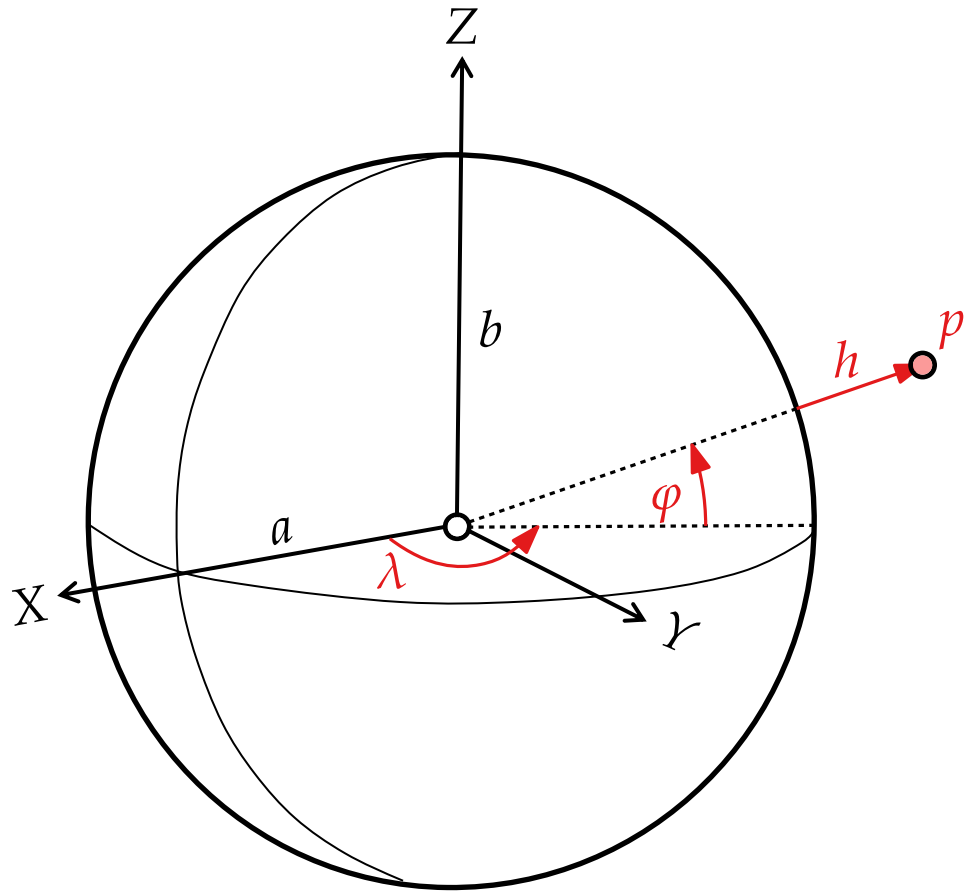
$$\text{mit } N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Projektionen



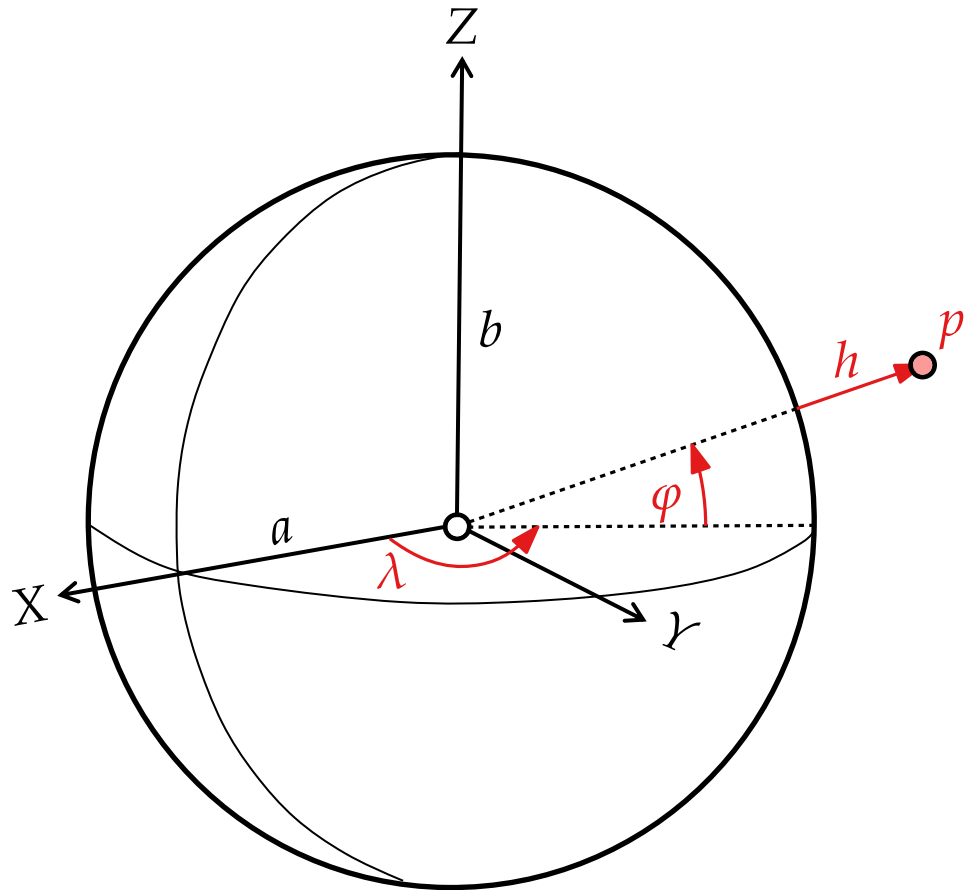
geographische Koordinaten



Projektionen



geographische Koordinaten



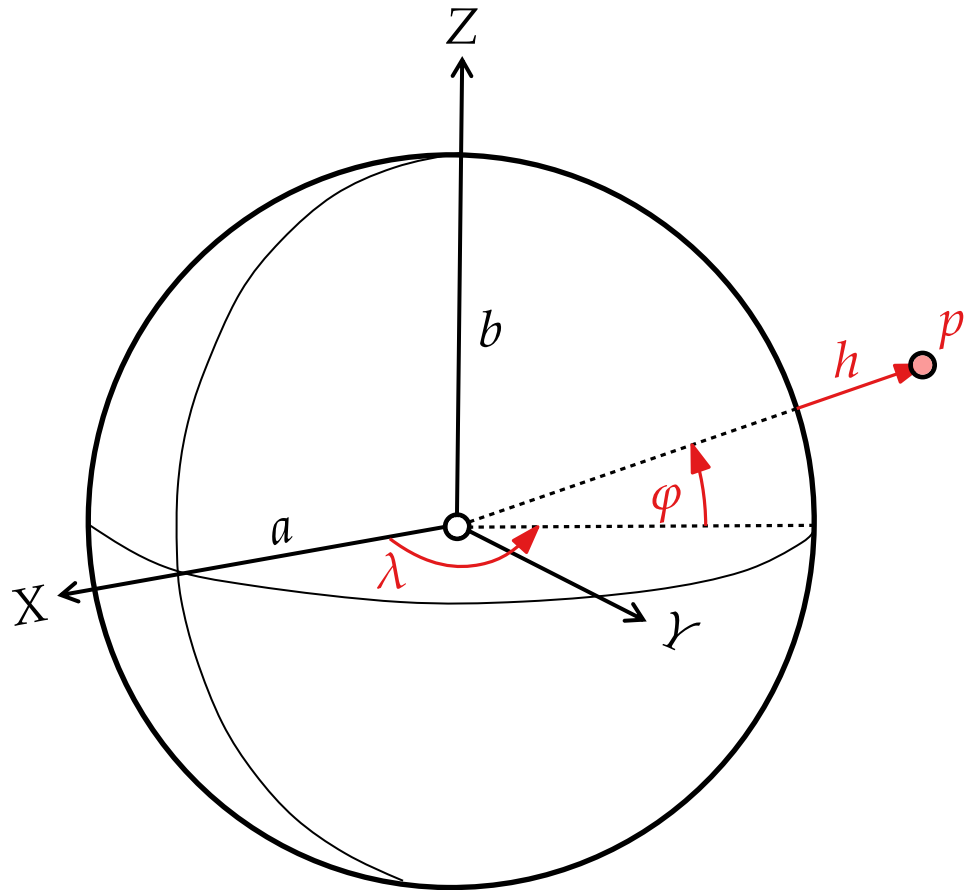
projizierte Koordinaten



Projektionen



geographische Koordinaten



Kartenabbildung

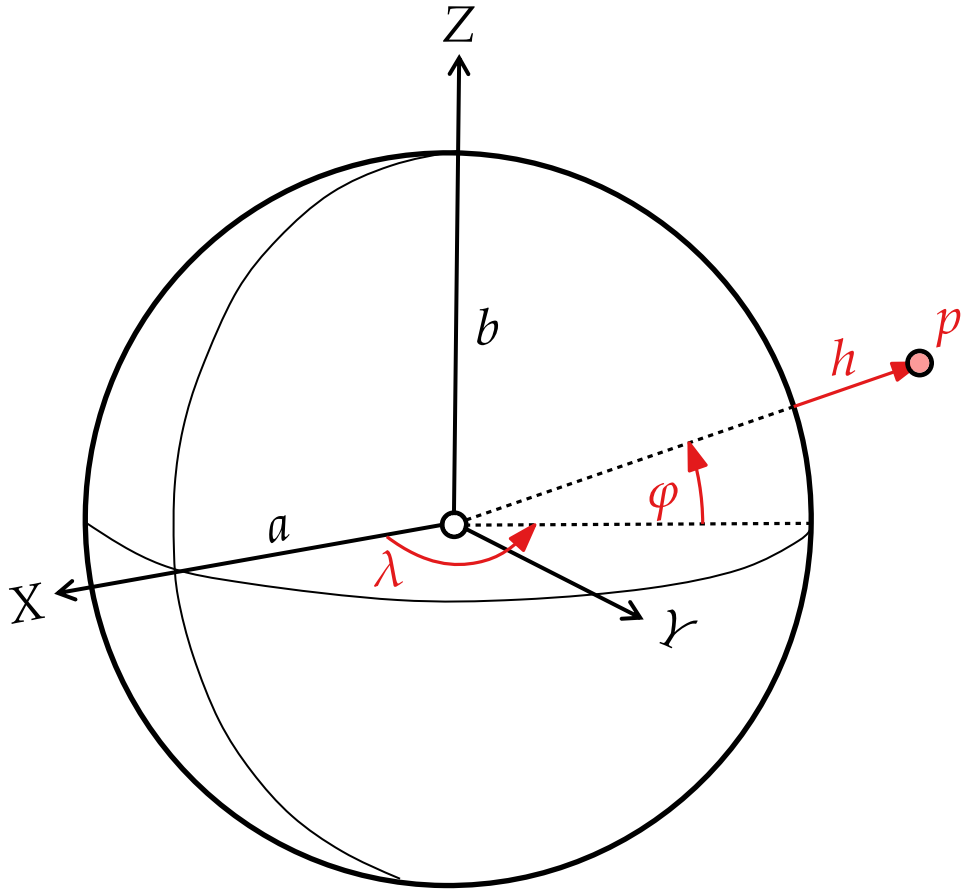
projizierte Koordinaten



Projektionen



geographische Koordinaten



Kartenabbildung

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = f(\varphi_p, \lambda_p)$$

projizierte Koordinaten

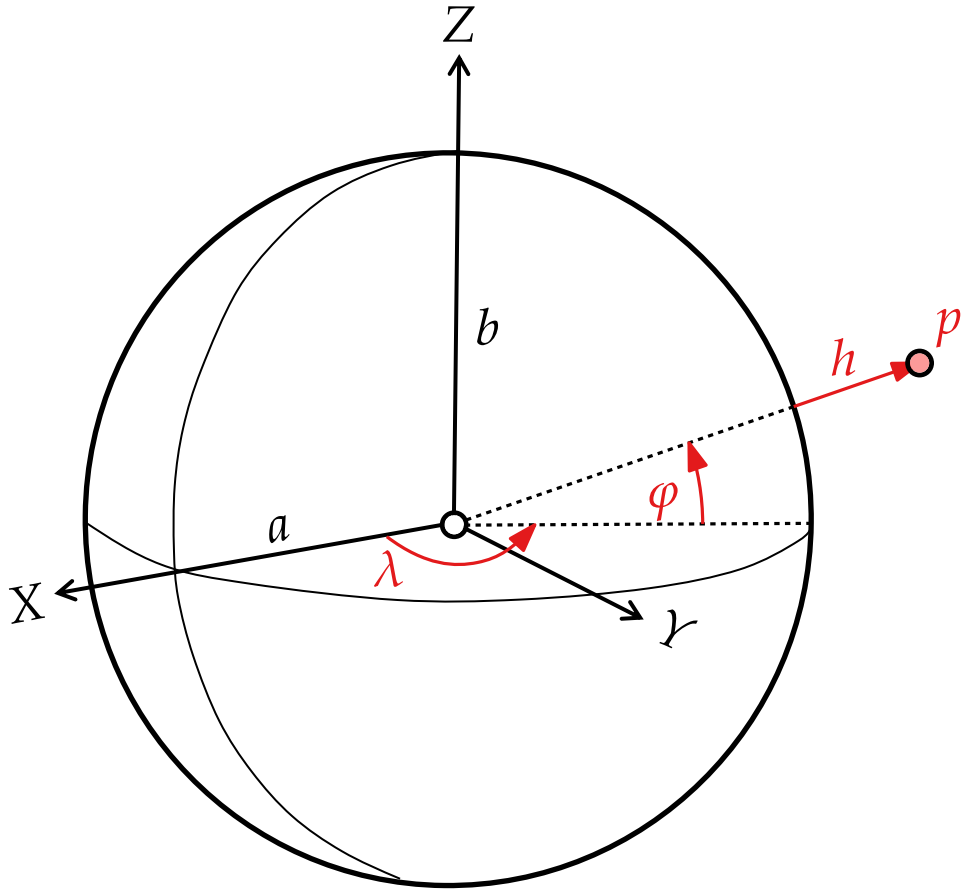


Projektionen

17 - 5



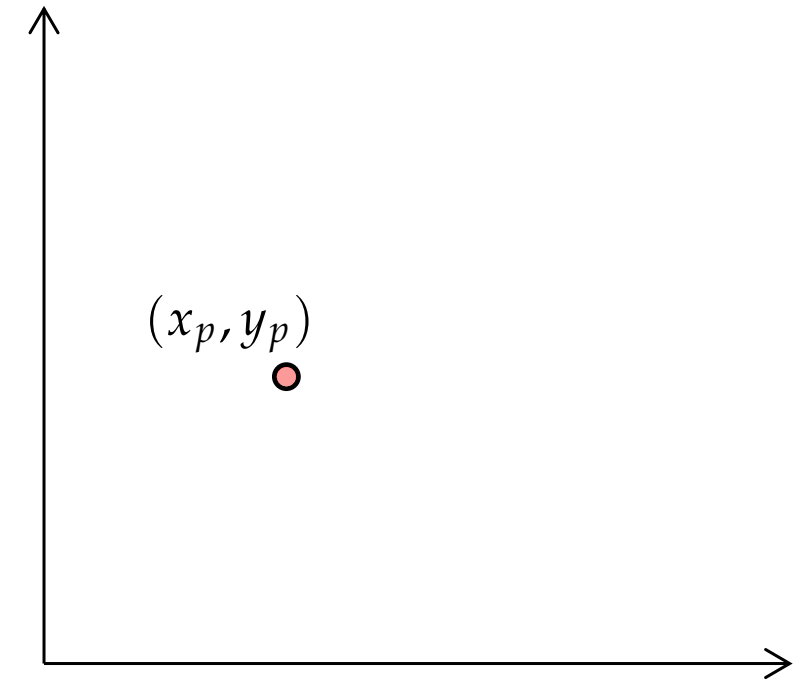
geographische Koordinaten



Kartenabbildung

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = f(\varphi_p, \lambda_p)$$

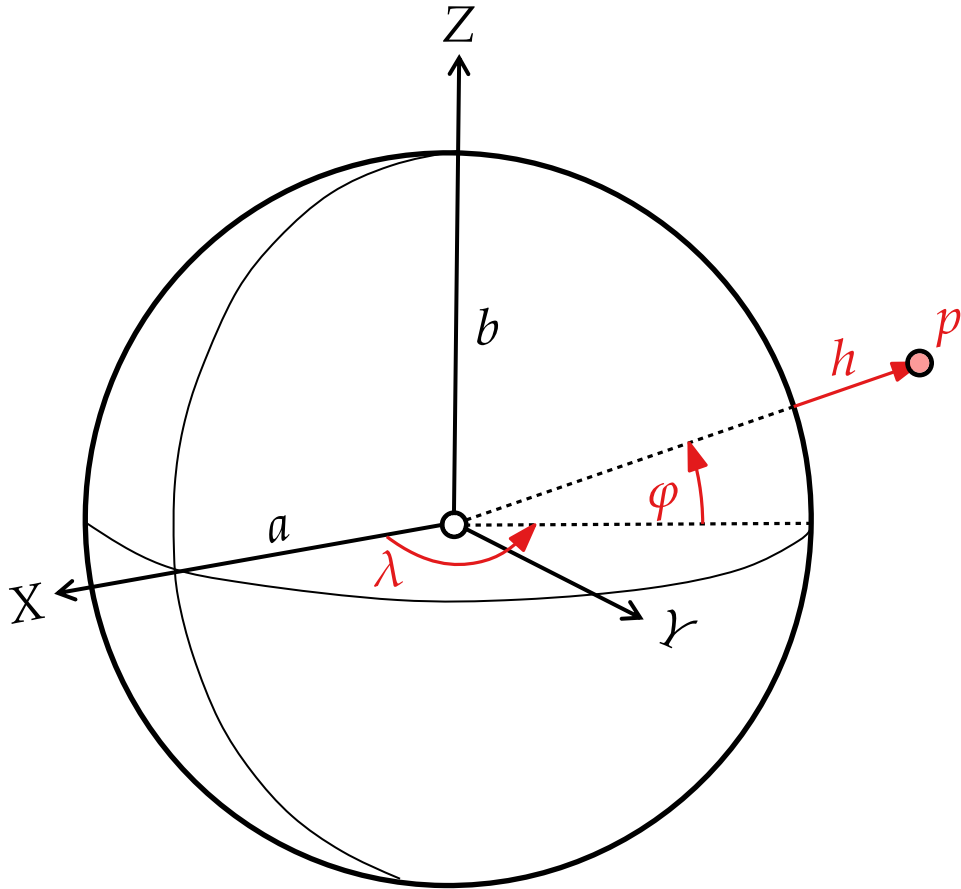
projizierte Koordinaten



Projektionen



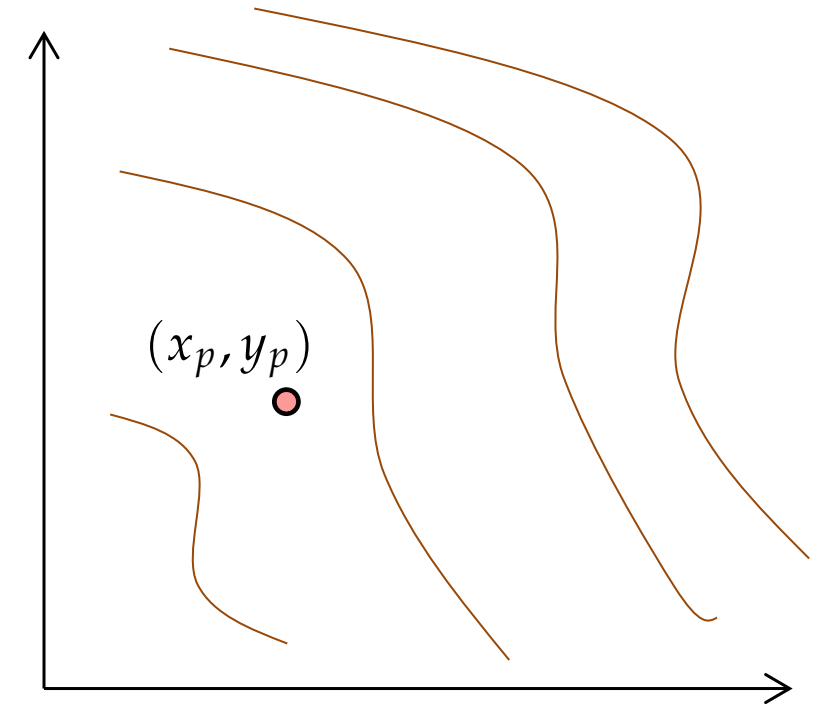
geographische Koordinaten



Kartenabbildung

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = f(\varphi_p, \lambda_p)$$

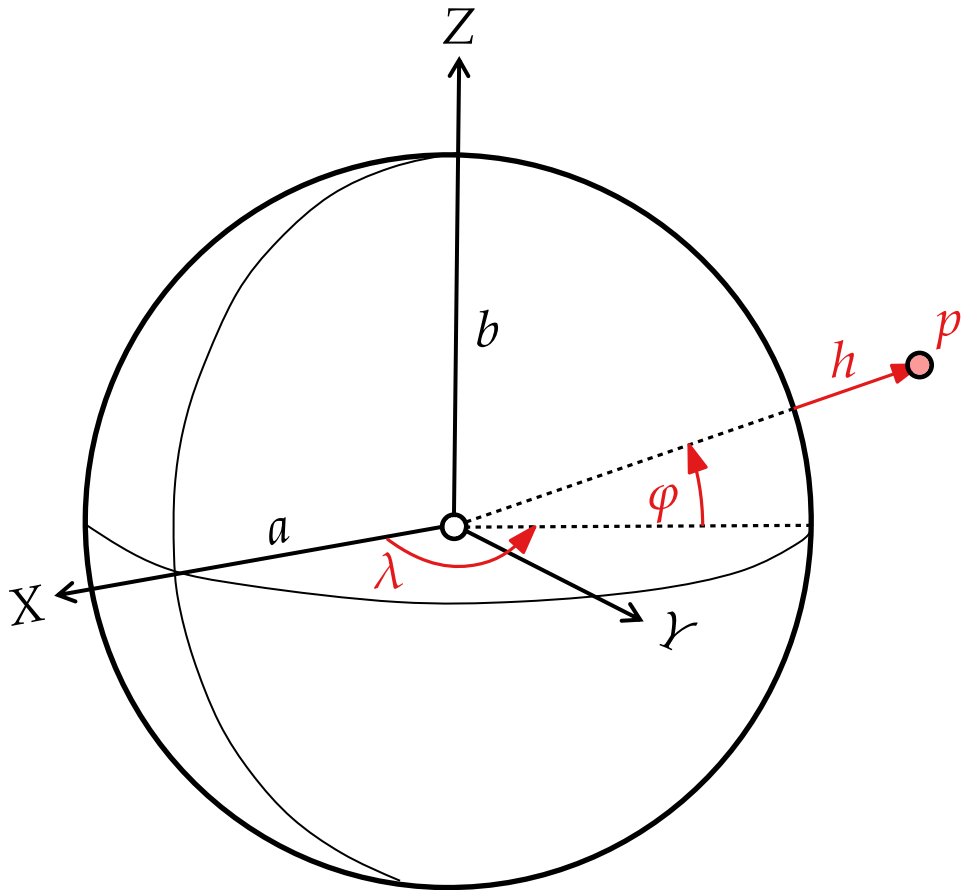
projizierte Koordinaten



Projektionen



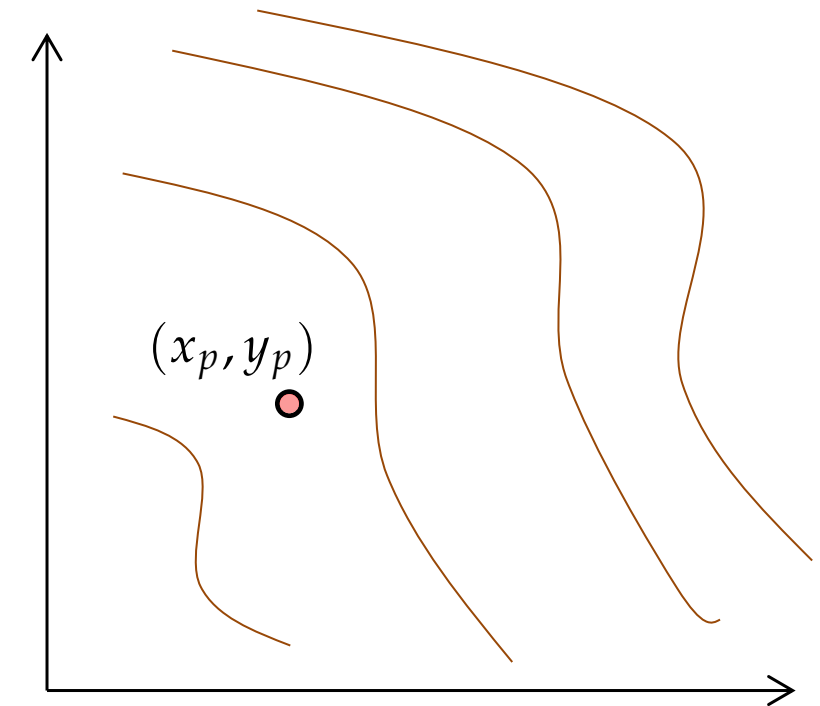
geographische Koordinaten



Kartenabbildung

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = f(\varphi_p, \lambda_p)$$

projizierte Koordinaten

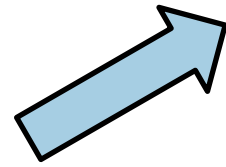
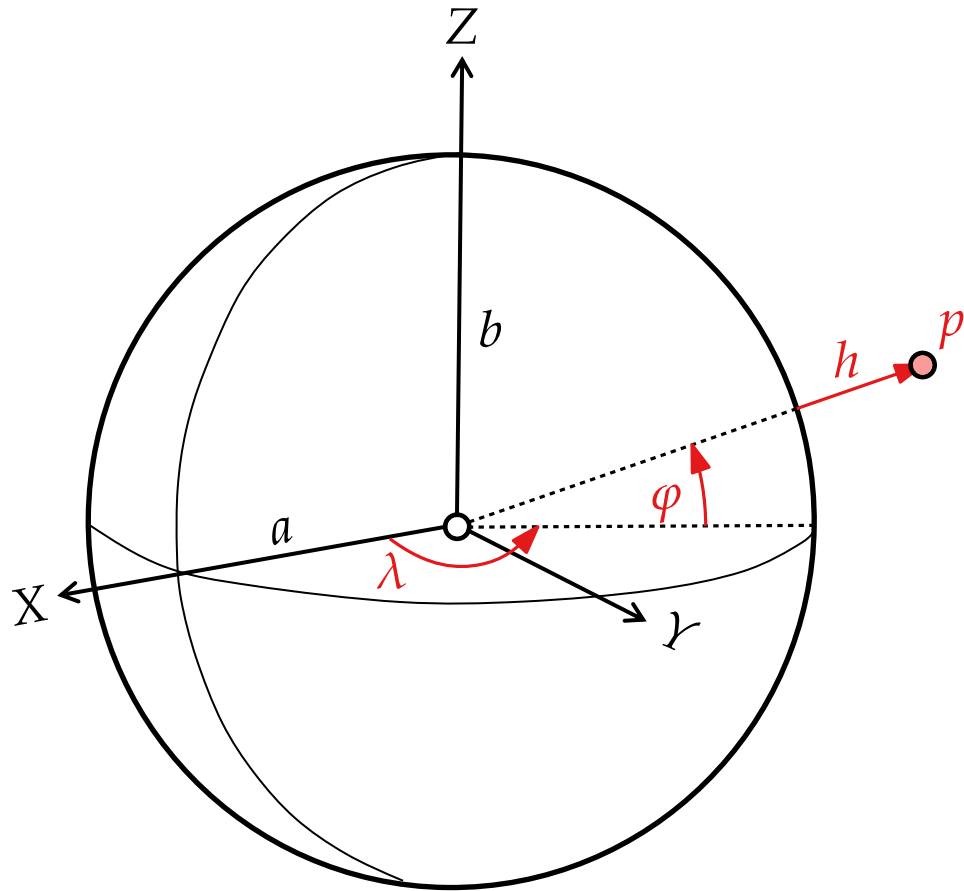


normalerweise:
Höhen in Karte beziehen
sich aufs Geoid

Projektionen



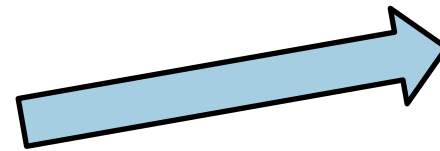
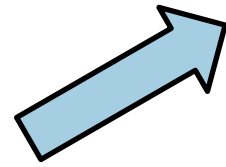
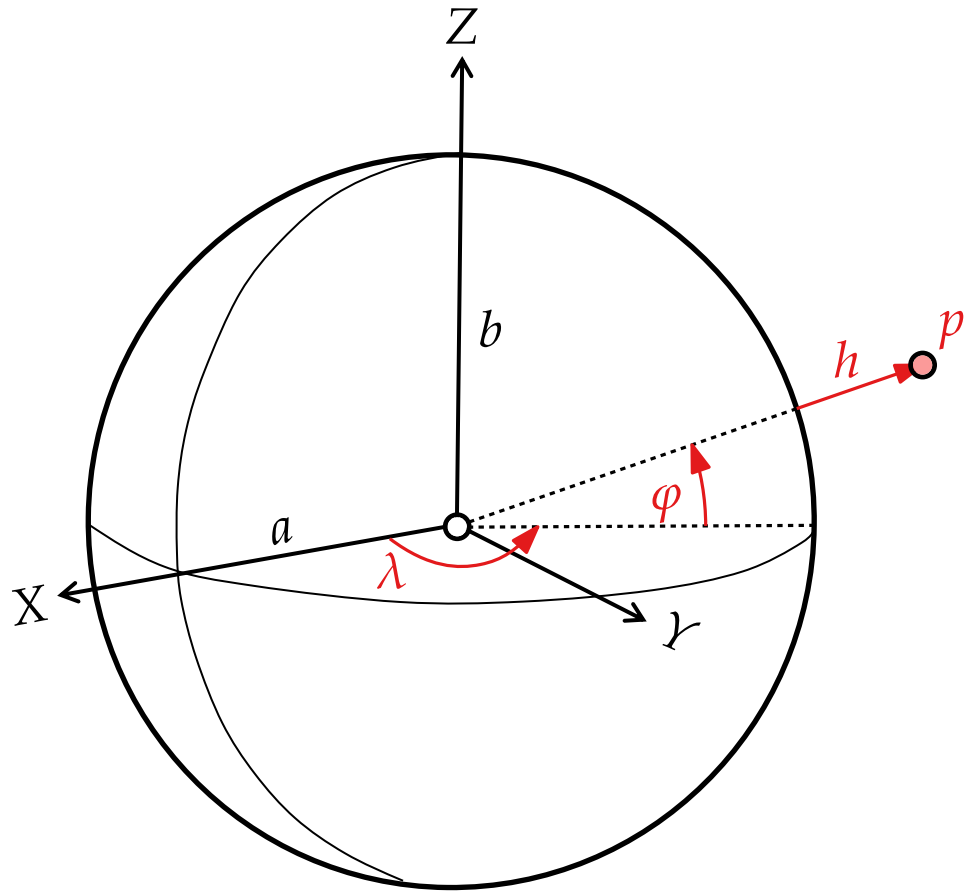
geographische Koordinaten



Projektionen



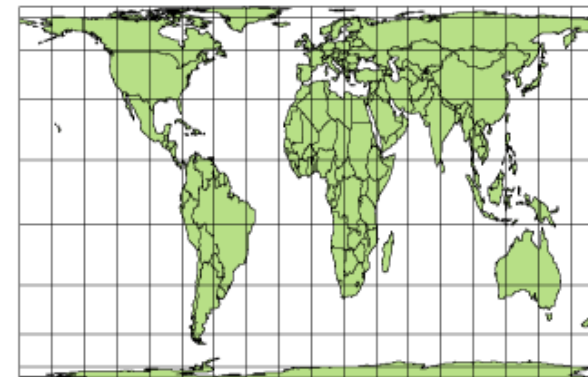
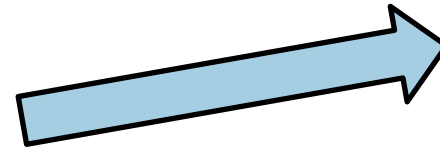
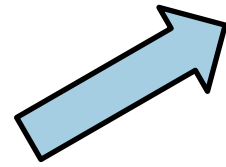
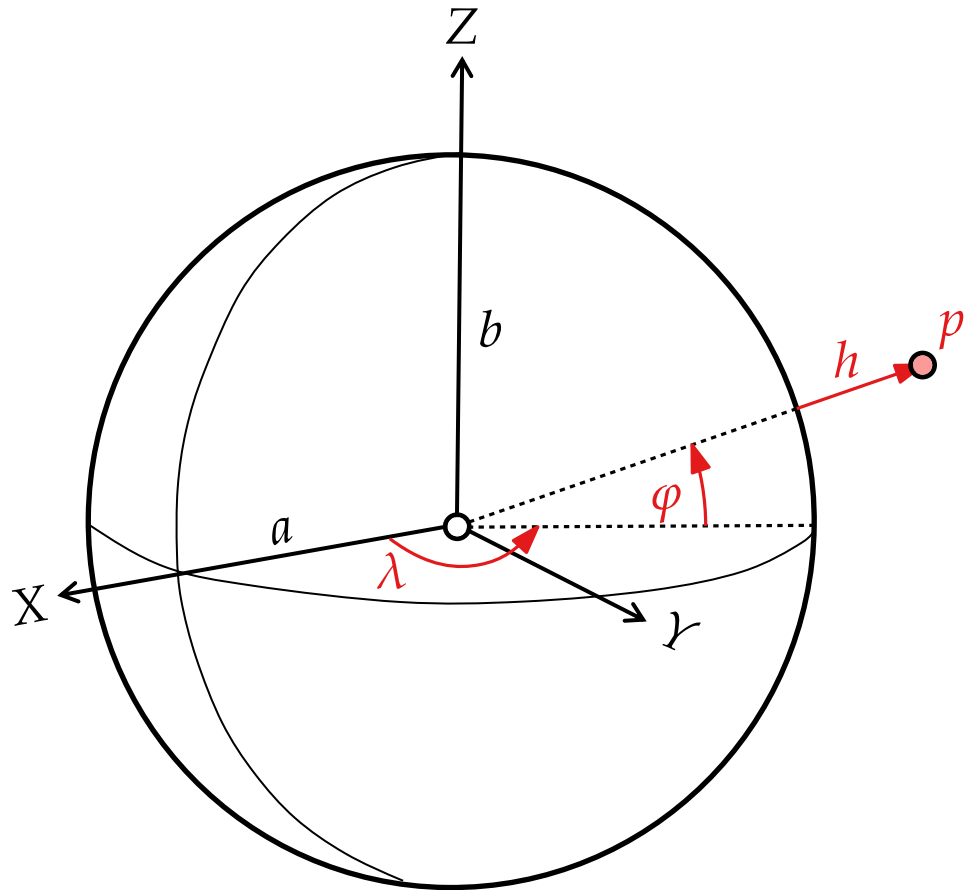
geographische Koordinaten



Projektionen



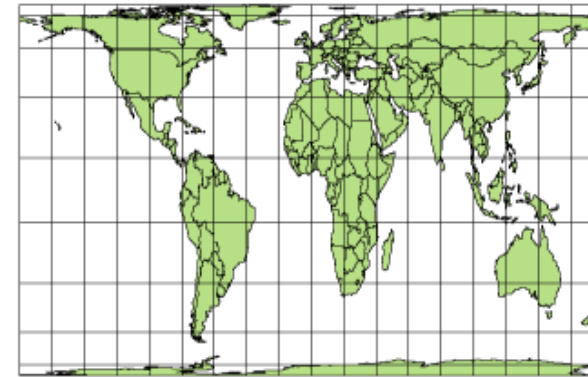
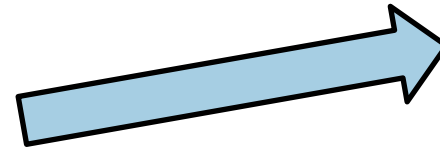
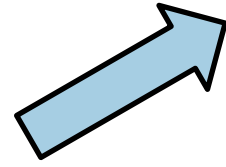
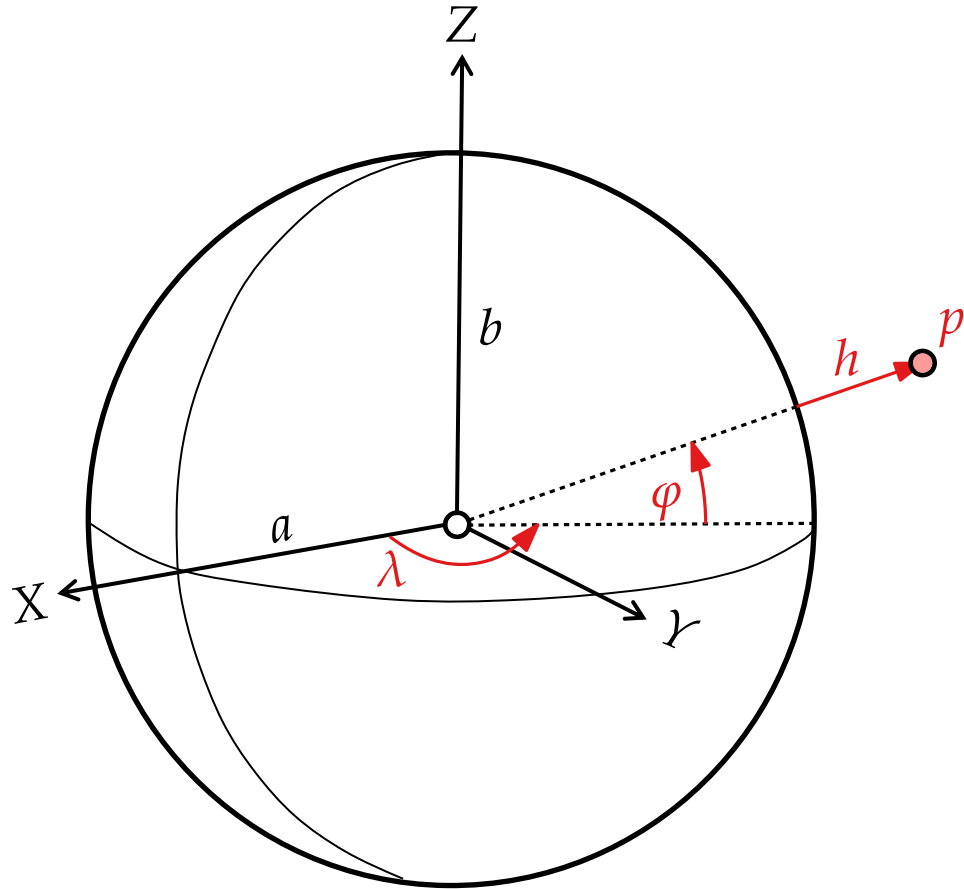
geographische Koordinaten



Projektionen



geographische Koordinaten

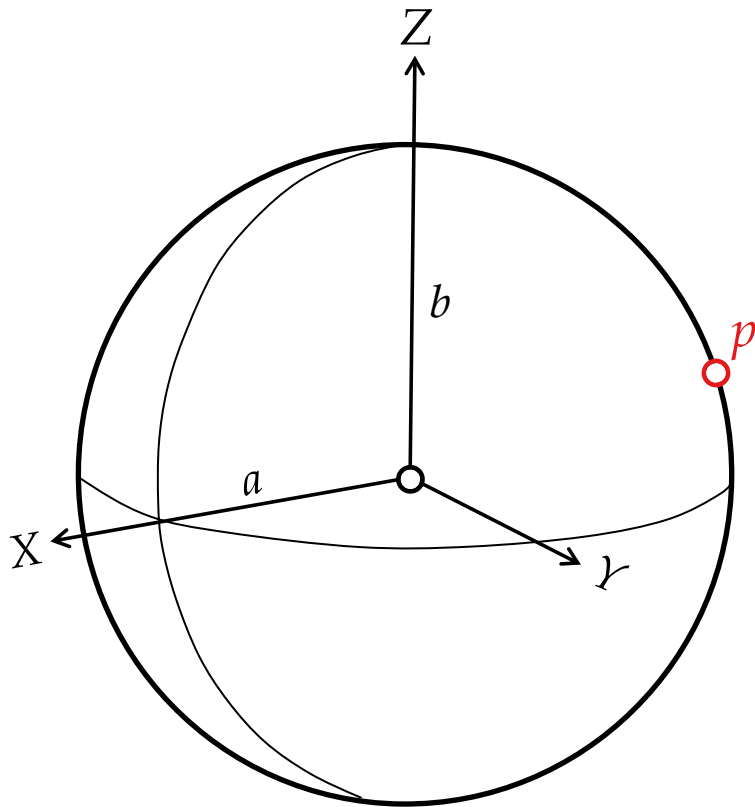


verschiedene Abbildungen für verschiedene Zwecke

Was brauchen wir?



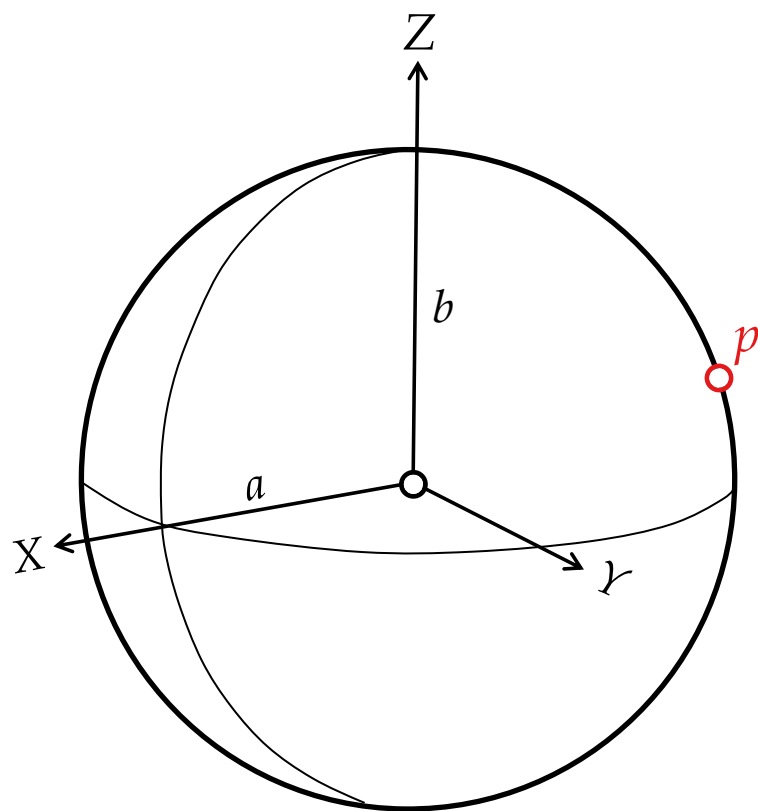
dreidimensionale kartesische Koordinaten (X, Y, Z) :



Was brauchen wir?



dreidimensionale kartesische Koordinaten (X, Y, Z) : geodätisches Datum

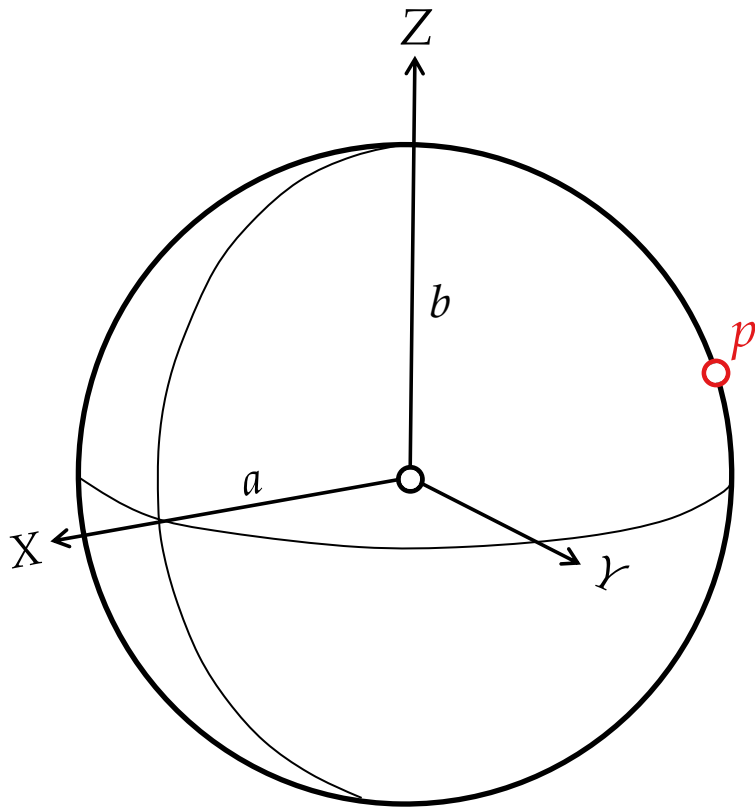




Was brauchen wir?

dreidimensionale kartesische Koordinaten (X, Y, Z) : geodätisches Datum

geographische Koordinaten (λ, φ) :

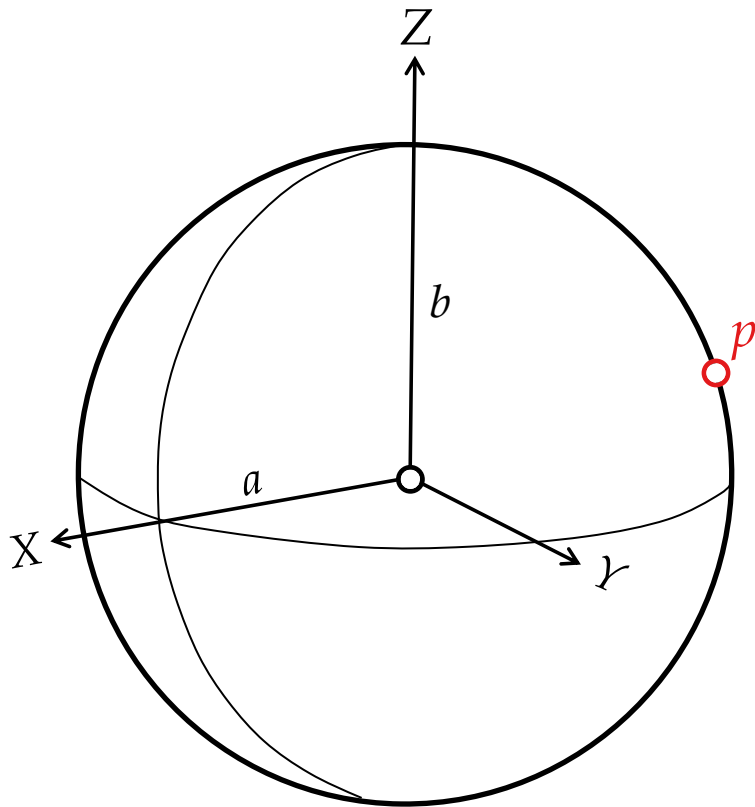




Was brauchen wir?

dreidimensionale kartesische Koordinaten (X, Y, Z) : geodätisches Datum

geographische Koordinaten (λ, φ) : geodätisches Datum
+ Form des Ellipsoids



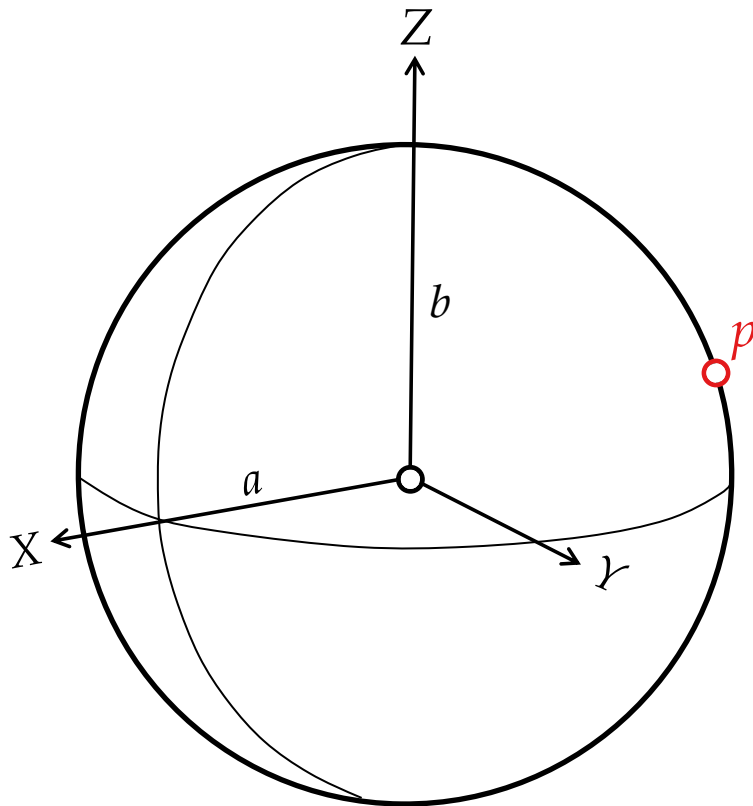


Was brauchen wir?

dreidimensionale kartesische Koordinaten (X, Y, Z) : geodätisches Datum

geographische Koordinaten (λ, φ) : geodätisches Datum
+ Form des Ellipsoids

zweidimensionale Koordinaten (x, y) :



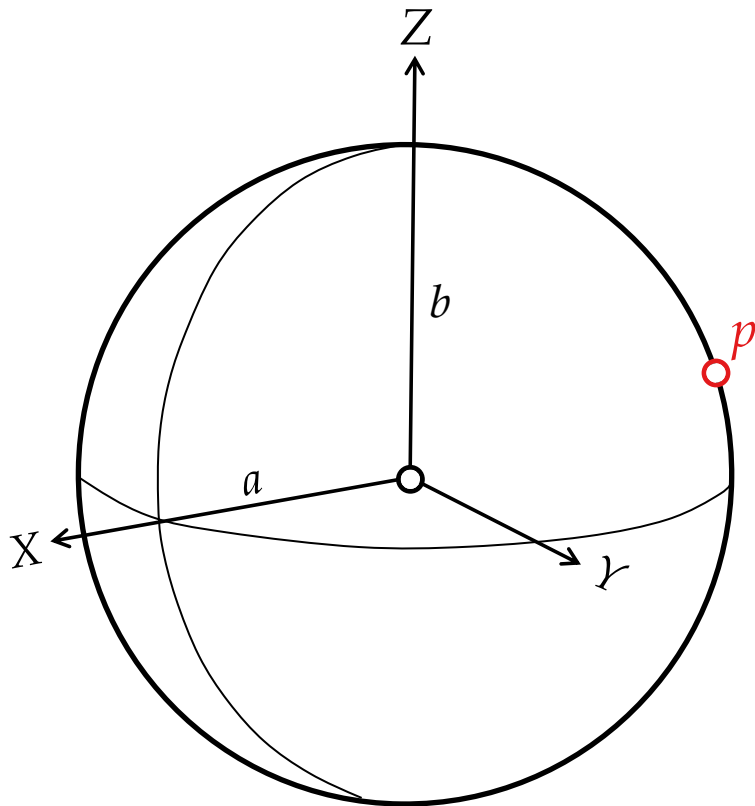


Was brauchen wir?

dreidimensionale kartesische Koordinaten (X, Y, Z) : geodätisches Datum

geographische Koordinaten (λ, φ) : geodätisches Datum
+ Form des Ellipsoids

zweidimensionale Koordinaten (x, y) : geodätisches Datum
+ Form des Ellipsoids
+ verwendete Kartenabbildung



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda)$$

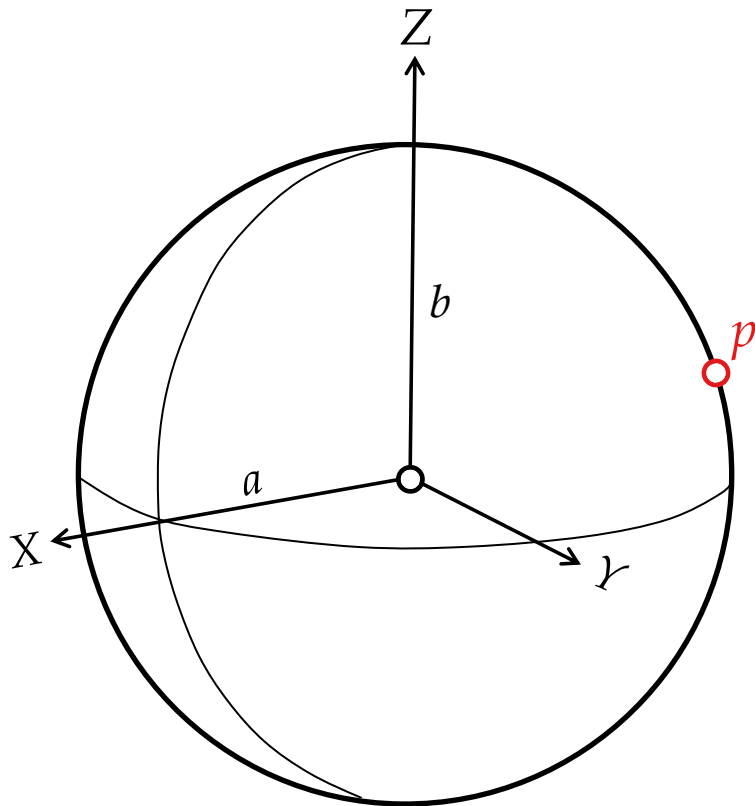


Was brauchen wir?

dreidimensionale kartesische Koordinaten (X, Y, Z) : geodätisches Datum

geographische Koordinaten (λ, φ) : geodätisches Datum
+ Form des Ellipsoids

zweidimensionale Koordinaten (x, y) : geodätisches Datum
+ Form des Ellipsoids
+ verwendete Kartenabbildung



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda)$$

gesucht!

Plattkarte



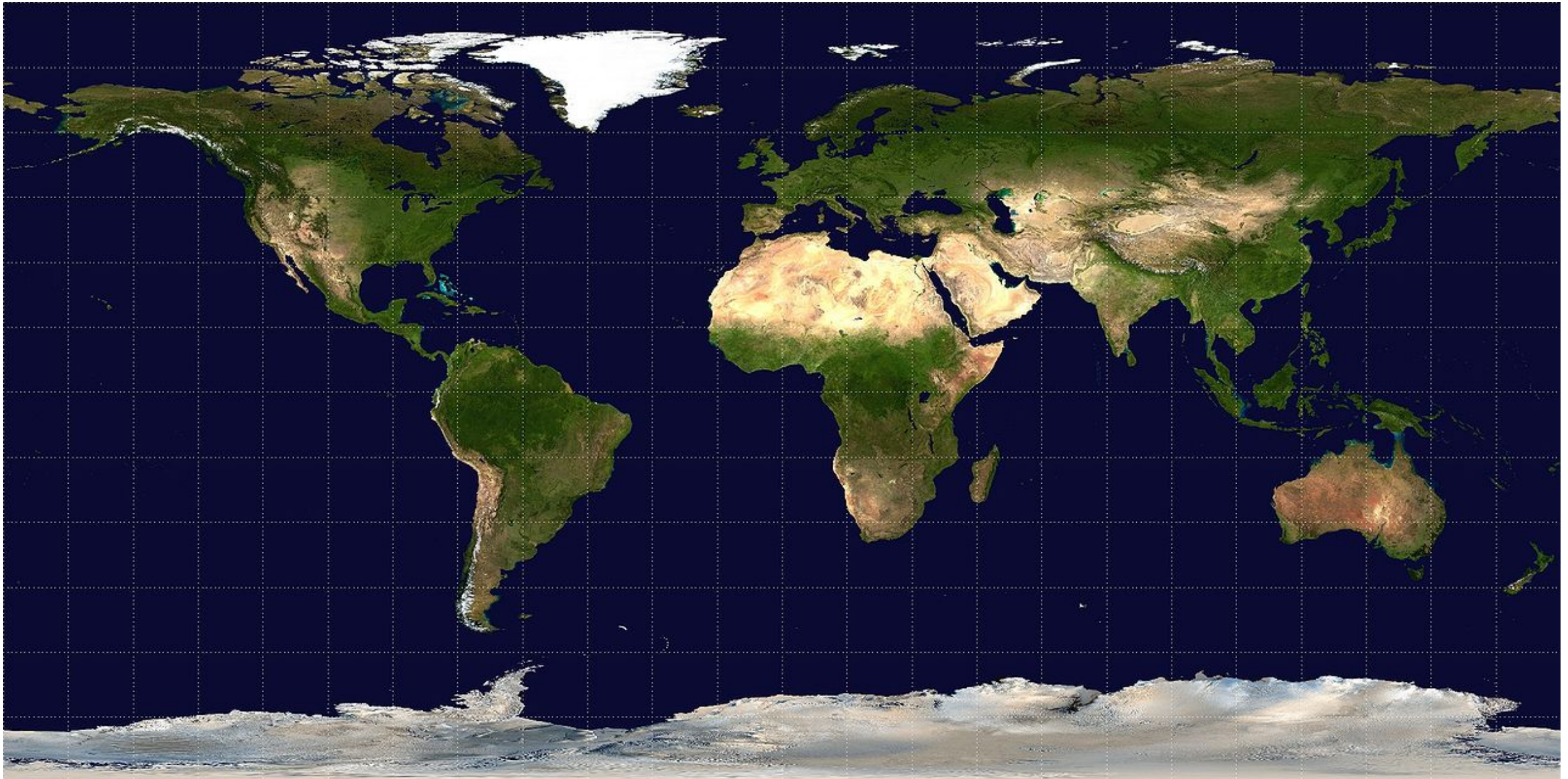
Plattkarte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$



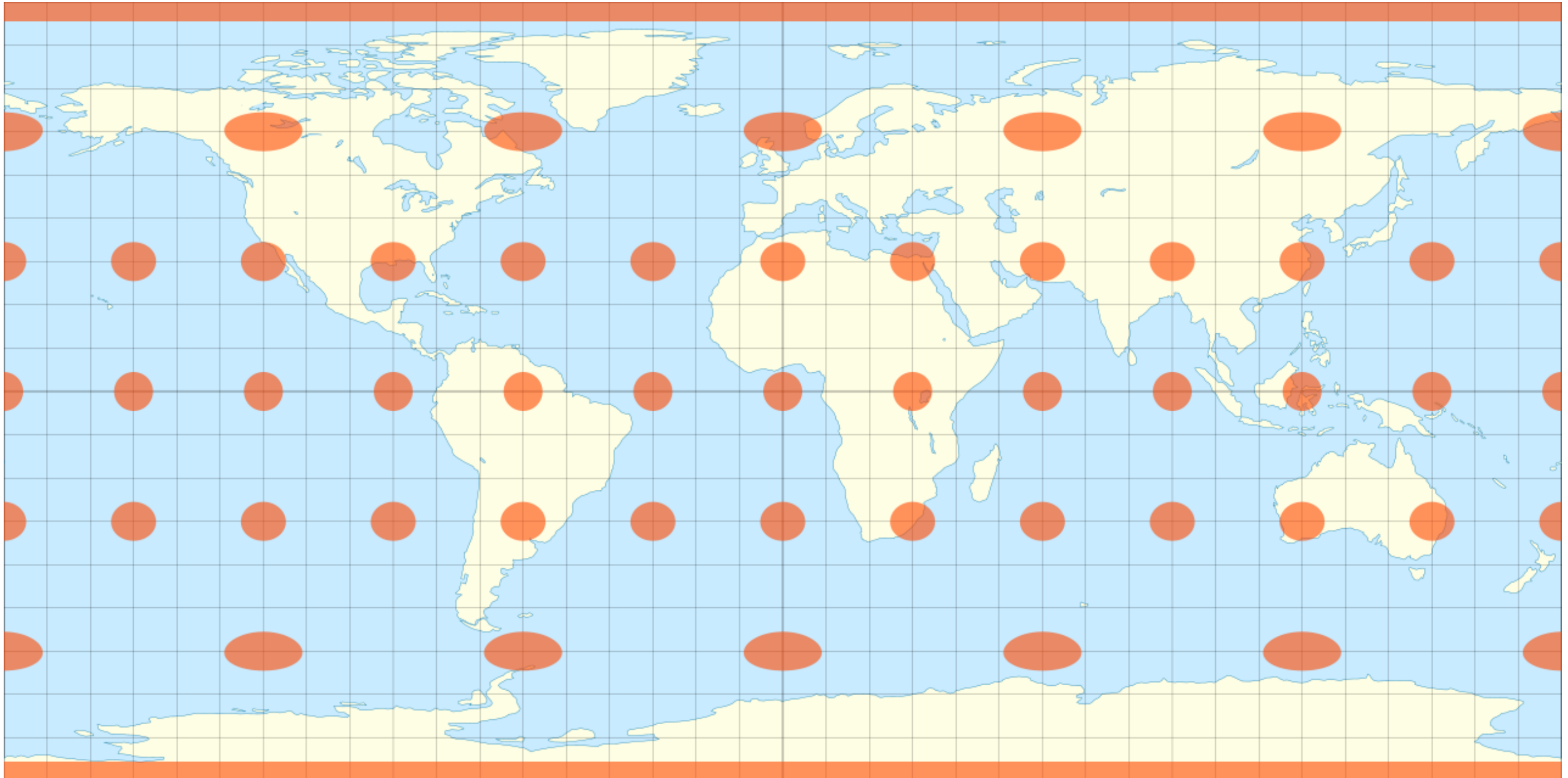
Plattkarte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$



Plattkarte

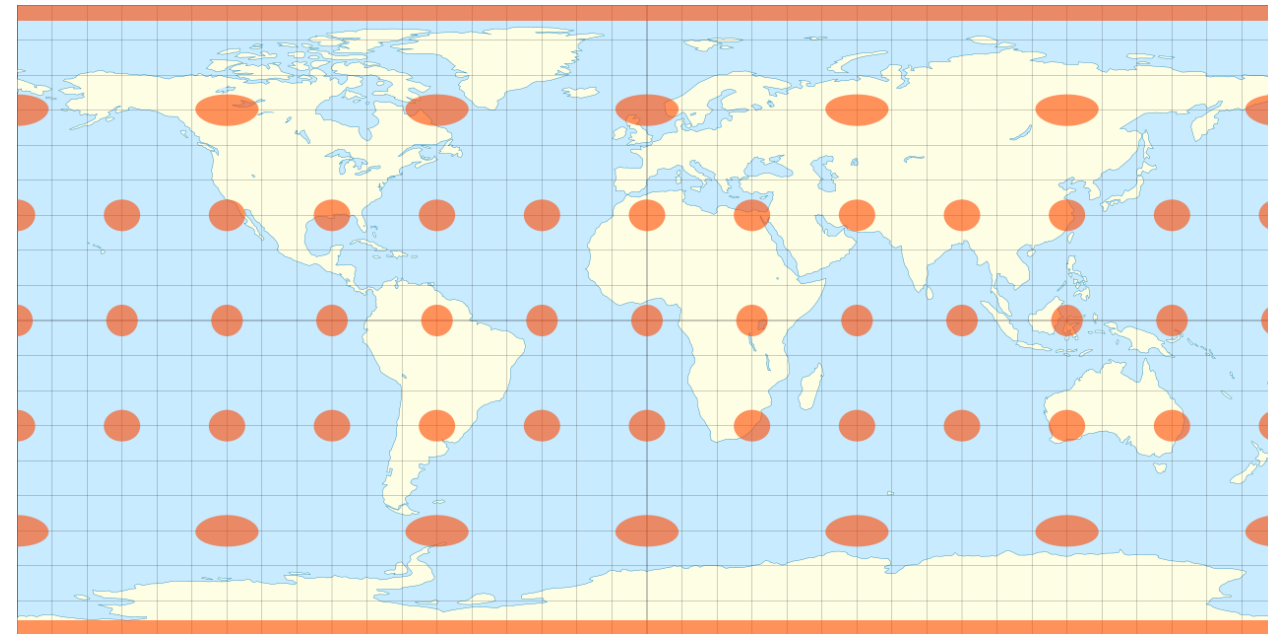
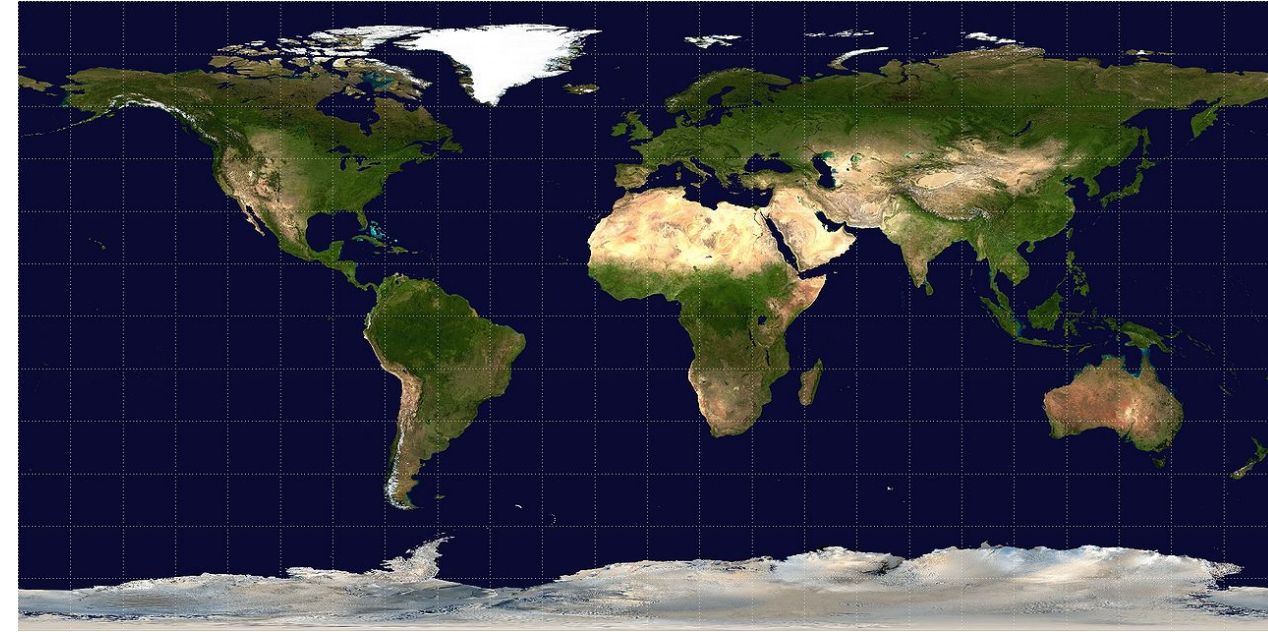
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$



(orangene Kreise alle gleich groß)

Plattkarte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$

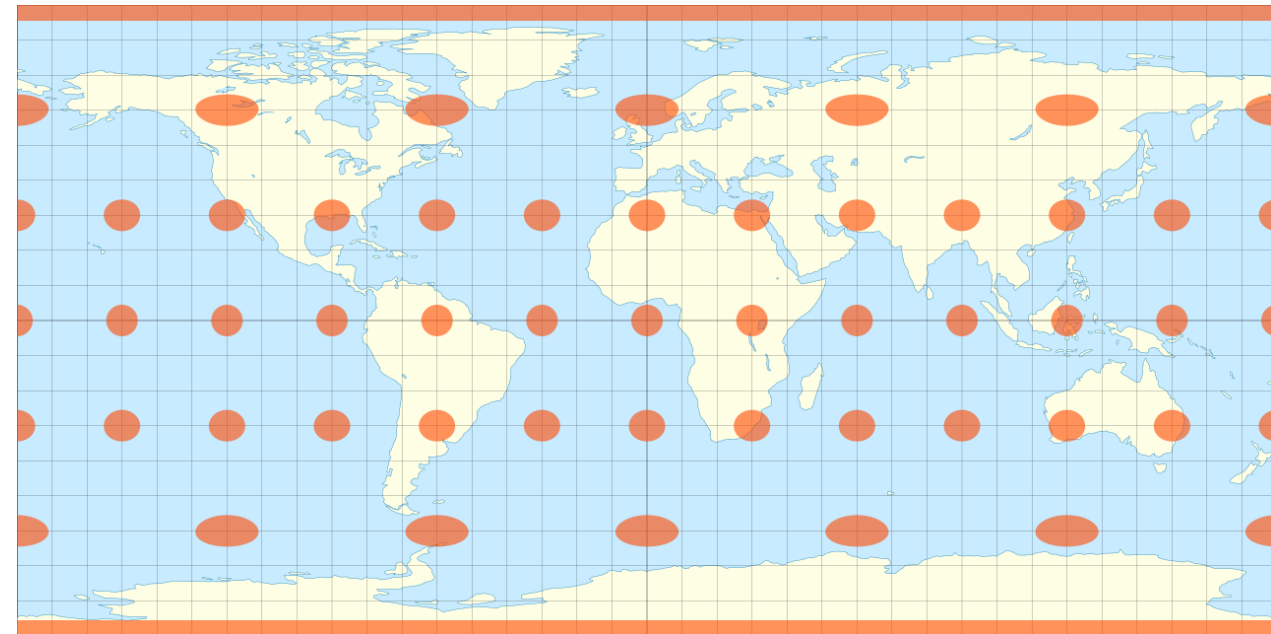
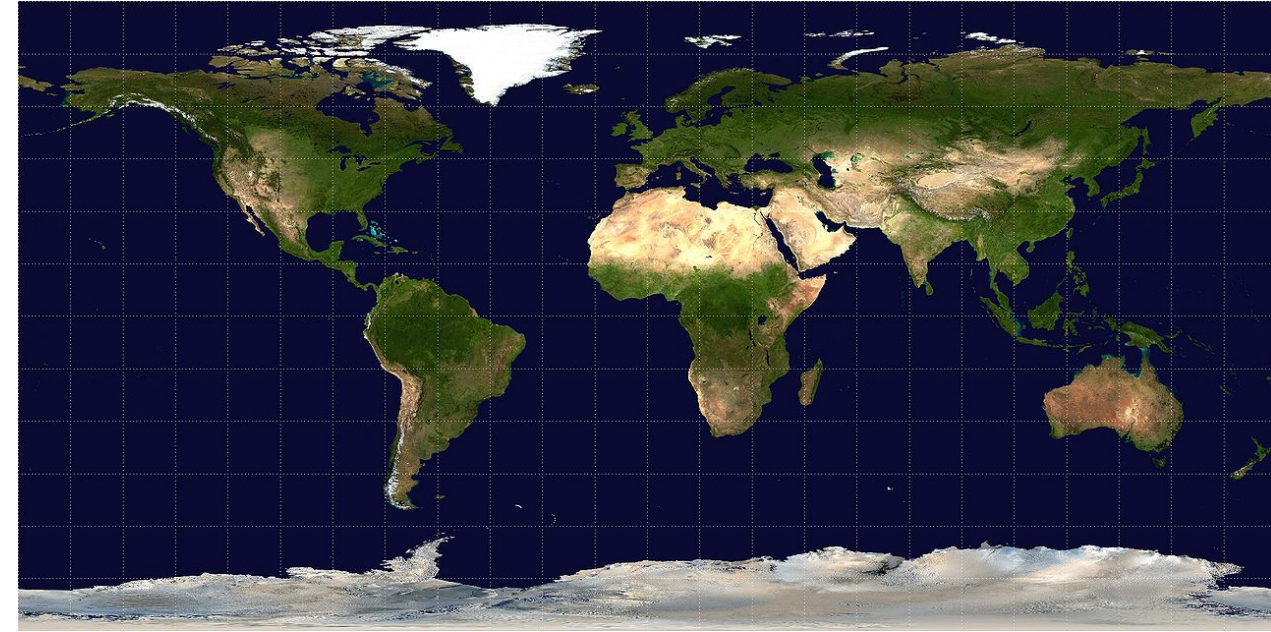


Plattkarte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$



Nachteile:



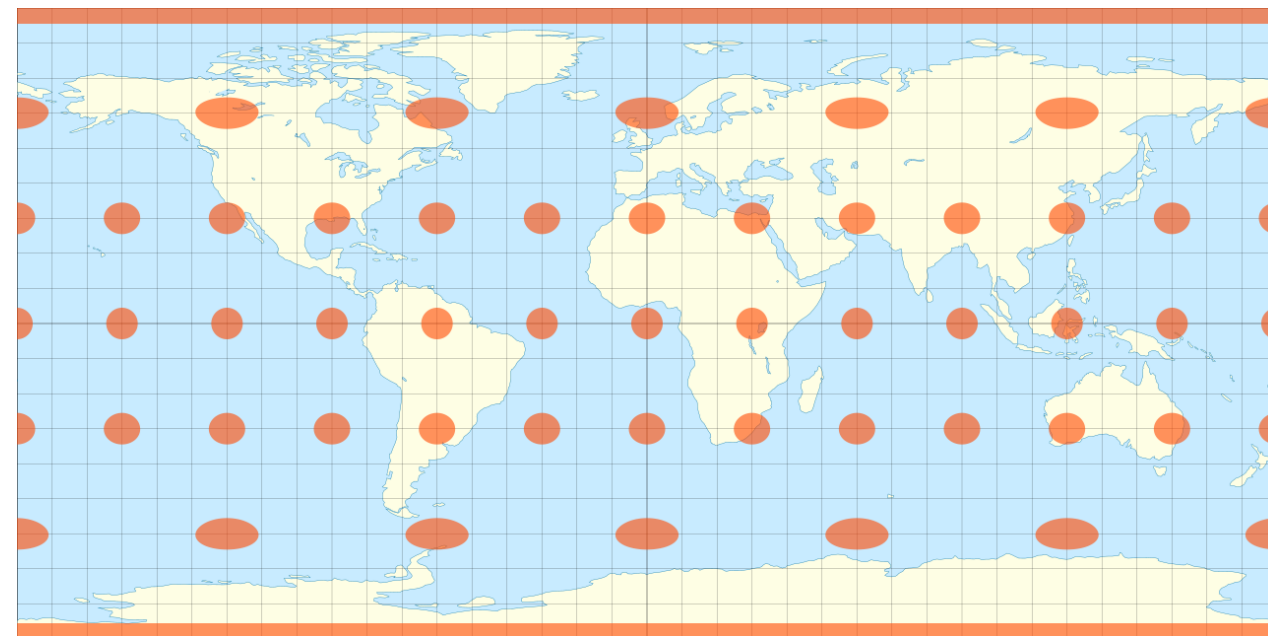
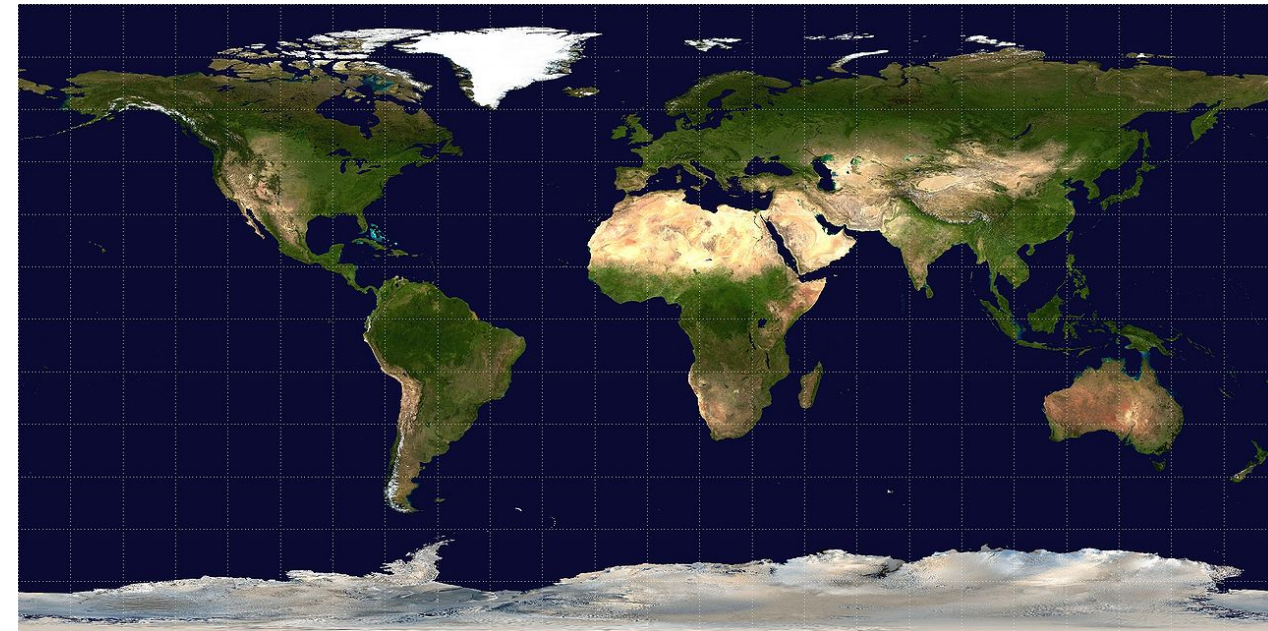
Plattkarte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$



Nachteile:

- Breitenkreise werden extrem gestreckt



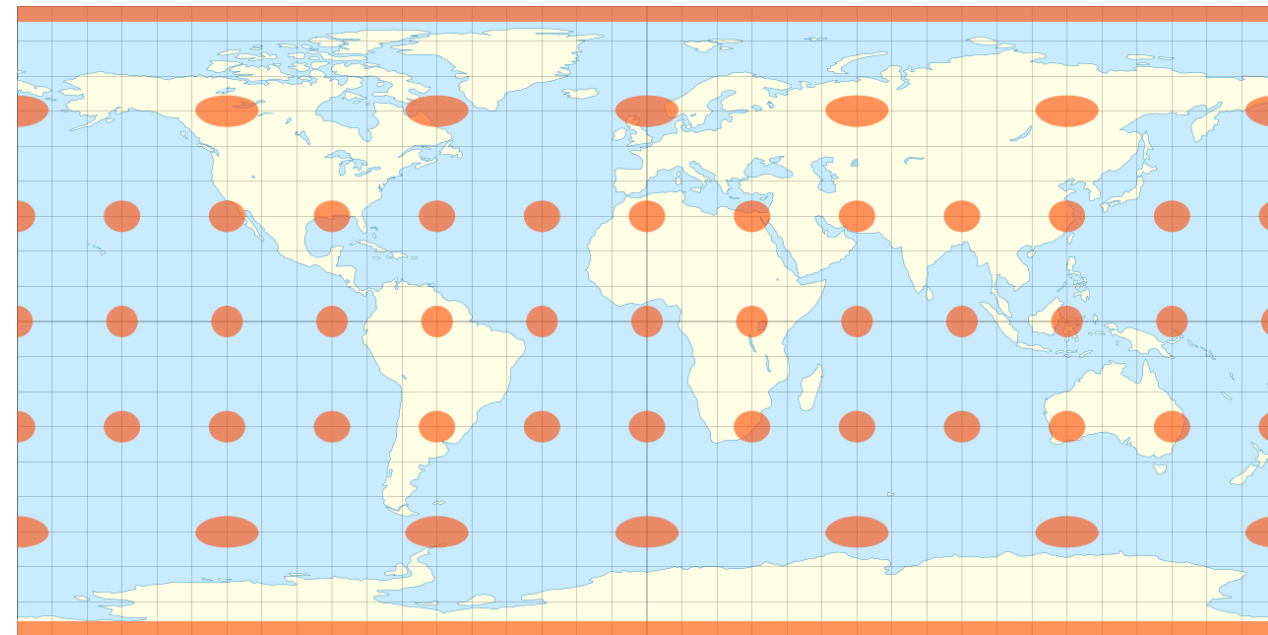
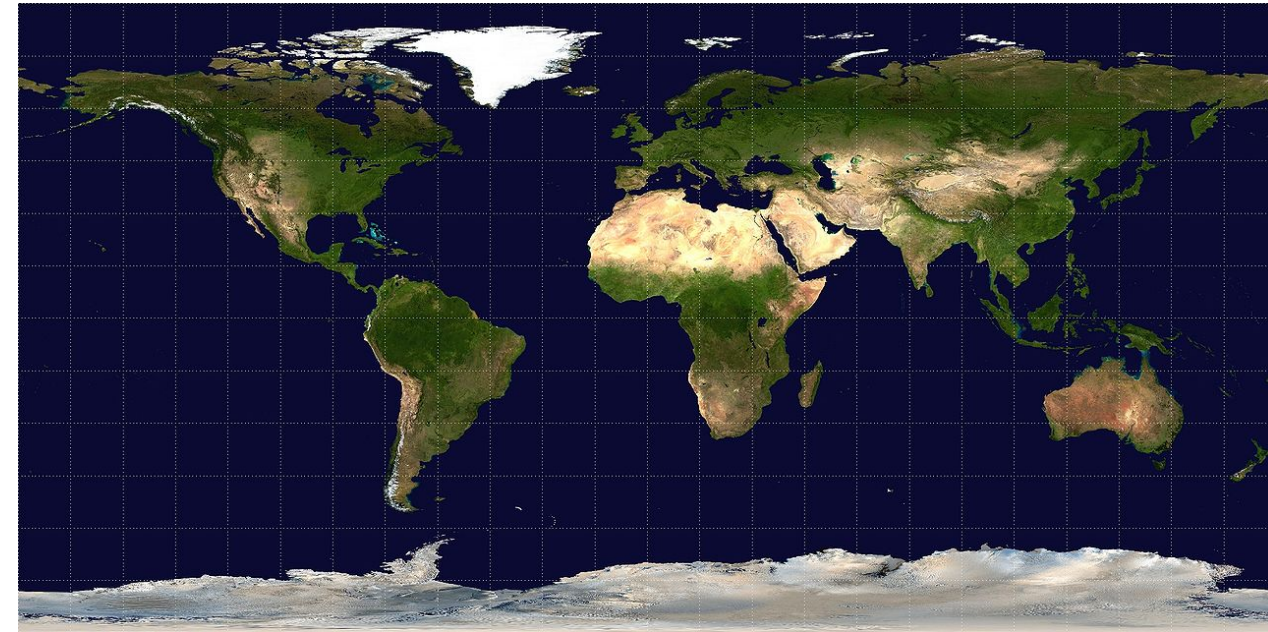
Plattkarte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} R\lambda \\ R\varphi \end{pmatrix}$$



Nachteile:

- Breitenkreise werden extrem gestreckt
- Proportionen (auch lokal!) gehen verloren



Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



- Flächentreue

Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)

Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)
- Gerade Linien bleiben gerade

Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)
- Gerade Linien bleiben gerade
- Längentreue

Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?

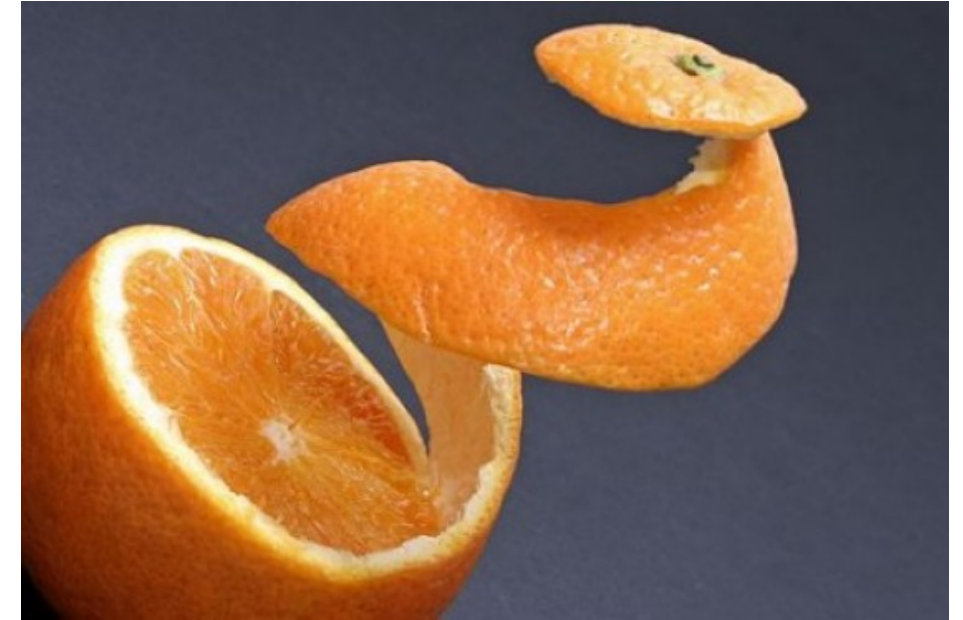


- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)
- Gerade Linien bleiben gerade
- Längentreue
- ...

Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)
- Gerade Linien bleiben gerade
- Längentreue
- ...



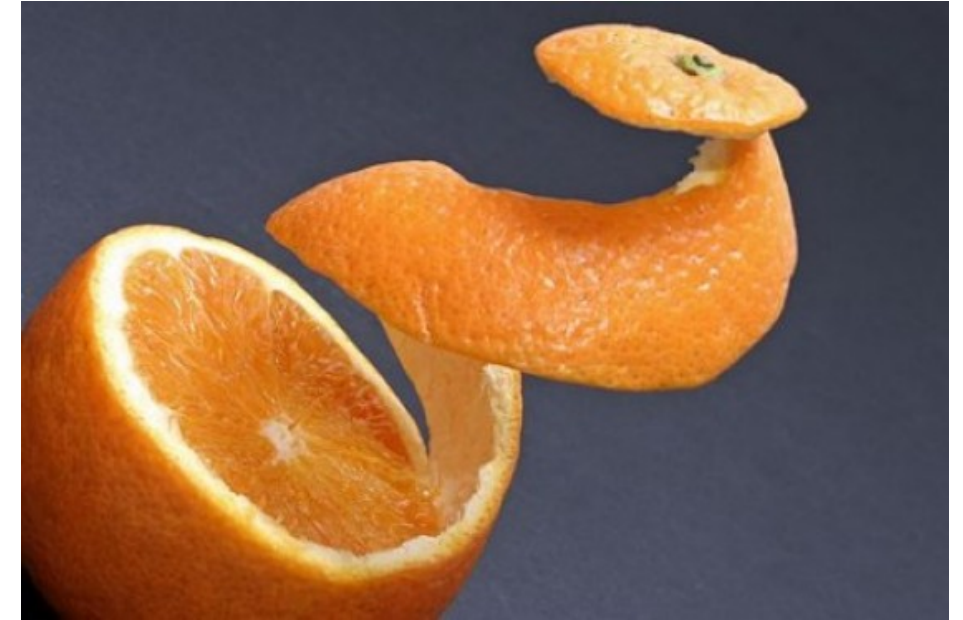
Es gibt keine Abbildung,
die alle Distanzen unverzerrt
abbildet!

Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)
- Gerade Linien bleiben gerade
- Längentreue
- ...

Aufgabe: Wähle Eigenschaften aus und finde eine Abbildung, die diese erfüllt.



Es gibt keine Abbildung, die alle Distanzen unverzerrt abbildet!

Welche Eigenschaften soll eine Abbildung haben?



- Flächentreue
- Winkeltreue (Konformität)
- Gerade Linien bleiben gerade
- Längentreue
- ...

Aufgabe: Wähle Eigenschaften aus und finde eine Abbildung, die diese erfüllt.

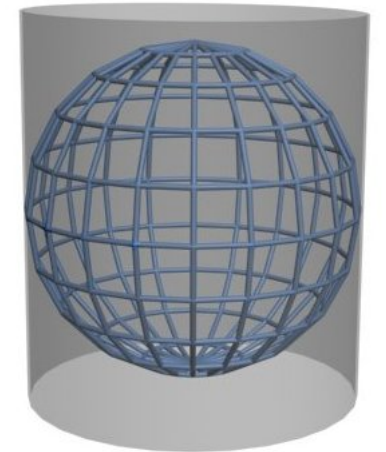
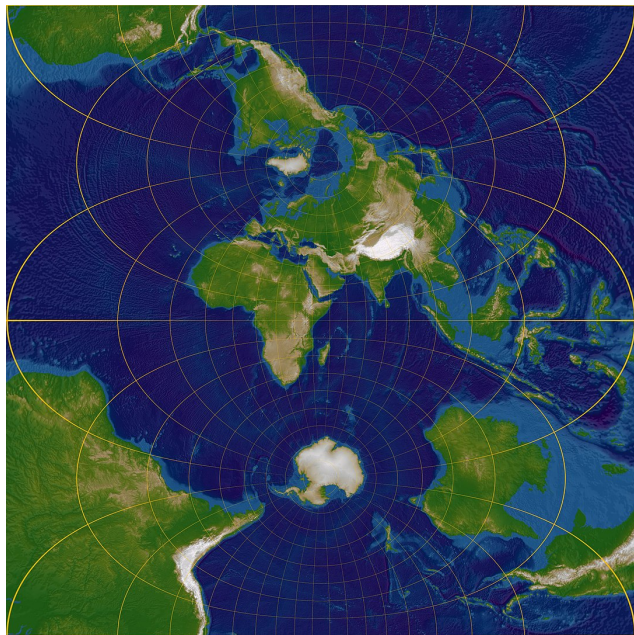


Es gibt keine Abbildung, die alle Distanzen unverzerrt abbildet!

Algorithmen für geographische Informationssysteme

1. Vorlesung Einführung & Geodäsie

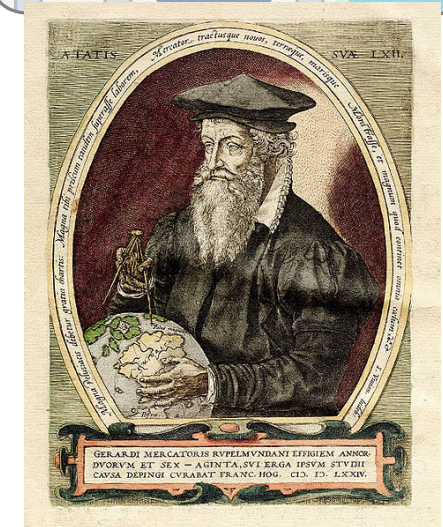
Teil III: Mercatorprojektion



Mercatorprojektion

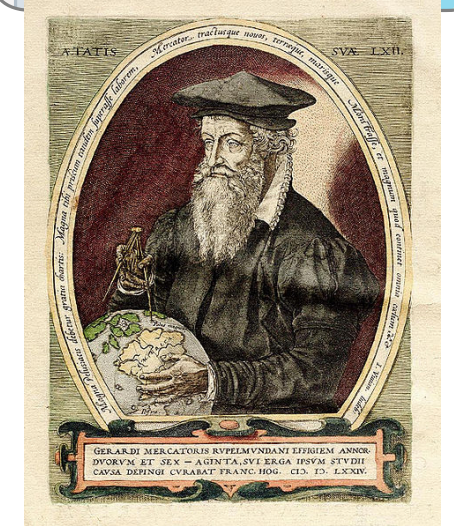


Mercatorprojektion

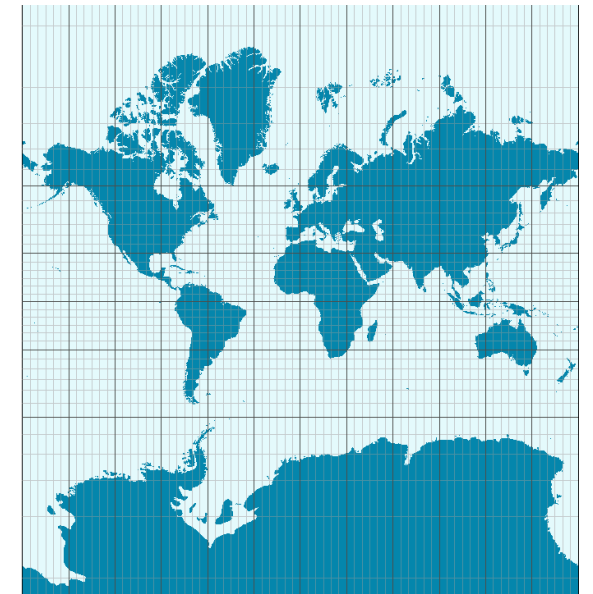


Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594

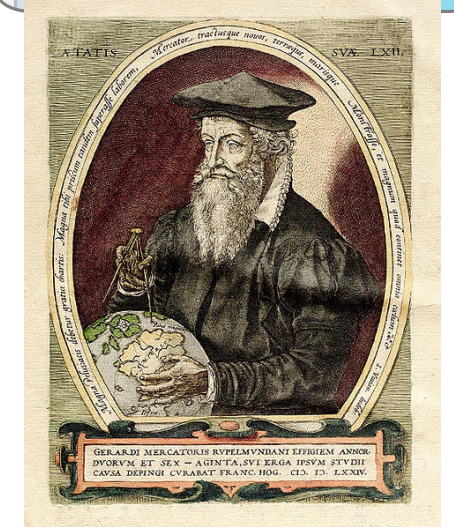
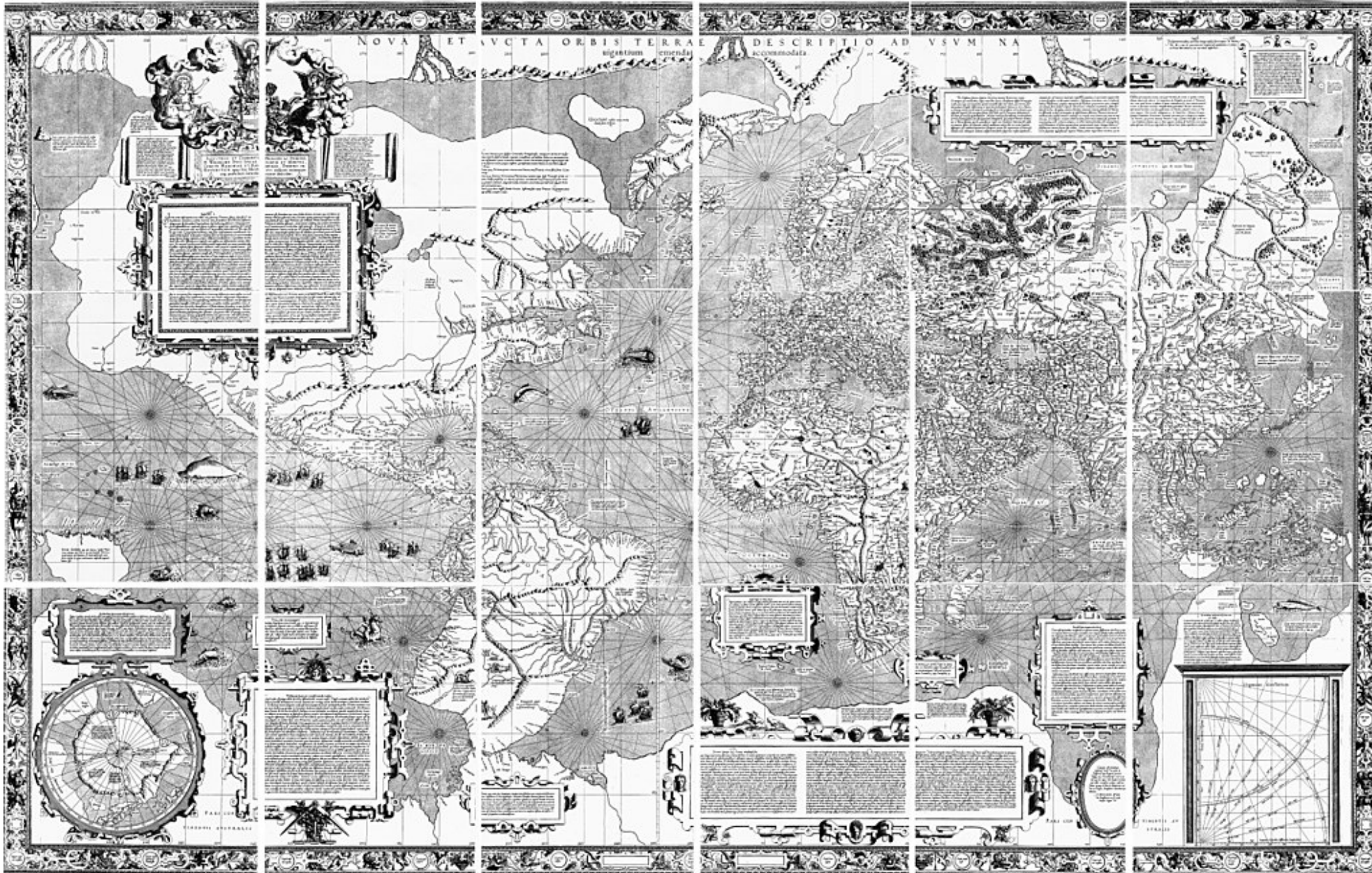
Mercatorprojektion



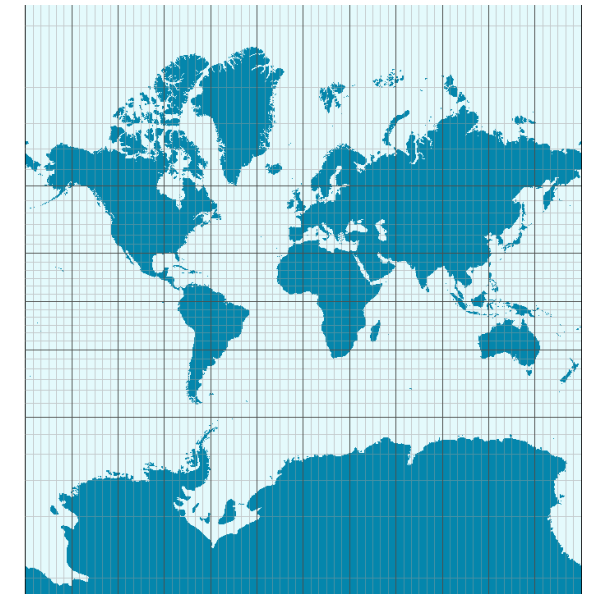
Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594



Mercatorprojektion

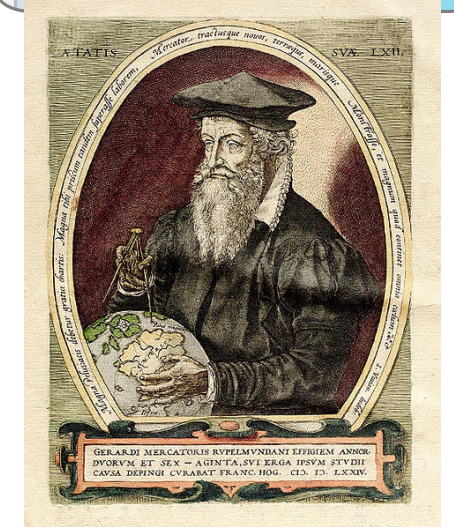


Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594

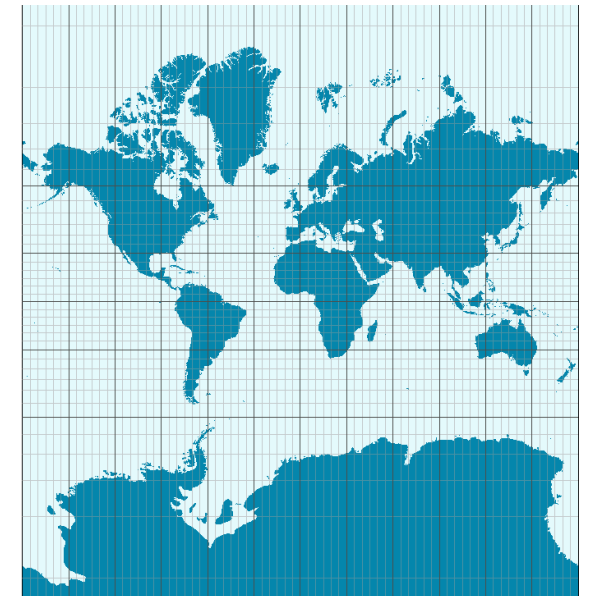


Erste Mercator-Projektion von 1569

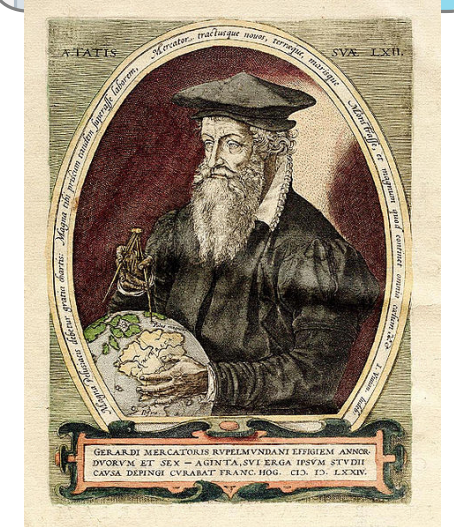
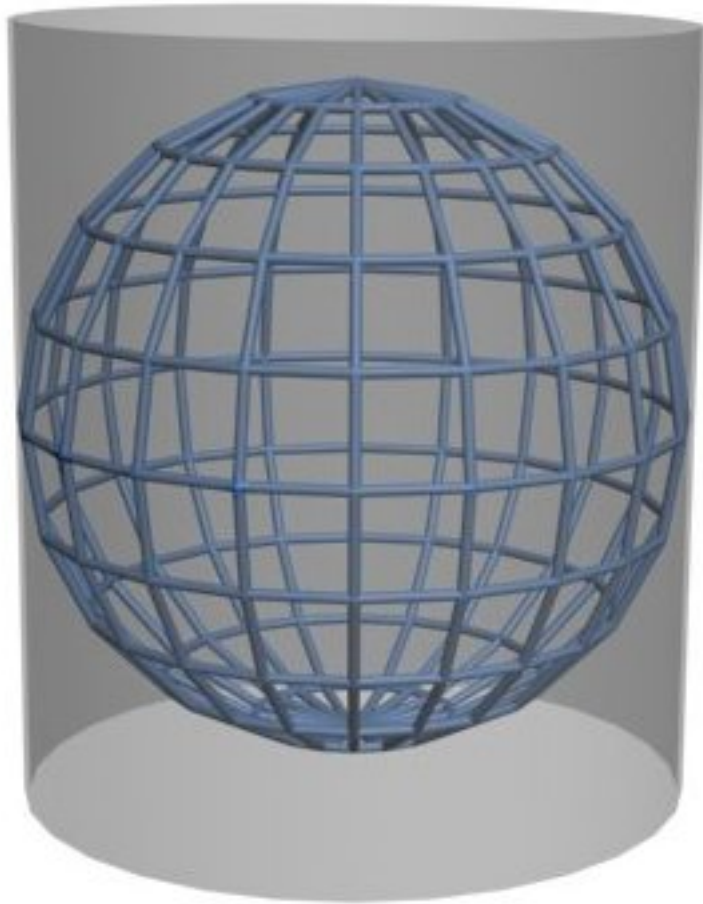
Mercatorprojektion



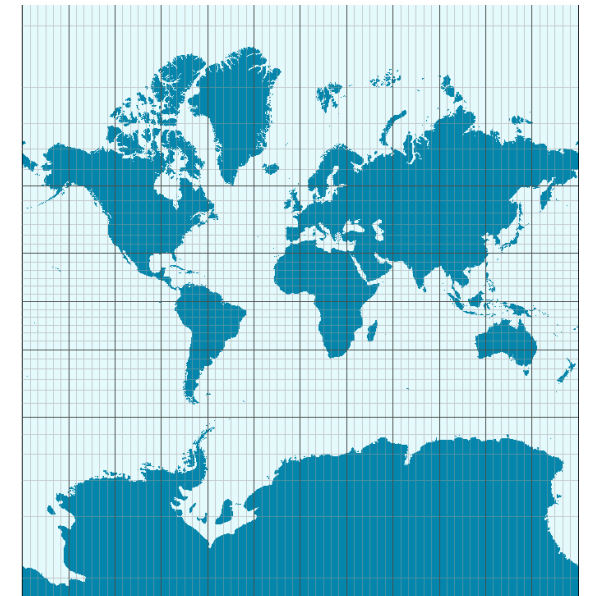
Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594



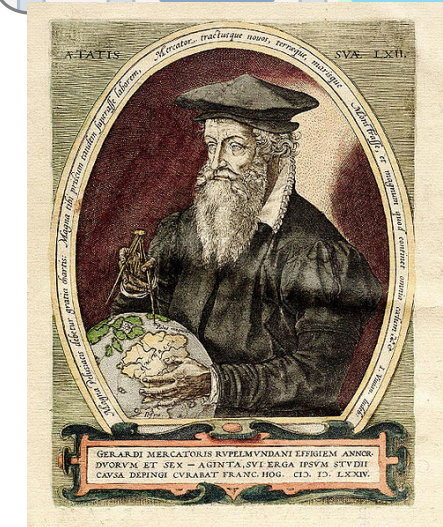
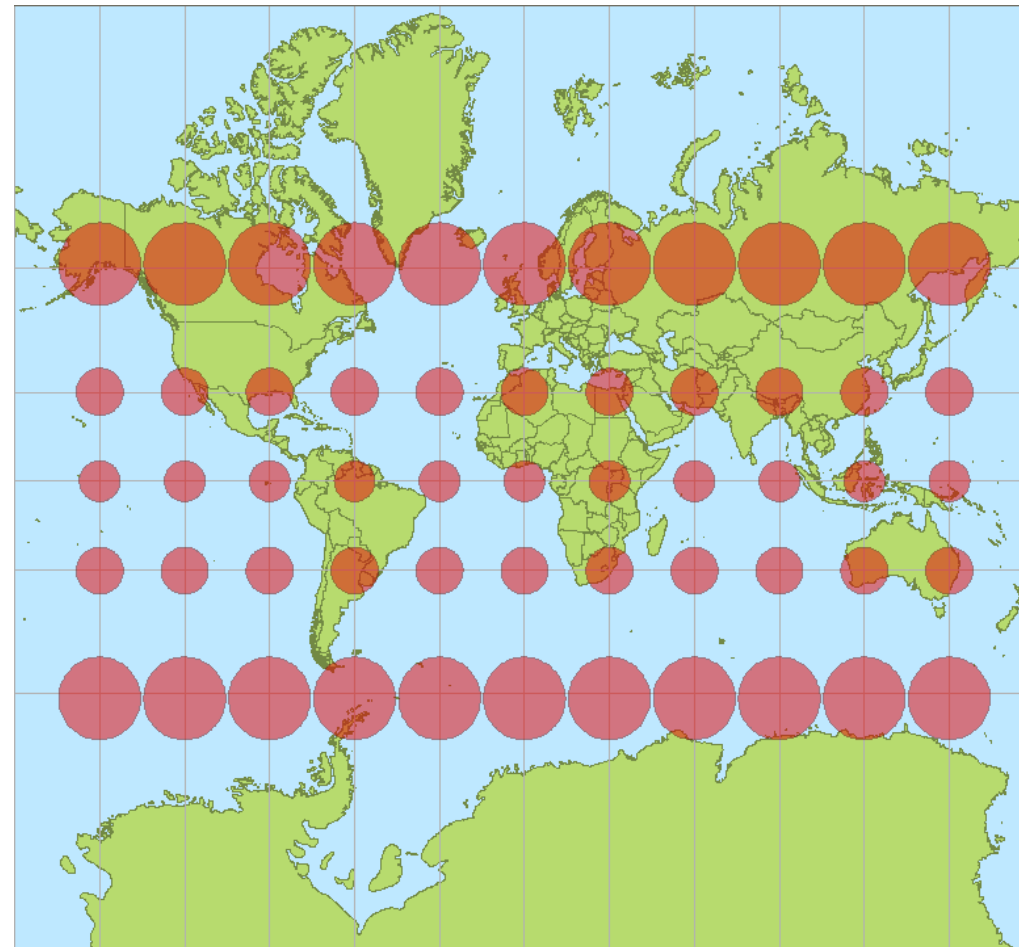
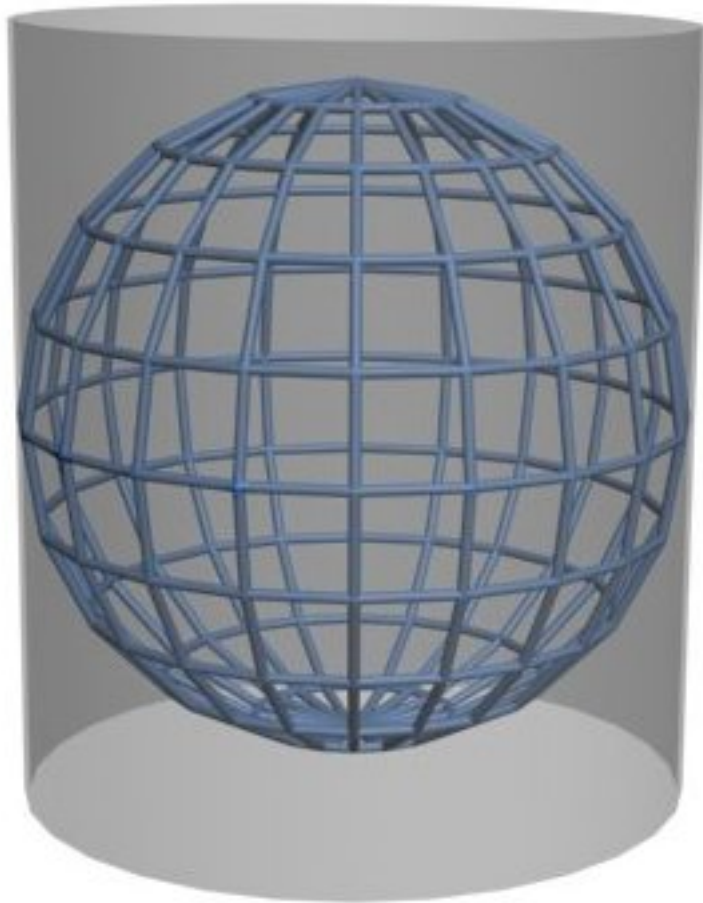
Mercatorprojektion



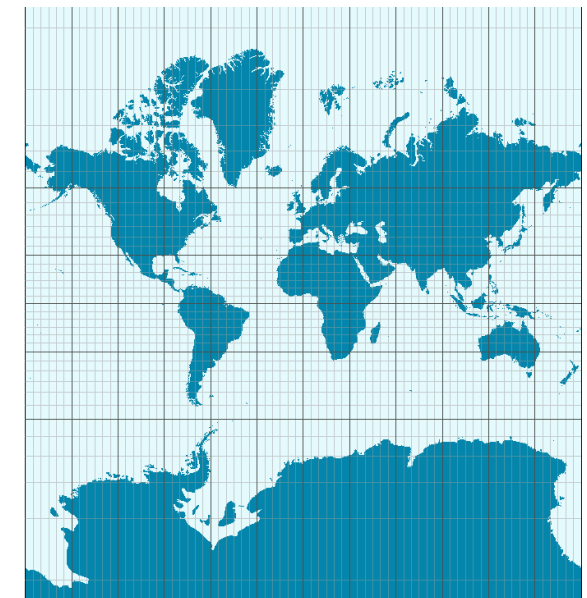
Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594



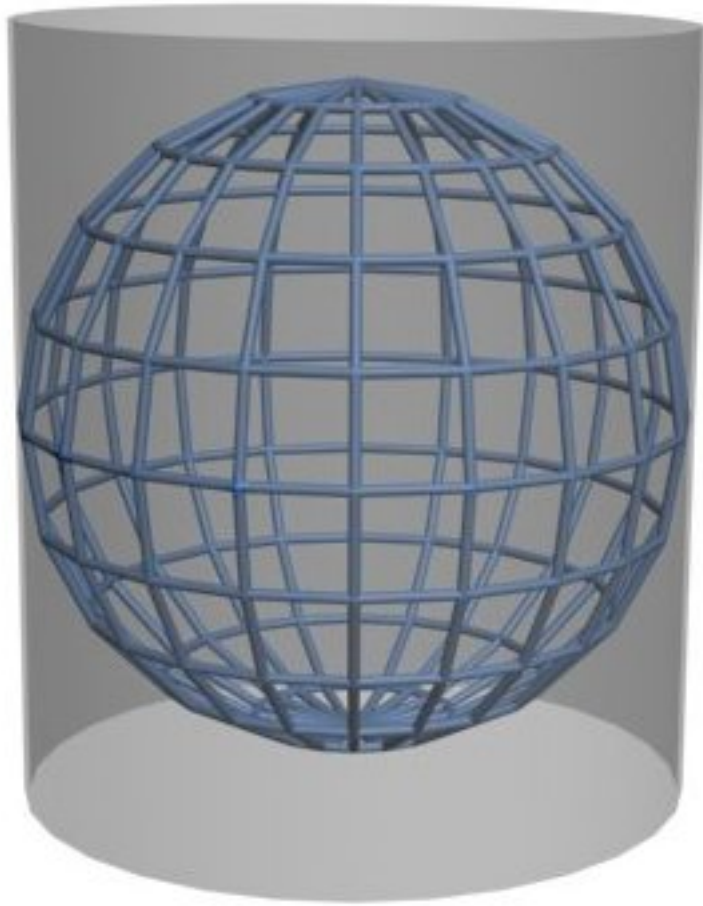
Mercatorprojektion



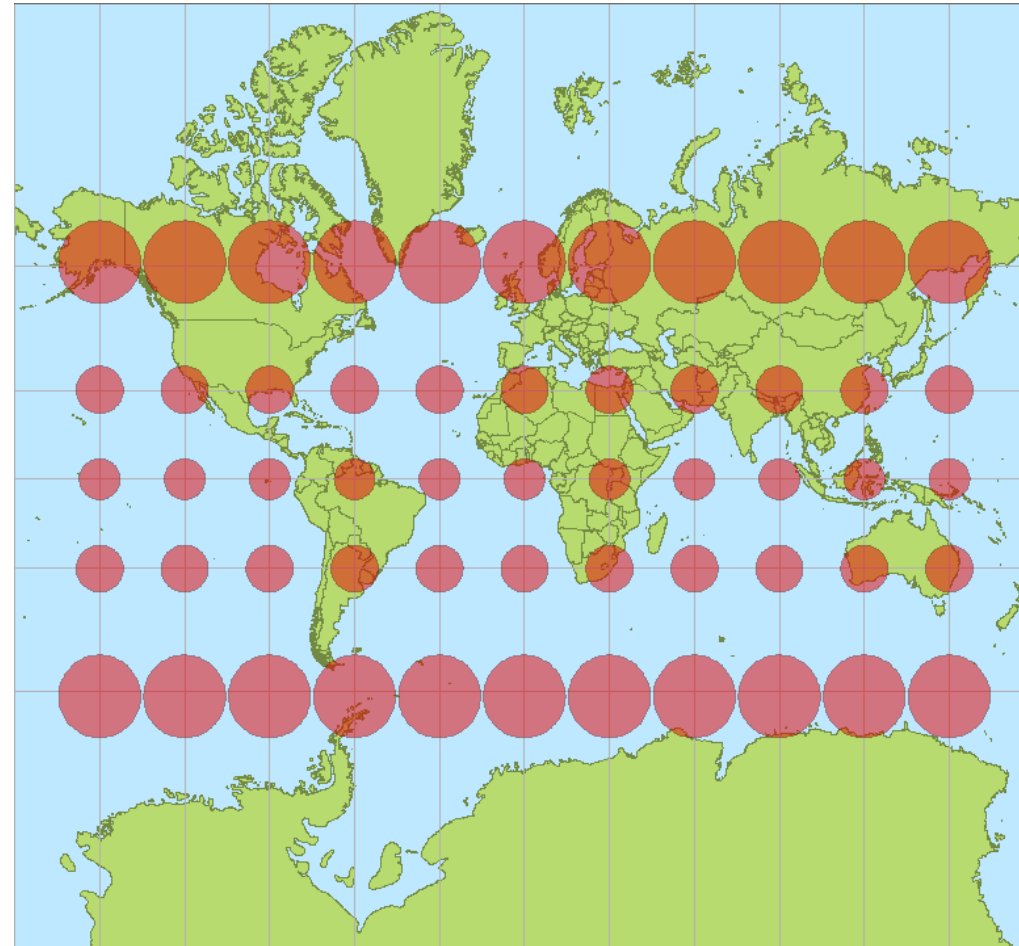
Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594



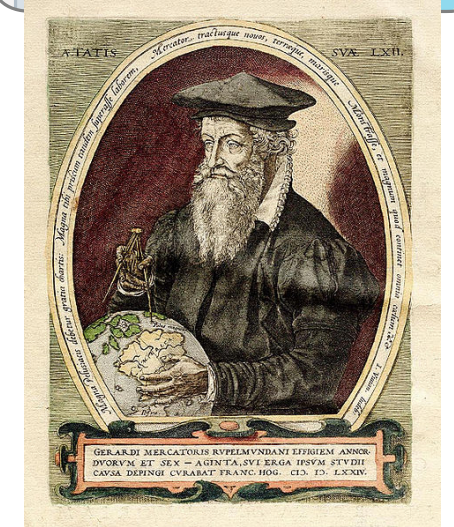
Mercatorprojektion



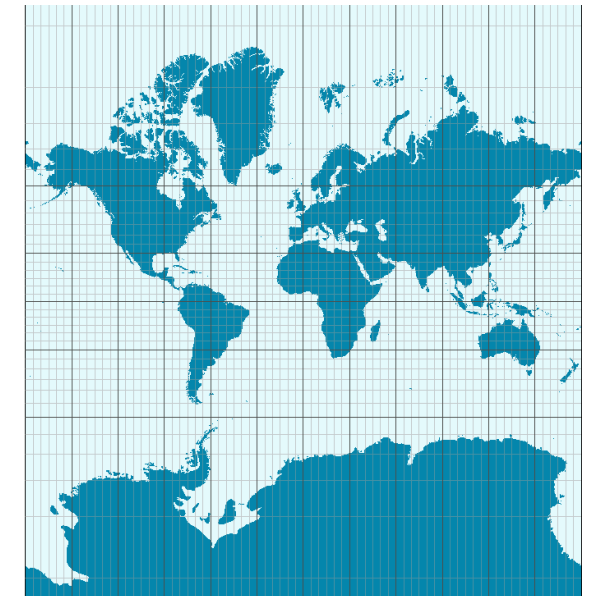
Vorteil:



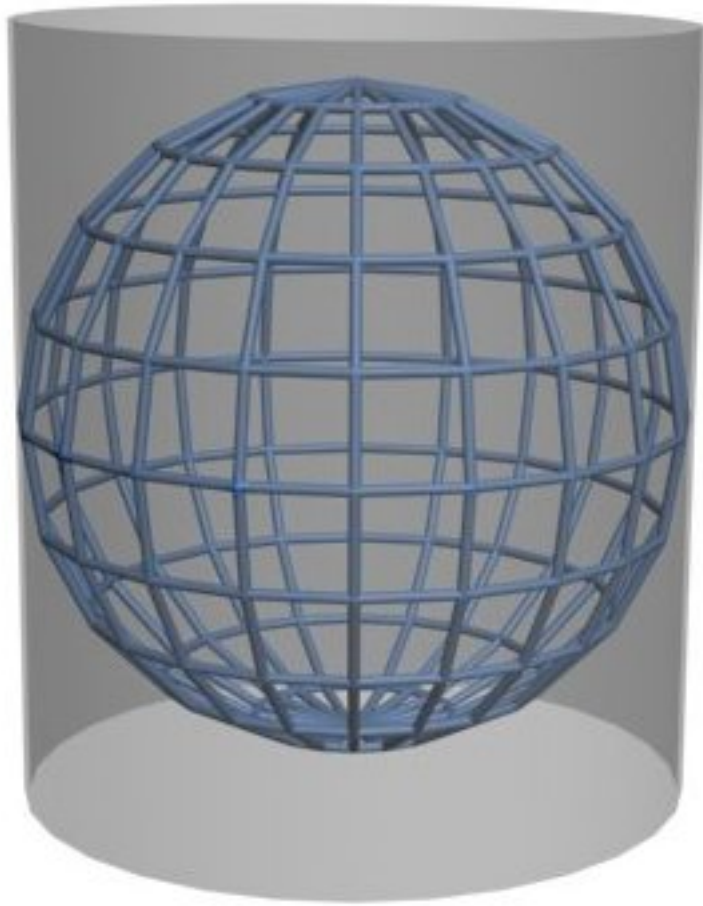
Nachteil:



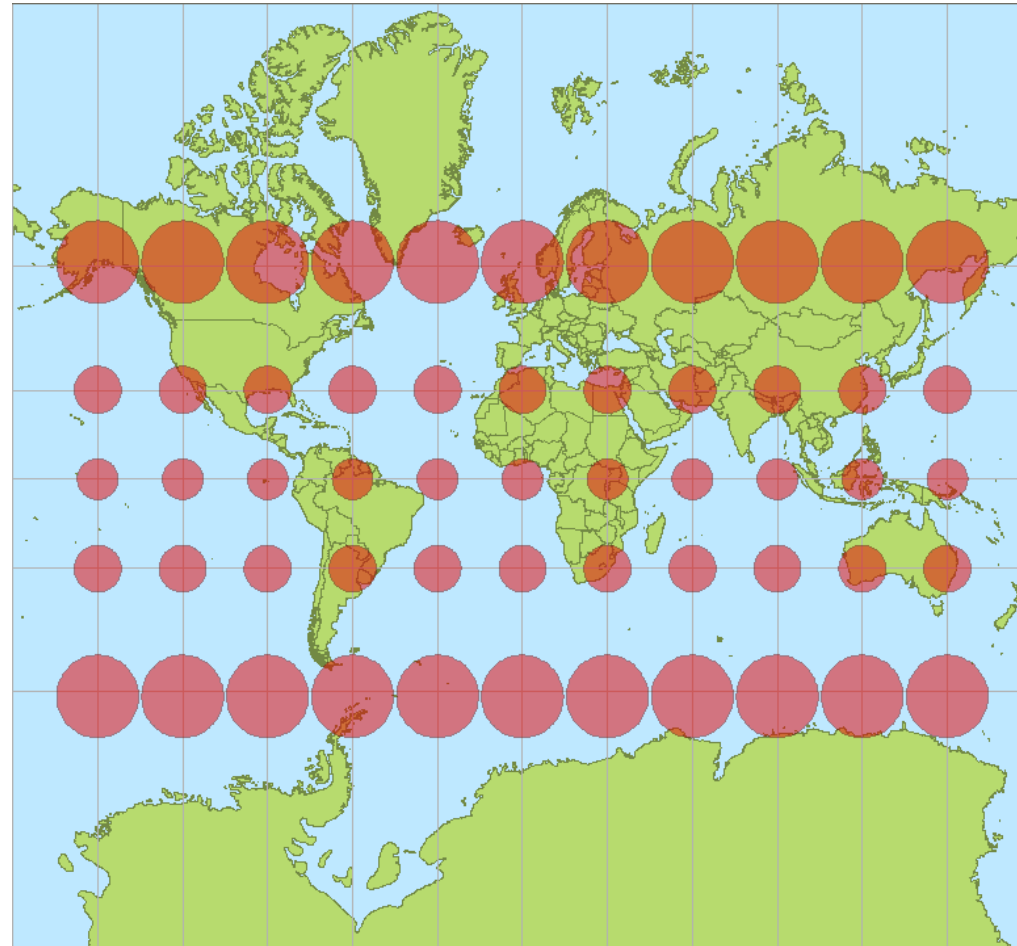
Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594



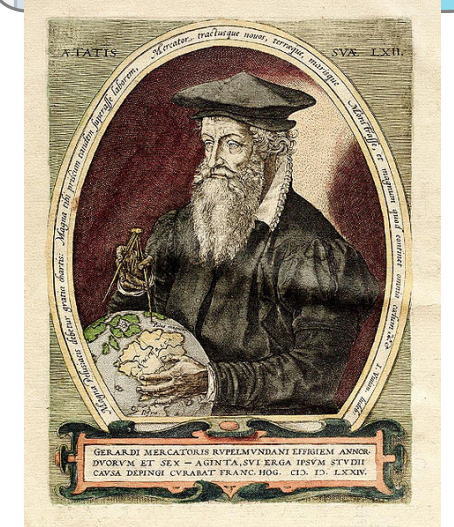
Mercatorprojektion



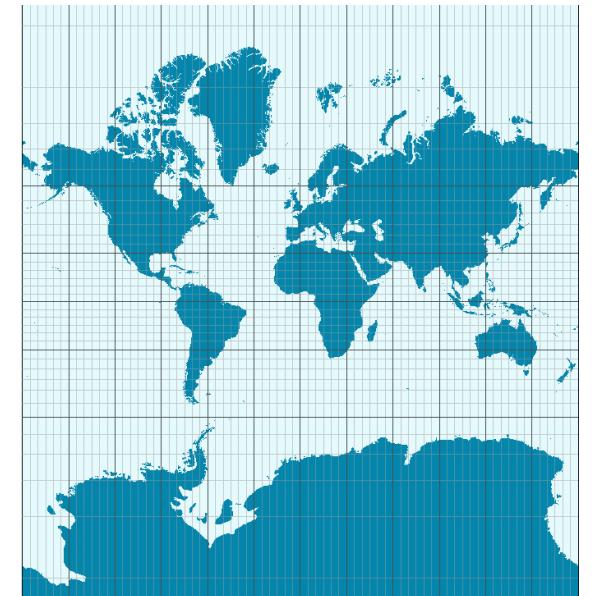
Vorteil:
Winkeltr ue



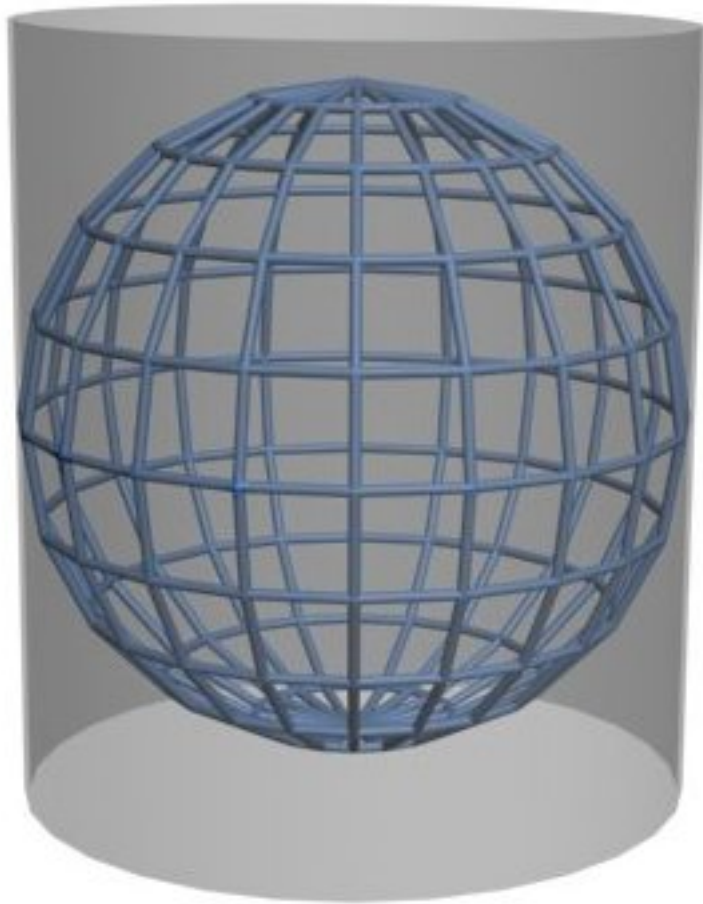
Nachteil:



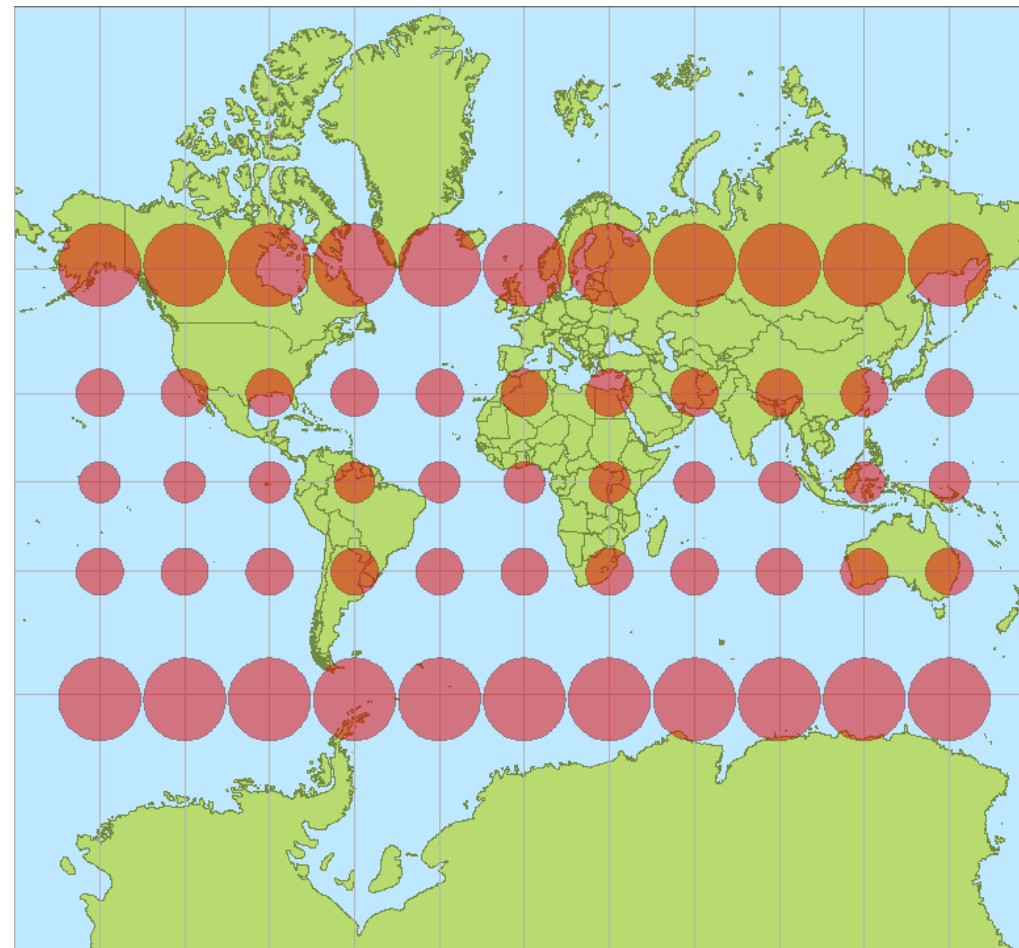
Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594



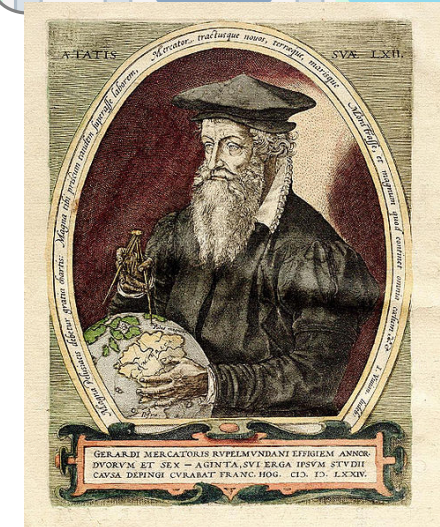
Mercatorprojektion



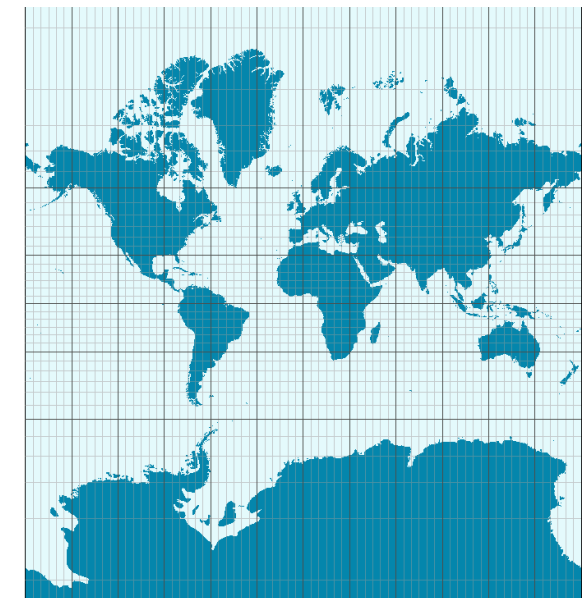
Vorteil:
Winkeltr ue



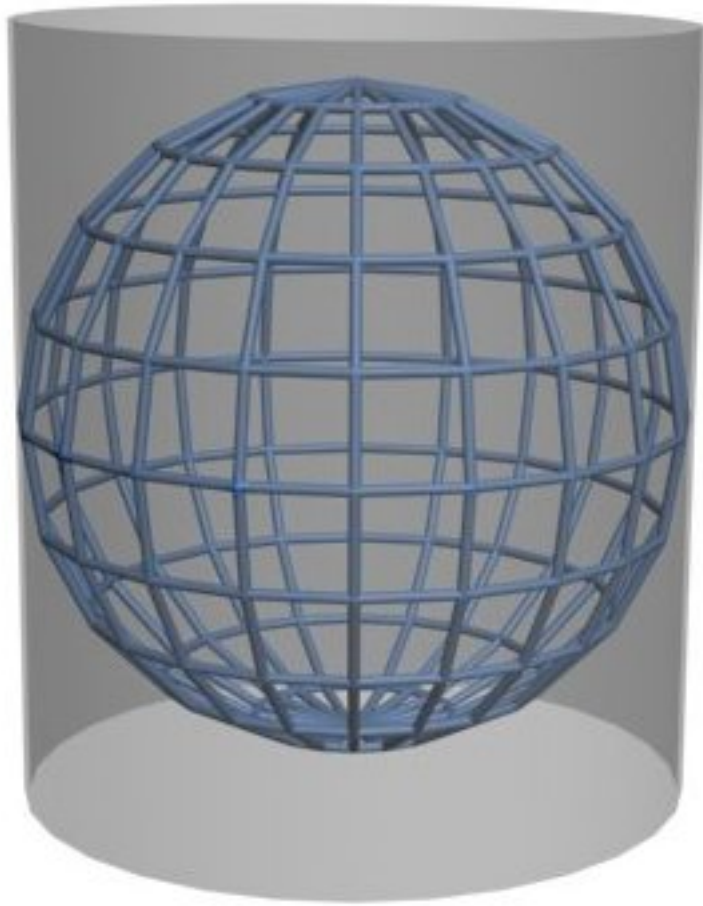
Nachteil:
Fl chenverzerrung



Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594

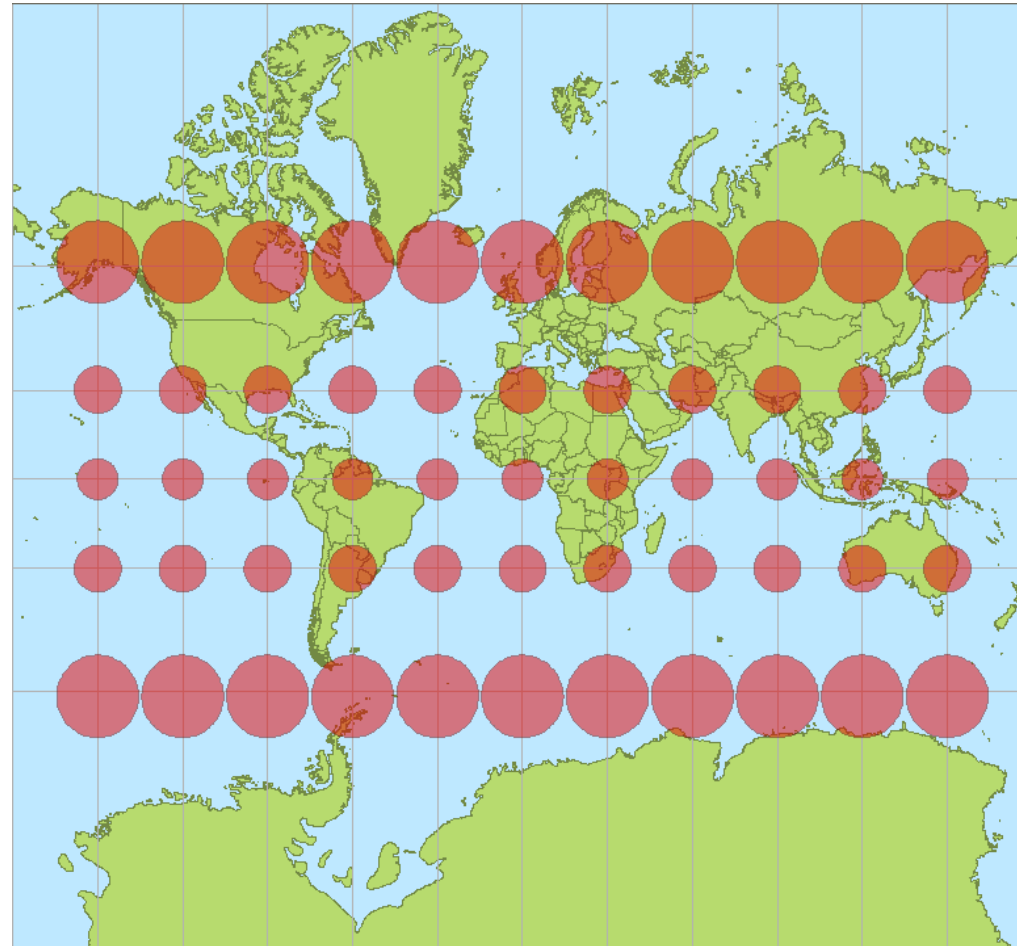


Mercatorprojektion

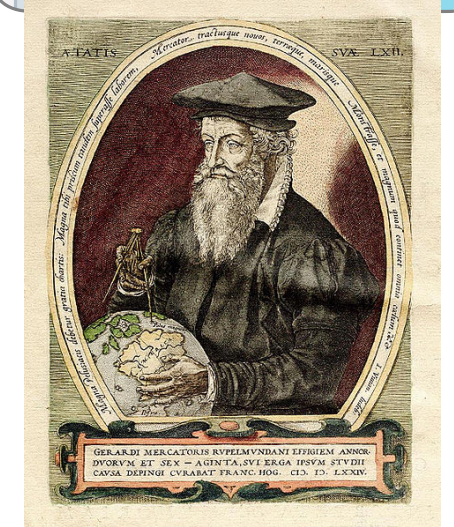


Vorteil:
Winkeltr ue

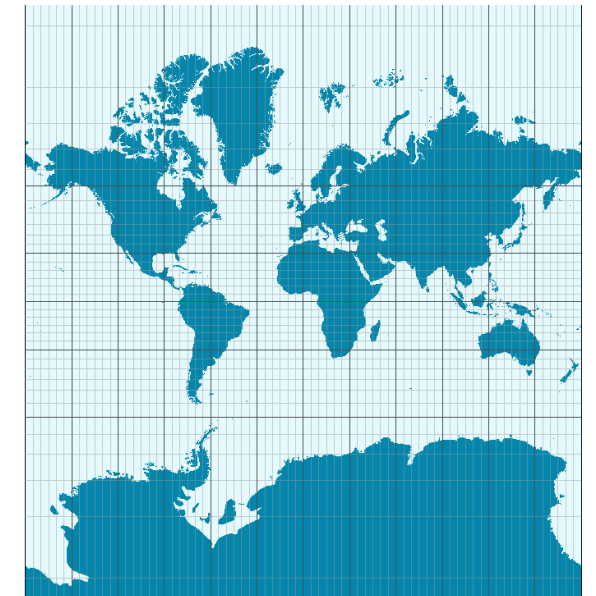
Google Maps benutzt (eine Variante der) Mercatorprojektion



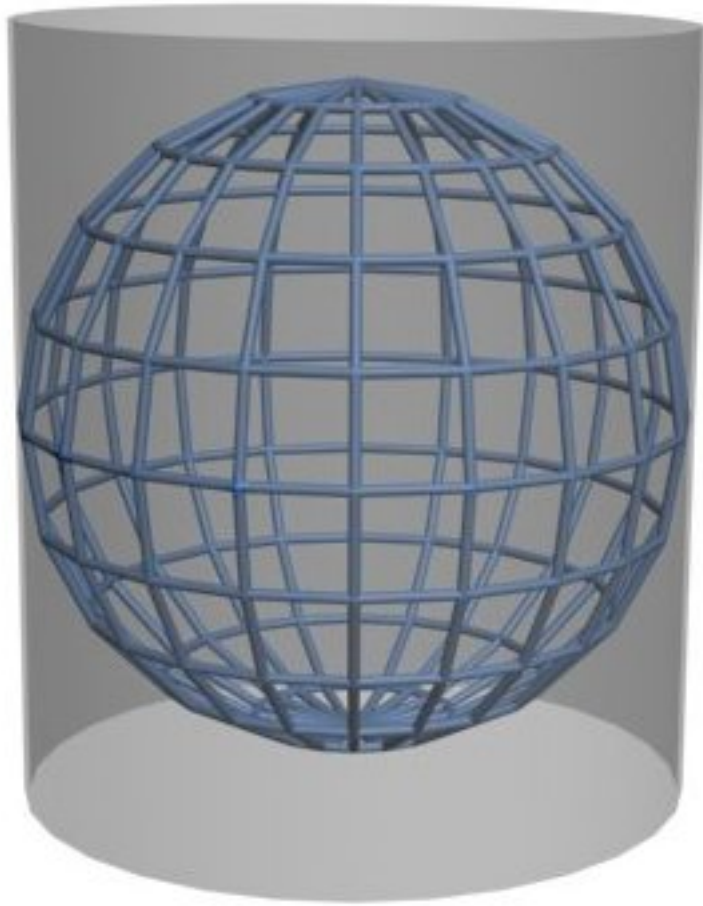
Nachteil:
Fl chenverzerrung



Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594

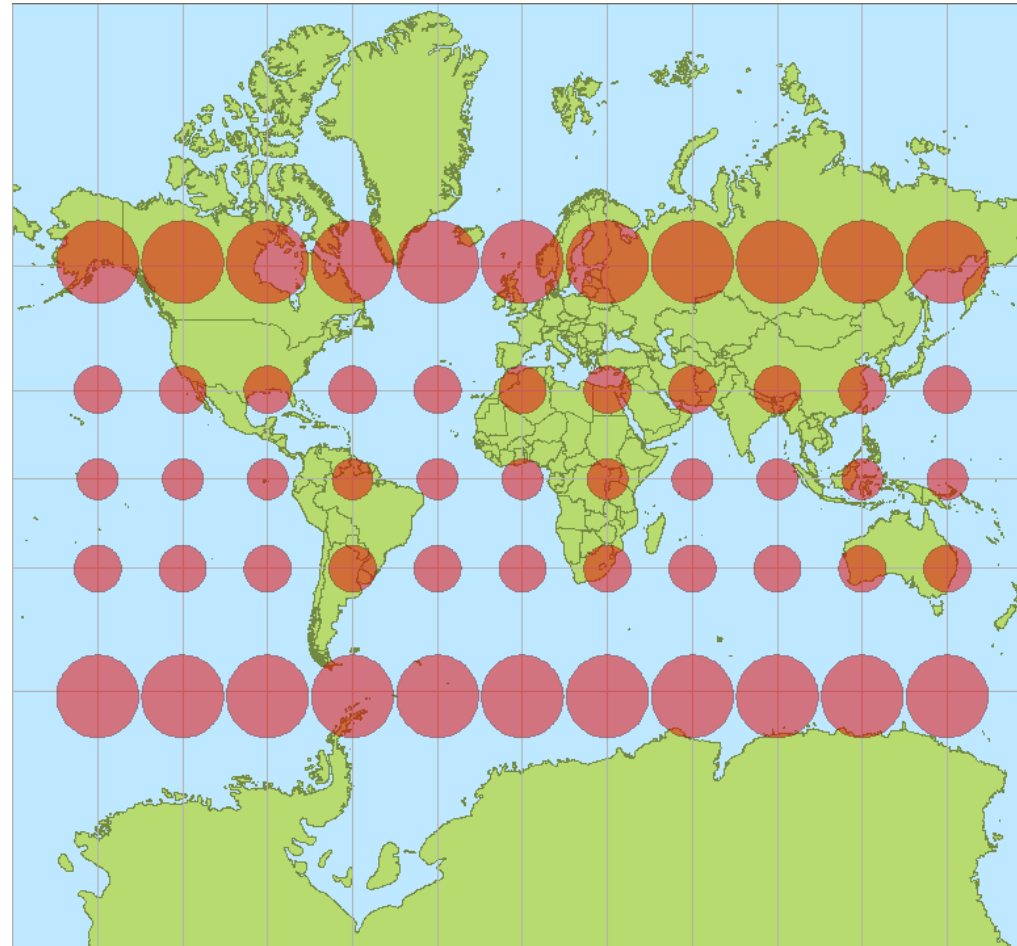


Mercatorprojektion

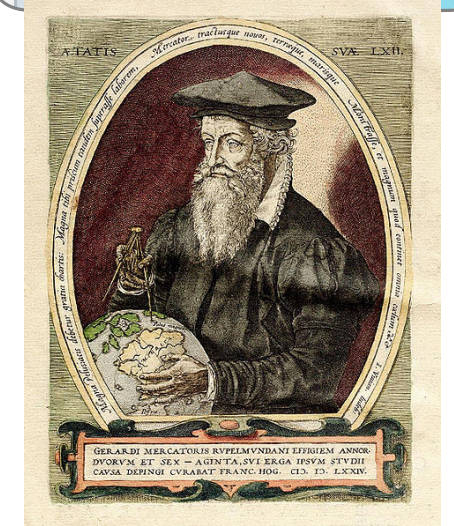


Vorteil:
Winkeltr ue

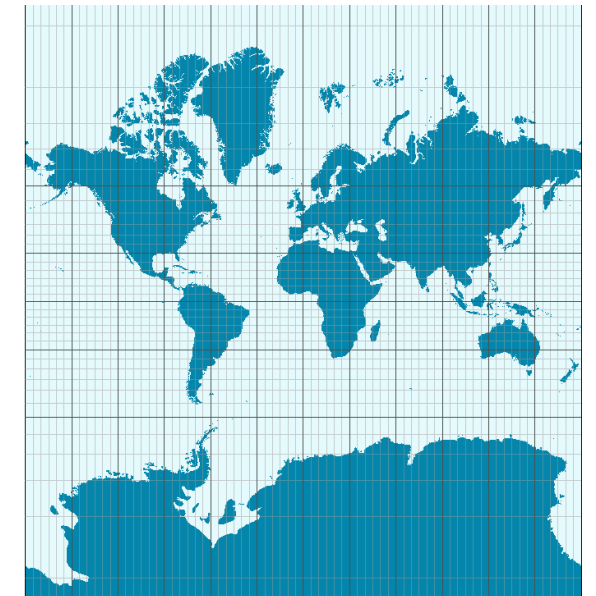
Google Maps benutzt (eine Variante der) Mercatorprojektion
Mercator Puzzle: <https://bramus.github.io/mercator-puzzle-redux/>



Nachteil:
Fl chenverzerrung



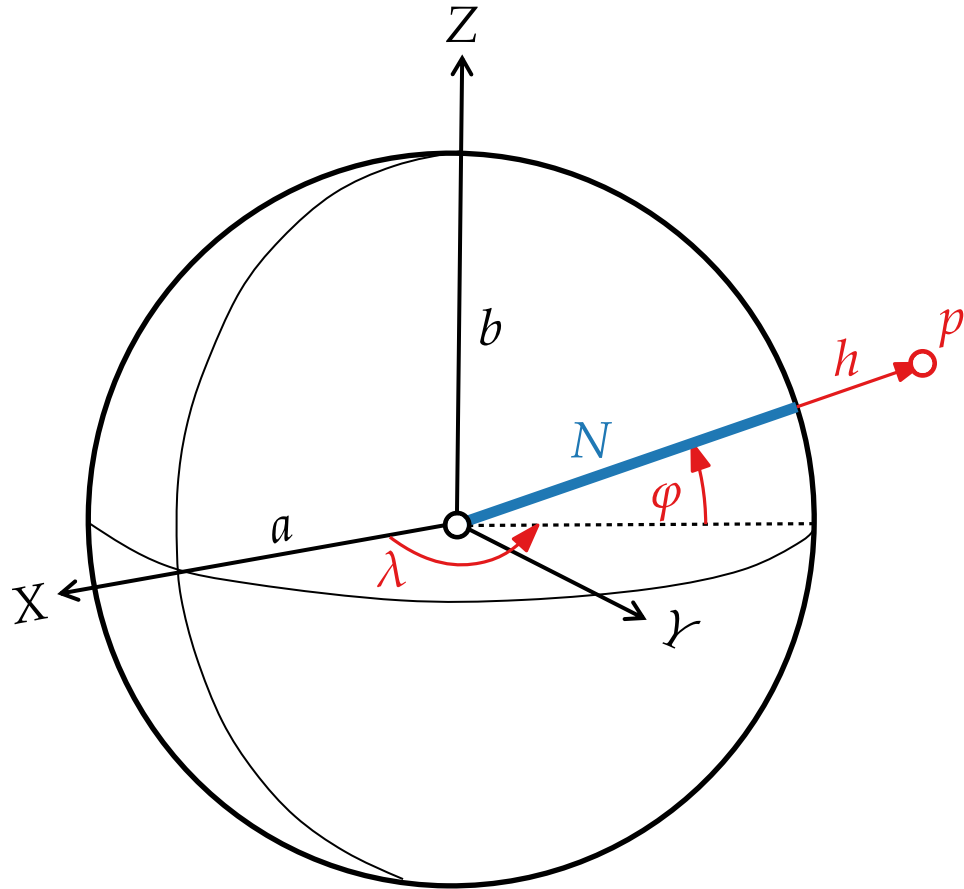
Gerhard Mercator
(geb. Gheert Cremer)
1512–1594



Kartesische Koordinaten der Kugel

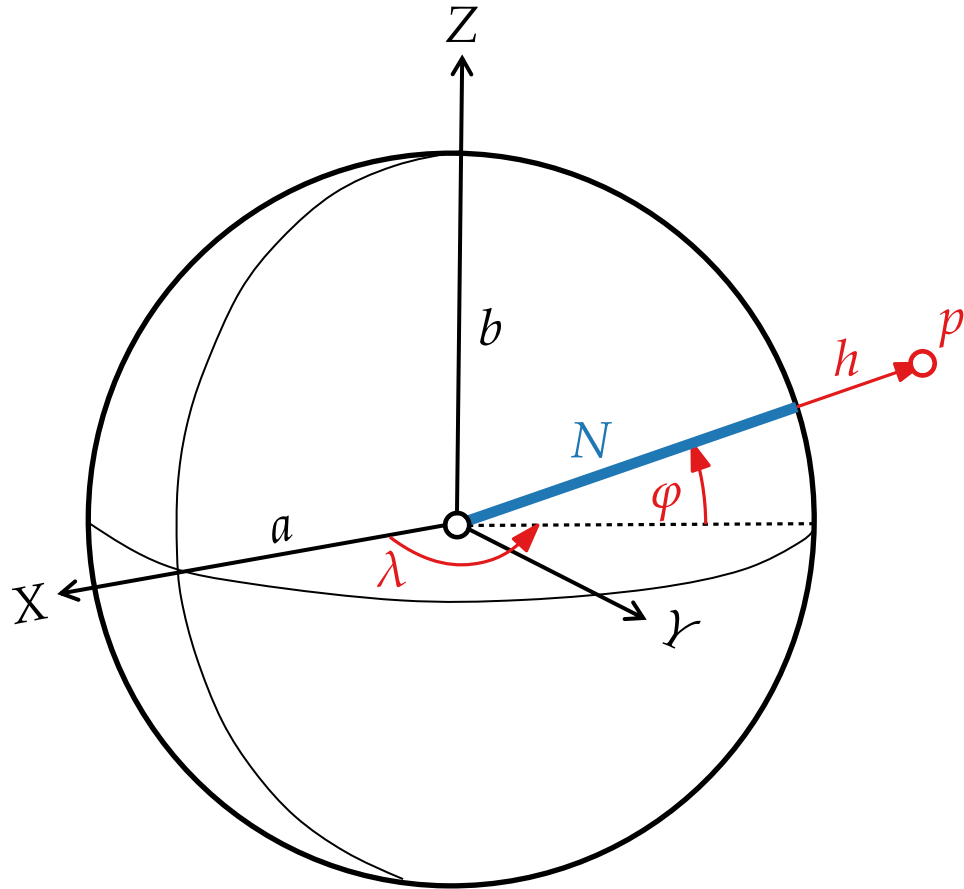


Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

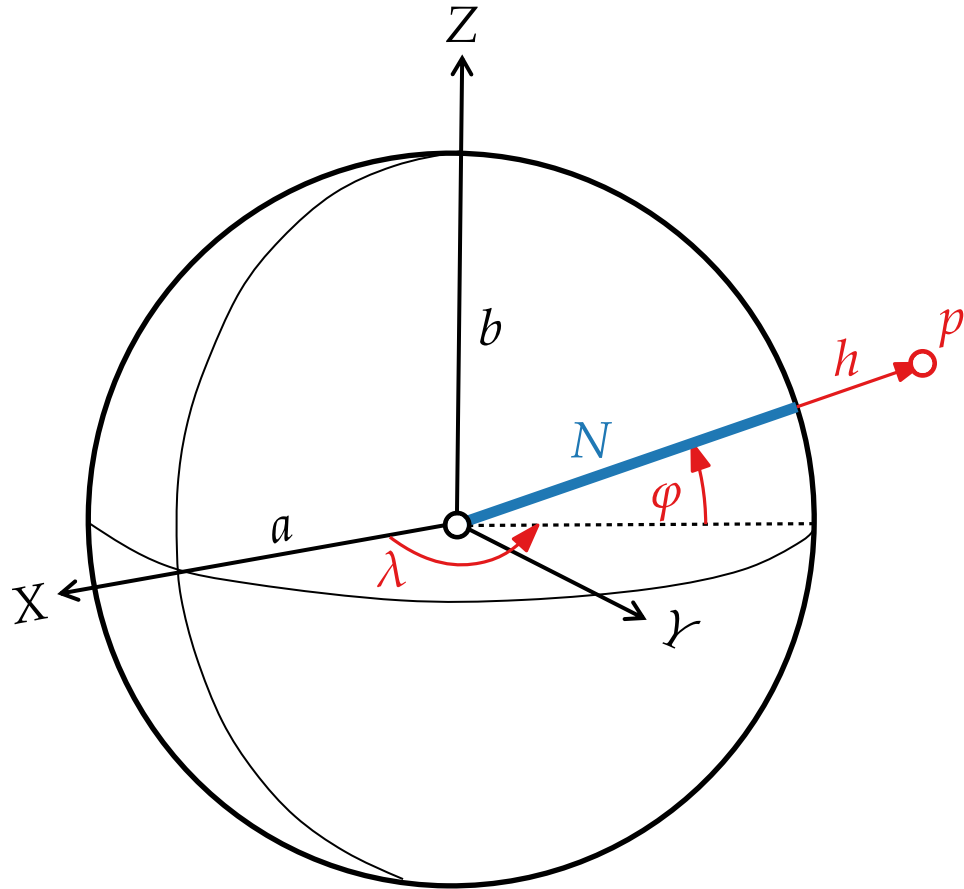
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

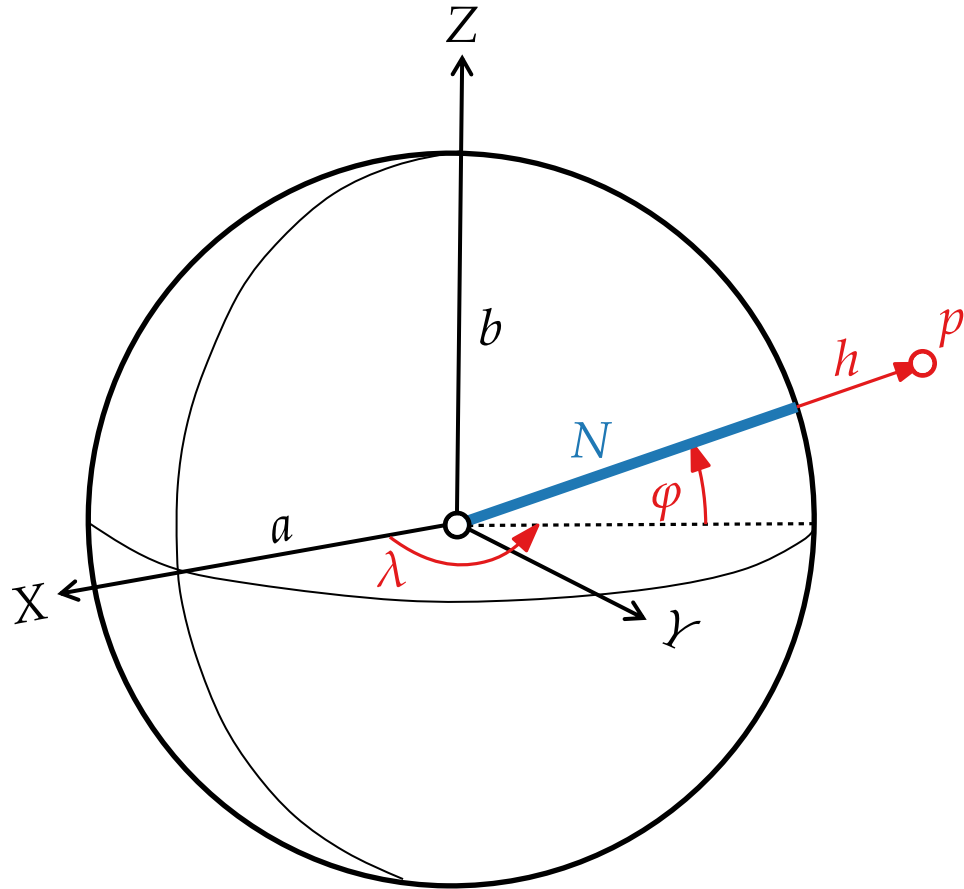
mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

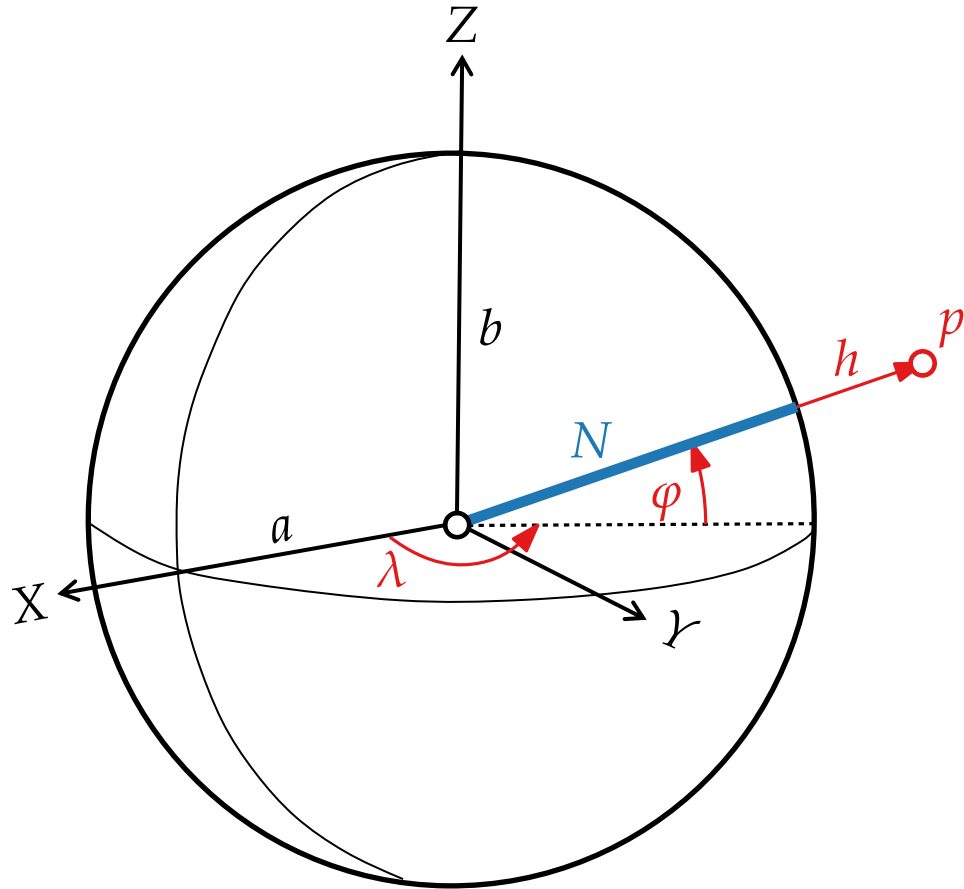
$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

→ $a = b = R$ und $h = 0$

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

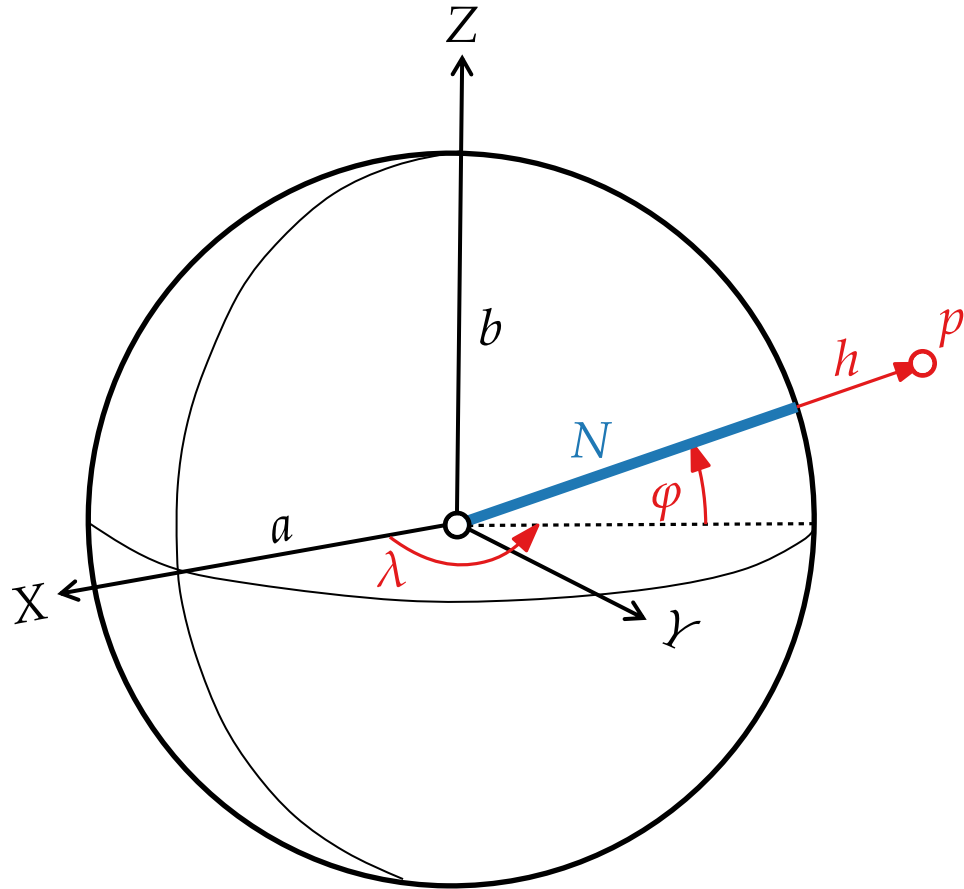
Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

→ $a = b = R$ und $h = 0$

→ $e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2}$

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

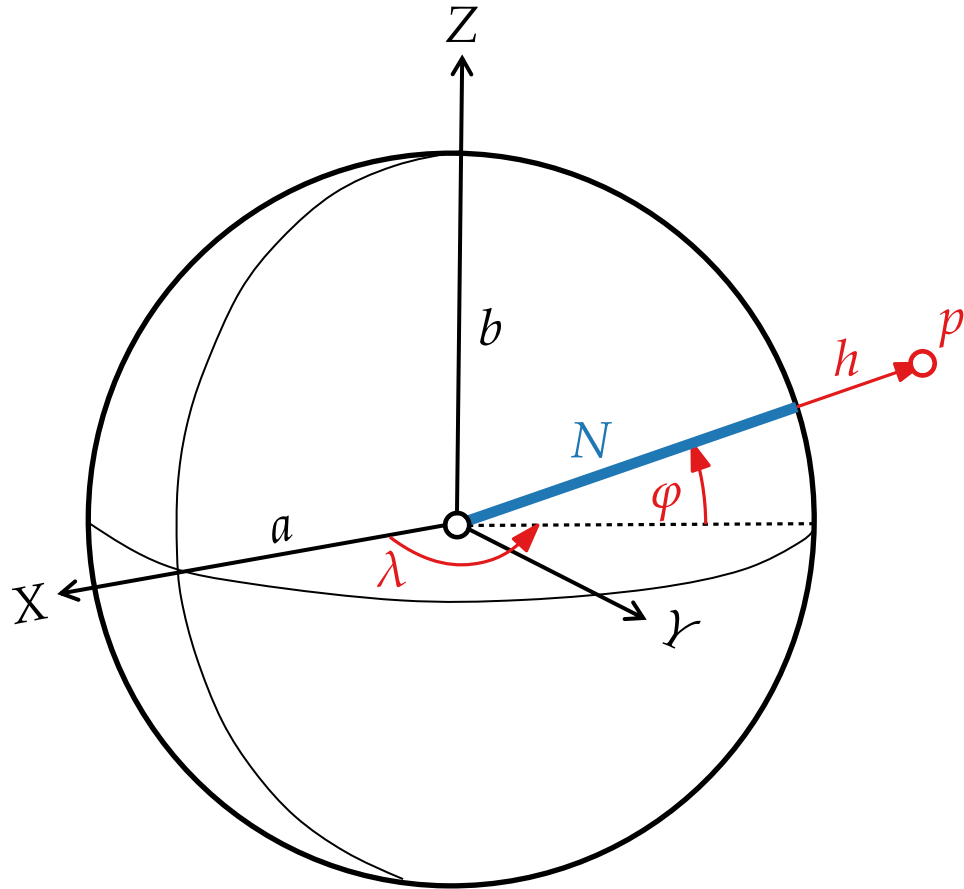
Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

→ $a = b = R$ und $h = 0$

→ $e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2} = 0$

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

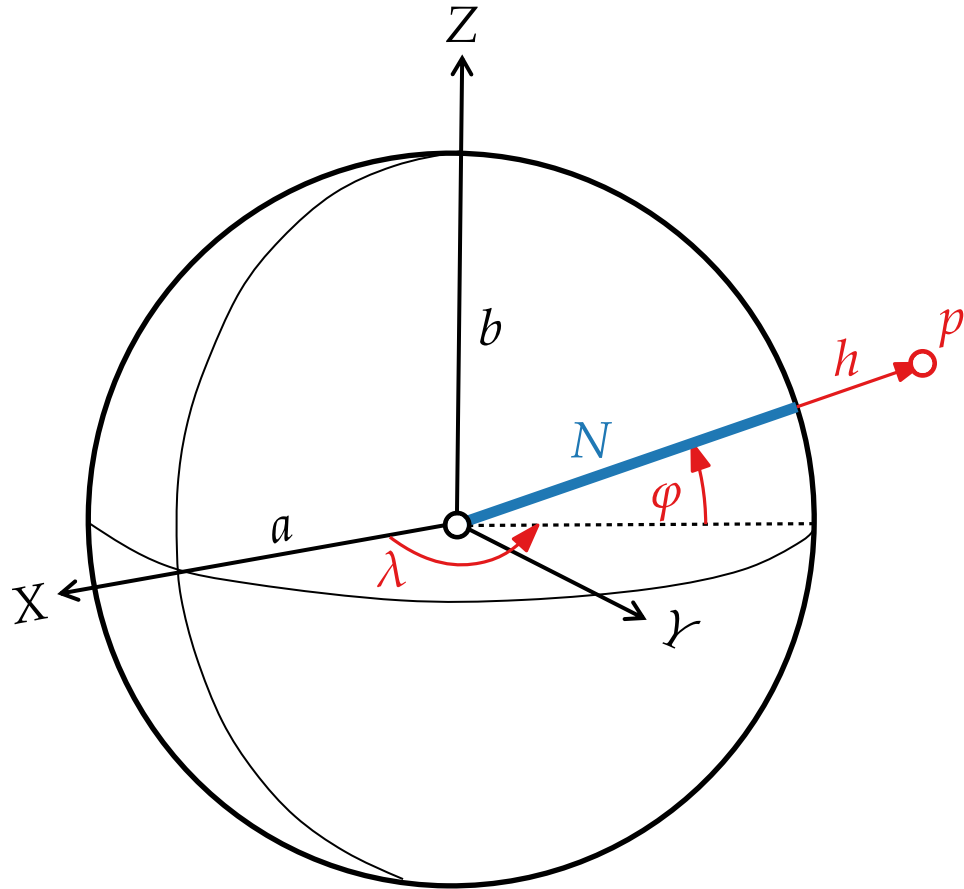
→ $a = b = R$ und $h = 0$

→ $e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2} = 0$

$$N = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}}$$

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

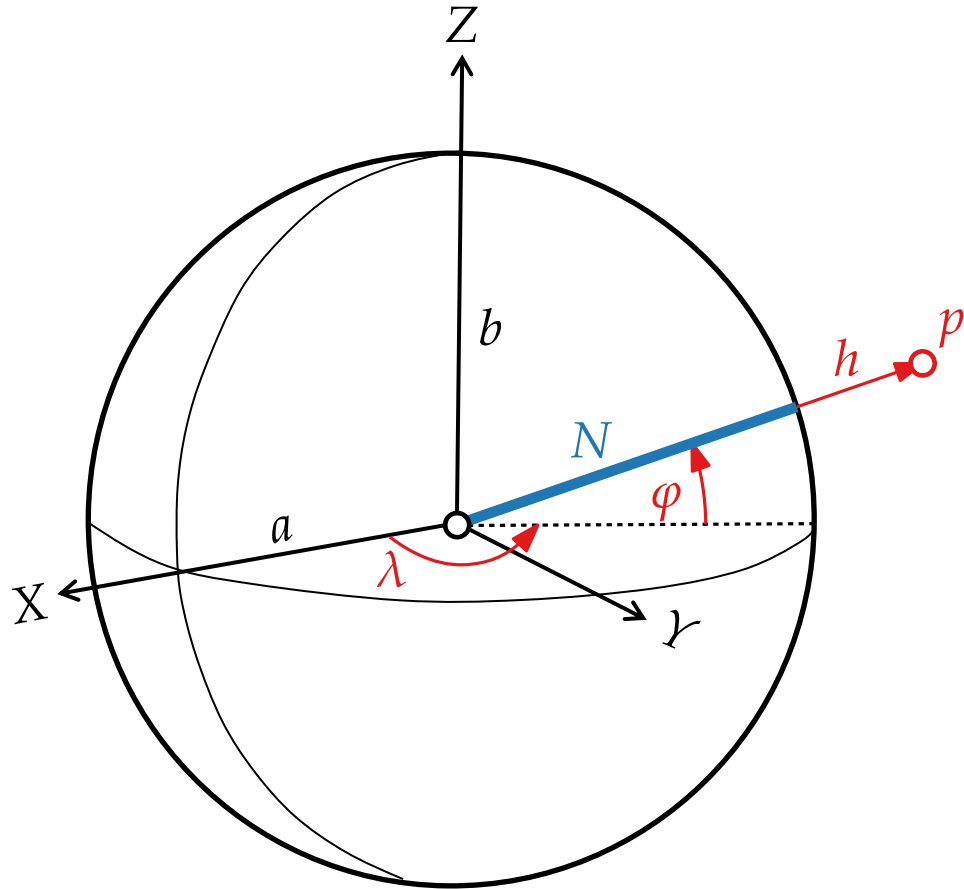
→ $a = b = R$ und $h = 0$

→ $e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2} = 0$

$$N = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{R^2}{R \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

→ $a = b = R$ und $h = 0$

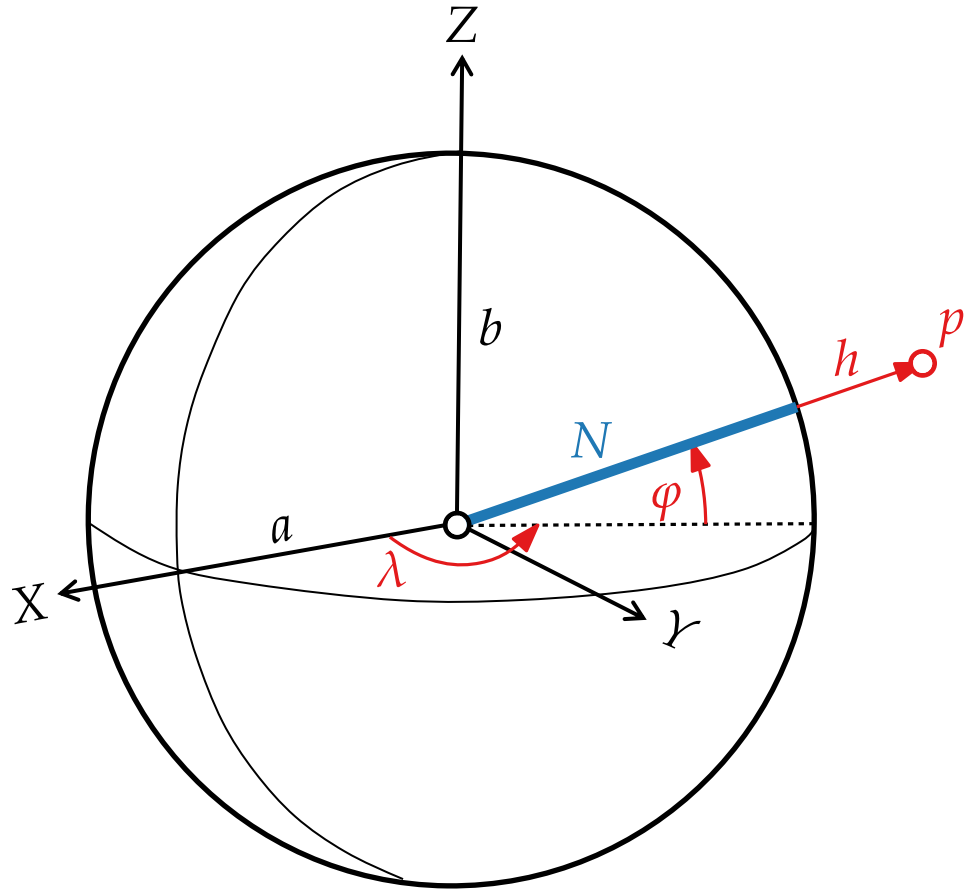
→ $e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2} = 0$

$$N = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{R^2}{R \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = R$$

= 1

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

→ $a = b = R$ und $h = 0$

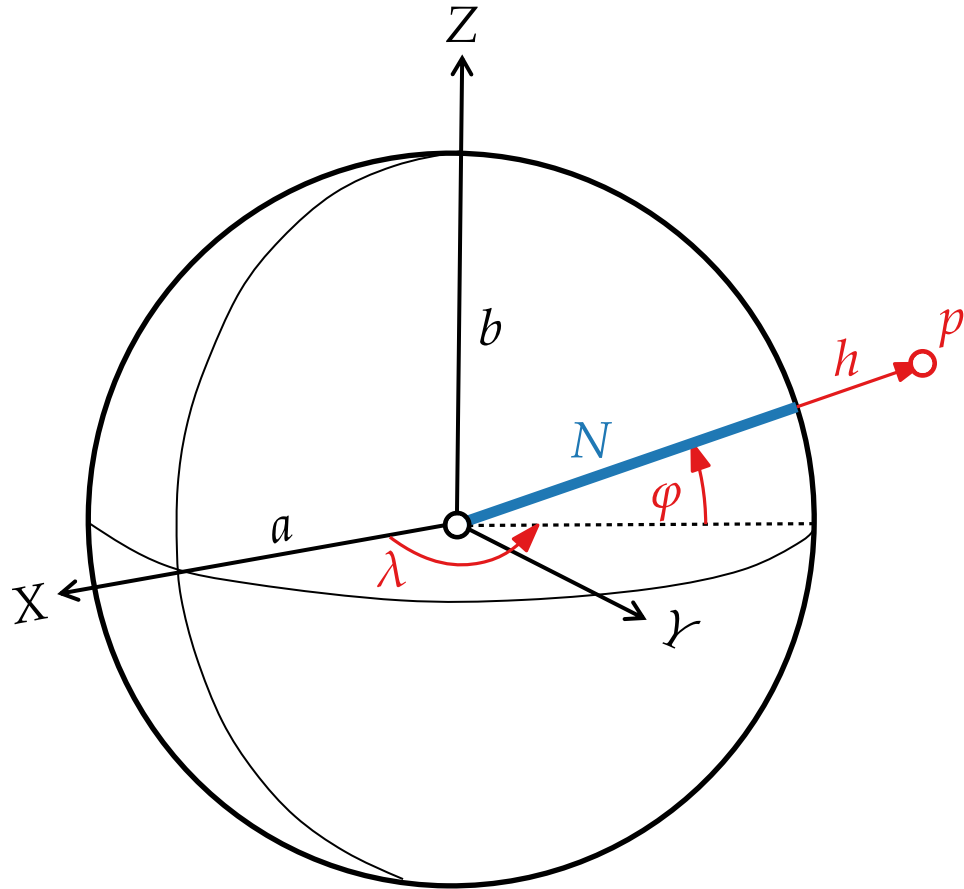
→ $e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2} = 0$

$$N = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{R^2}{R \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = R$$

= 1

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



$$\rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

$$\rightarrow a = b = R \text{ und } h = 0$$

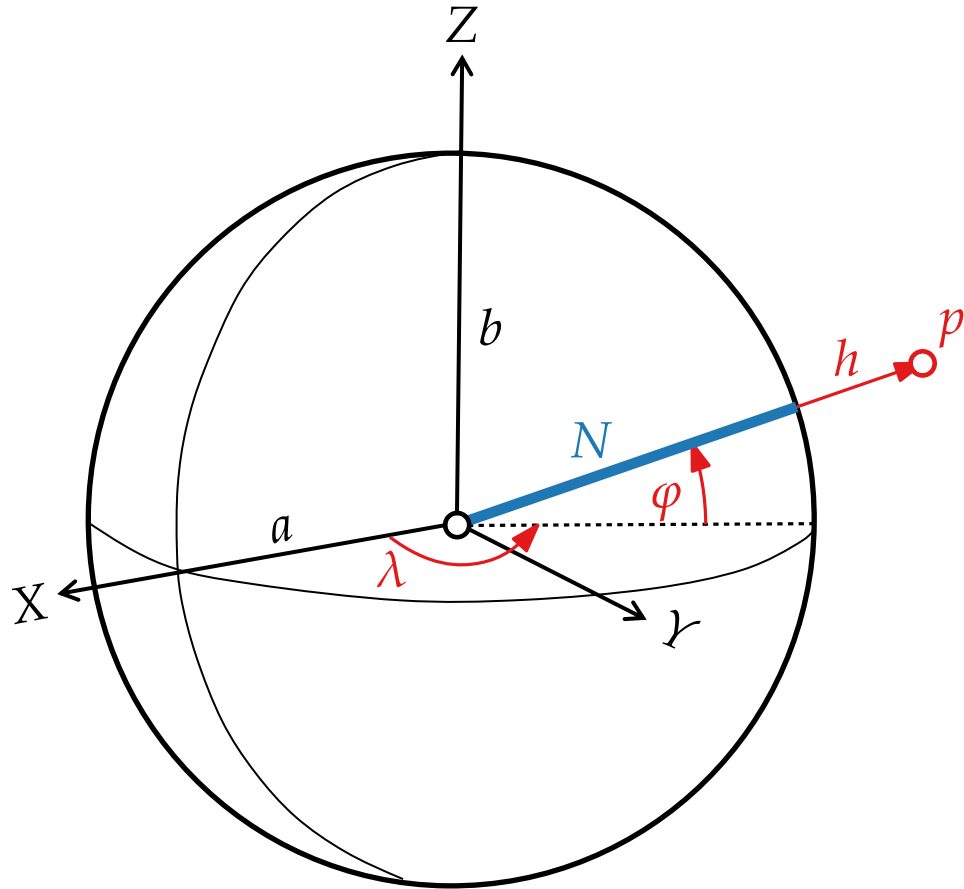
$$\rightarrow e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2} = 0$$

$$N = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{R^2}{R \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = R$$

= 1

Kartesische Koordinaten der Kugel

Länge λ und Breite φ



$$\rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Z hängt nicht von λ ab – warum?

Kartesische Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{N}{1+e'} + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

$$e' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Mercatorprojektion geht von Kugel aus!

$\rightarrow a = b = R$ und $h = 0$

$\rightarrow e' = \frac{R^2 - R^2}{R^2} = 0$

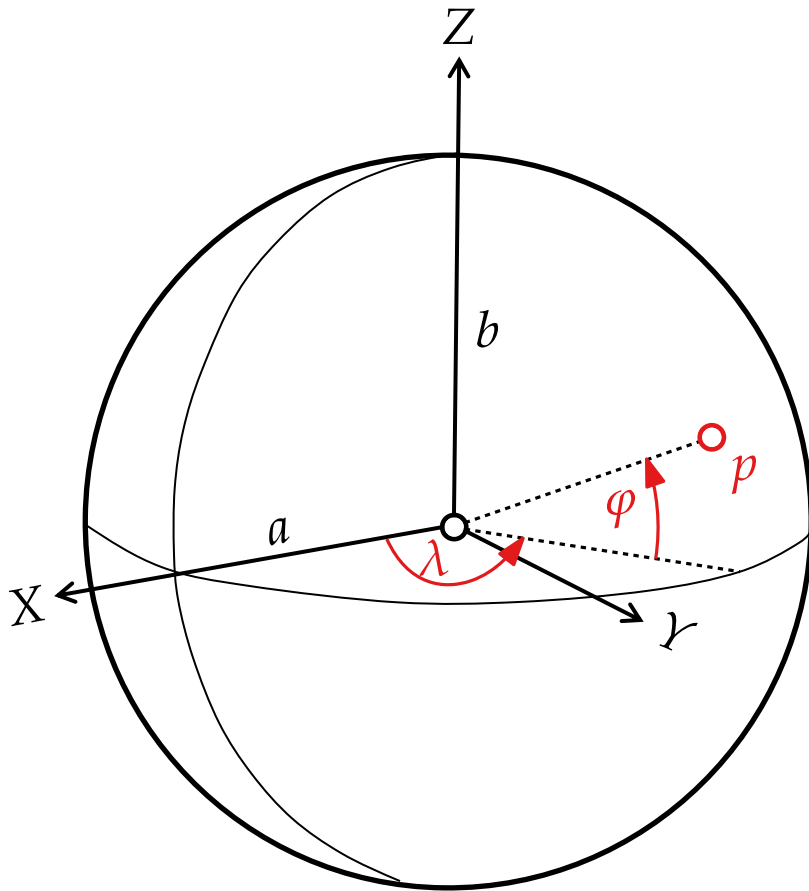
$$N = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{R^2}{R \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = R$$

$\boxed{=1}$

Herleitung der Mercatorfunktion



Länge λ und Breite φ

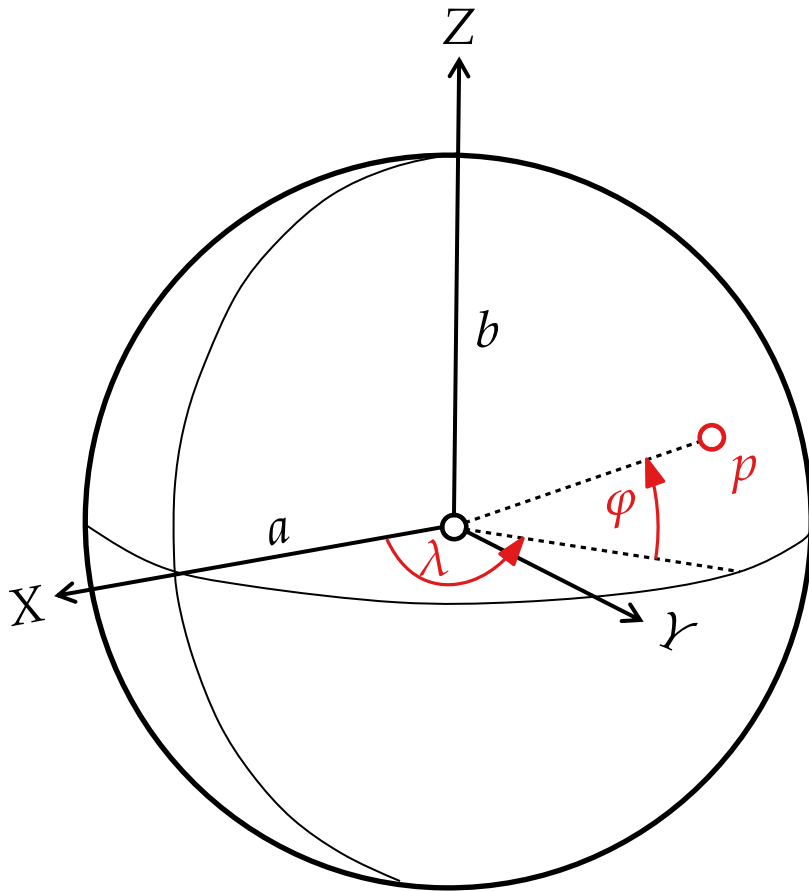


$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ

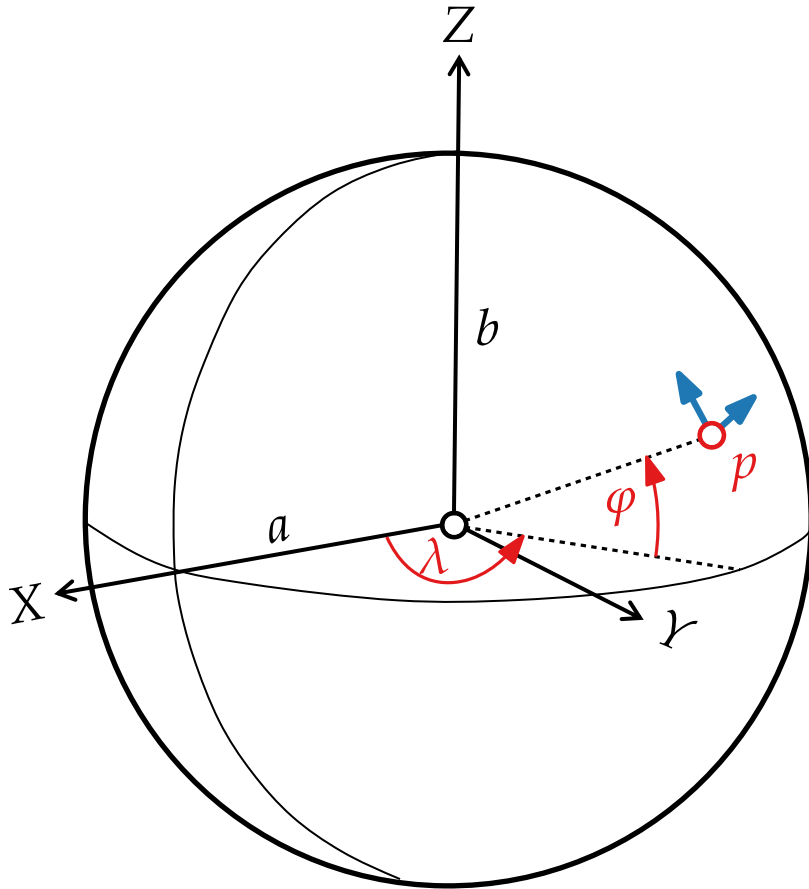


$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ

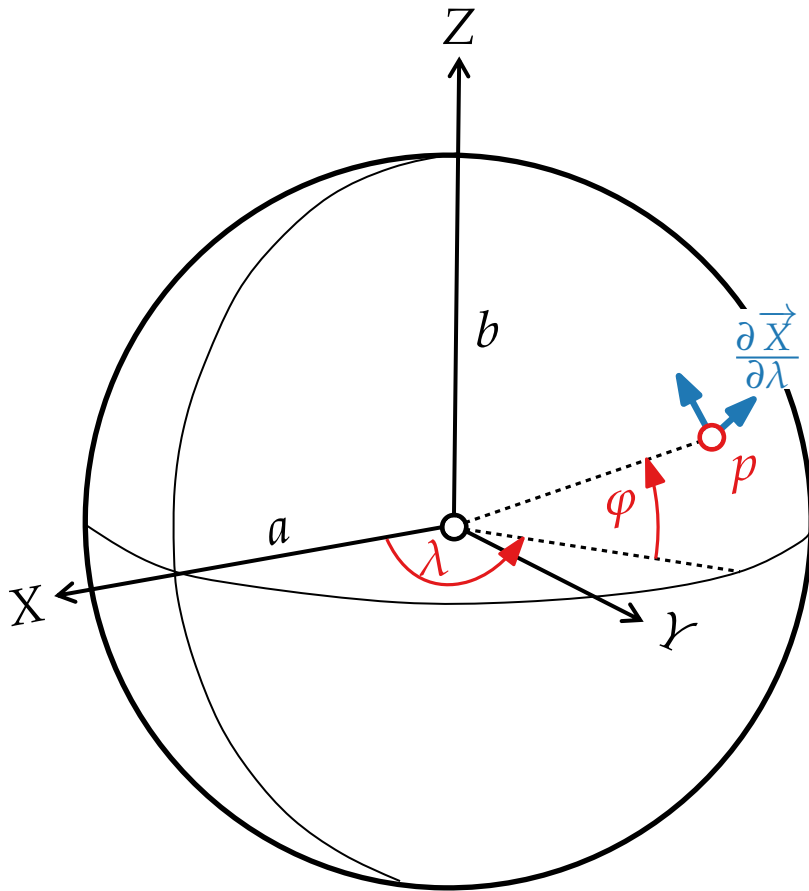


$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ

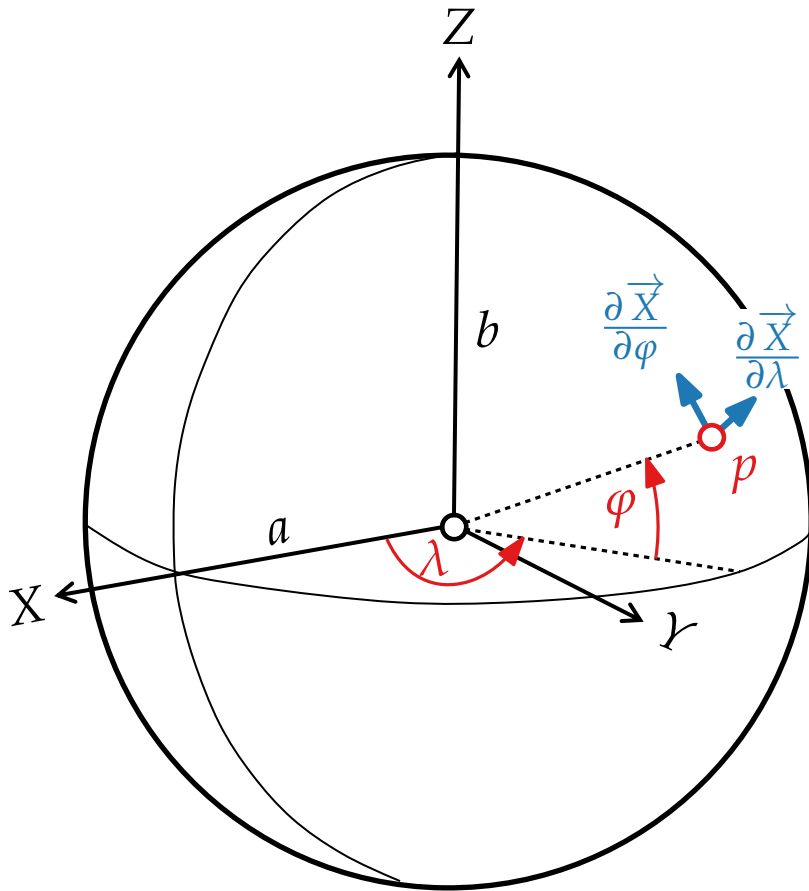


$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ

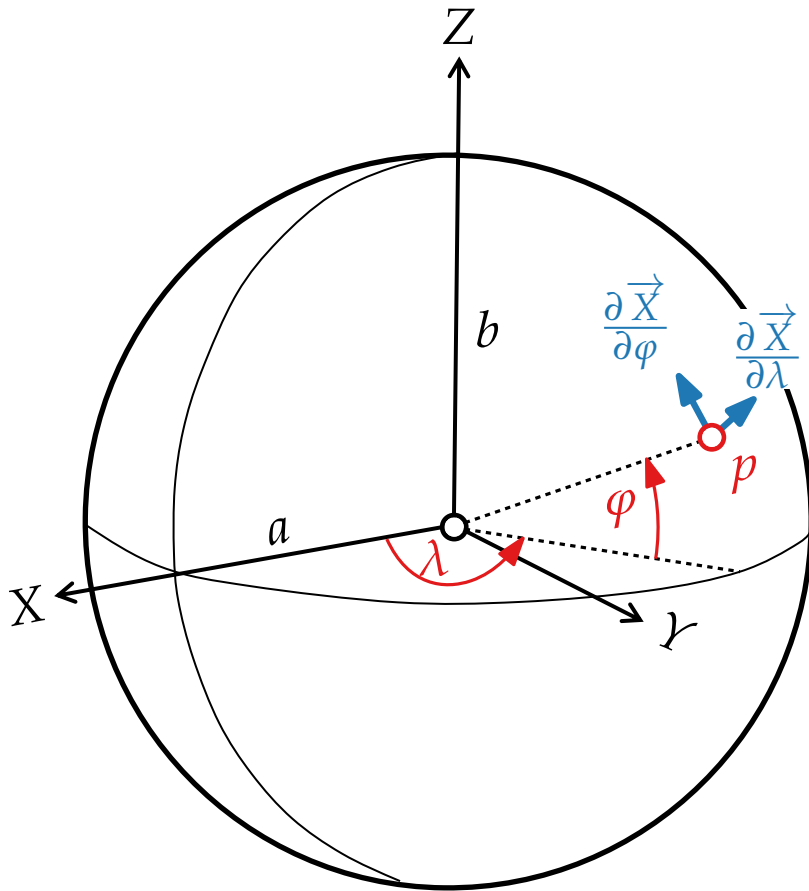


$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

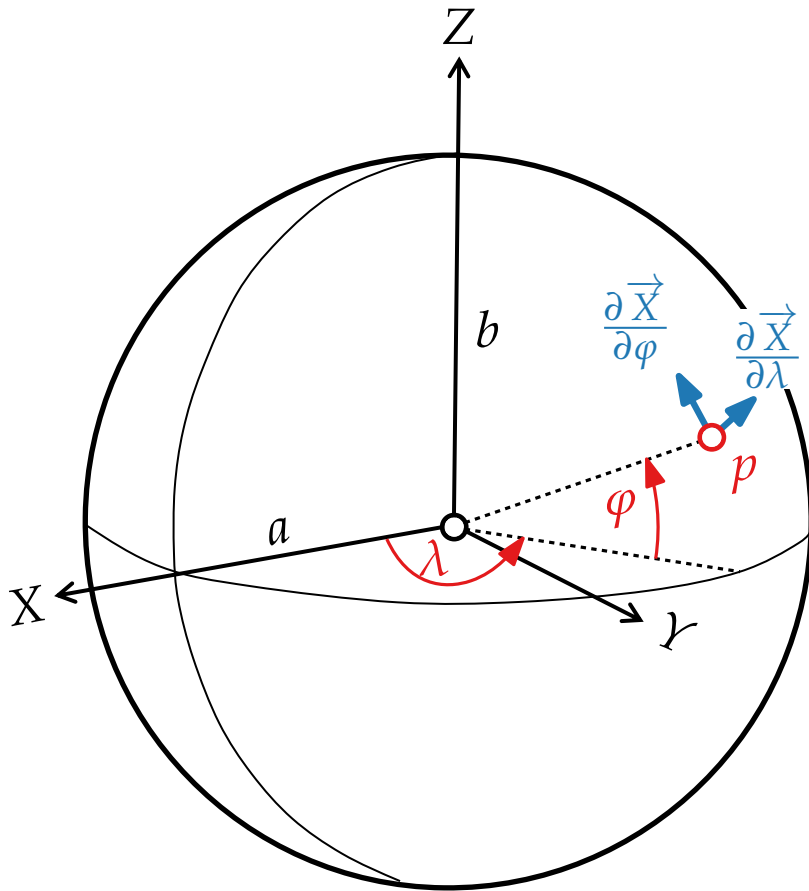
Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Tangentialvektoren:



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

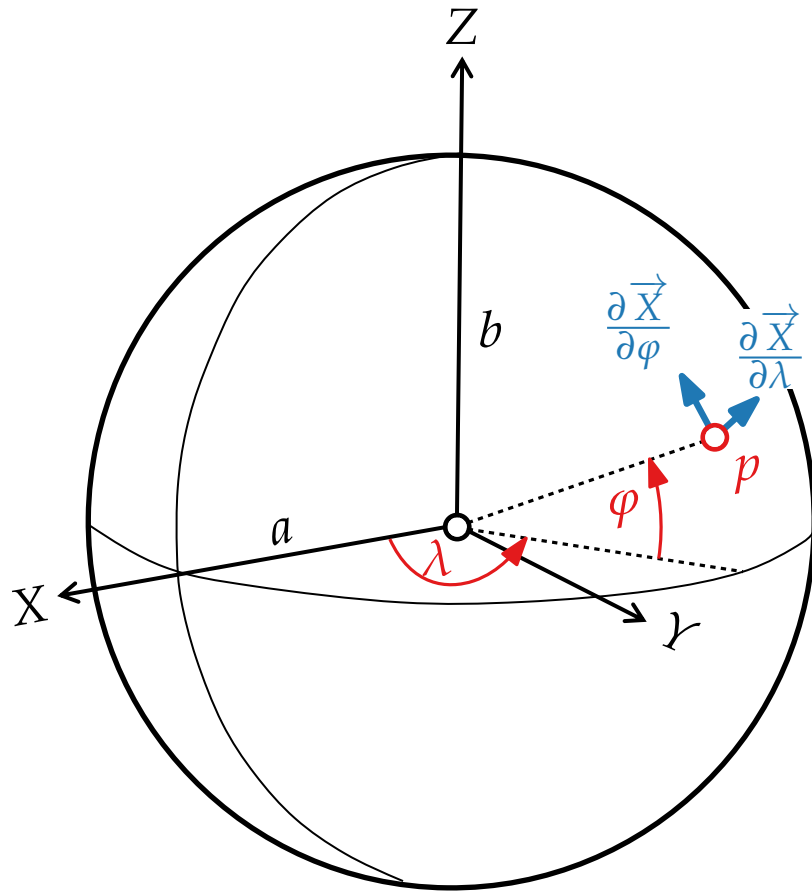
Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} =$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} =$$

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

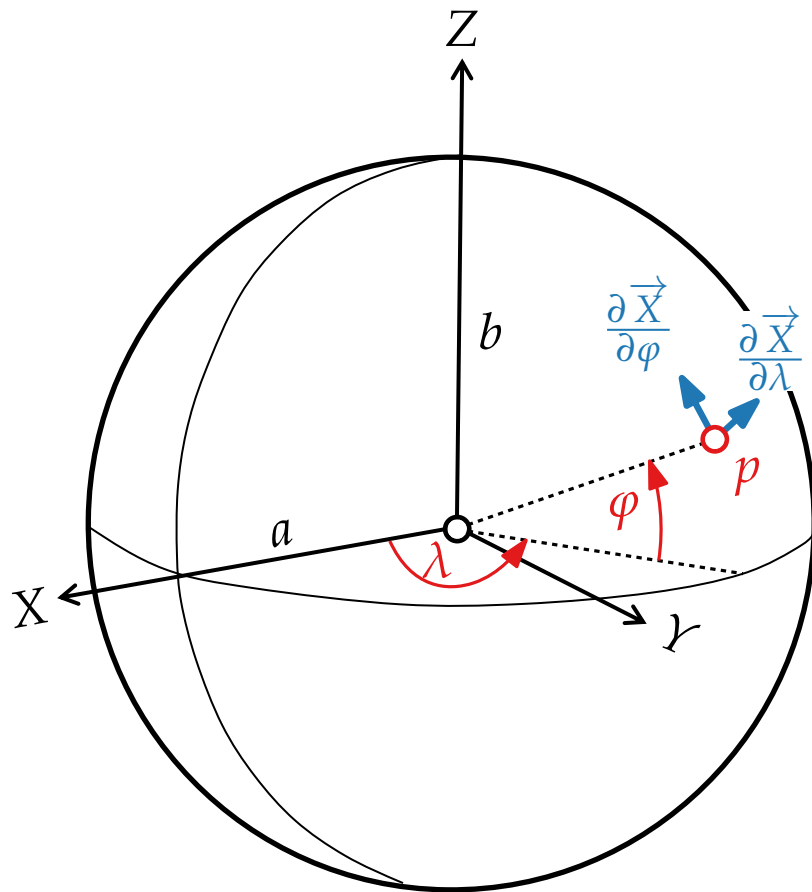
Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} =$$



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

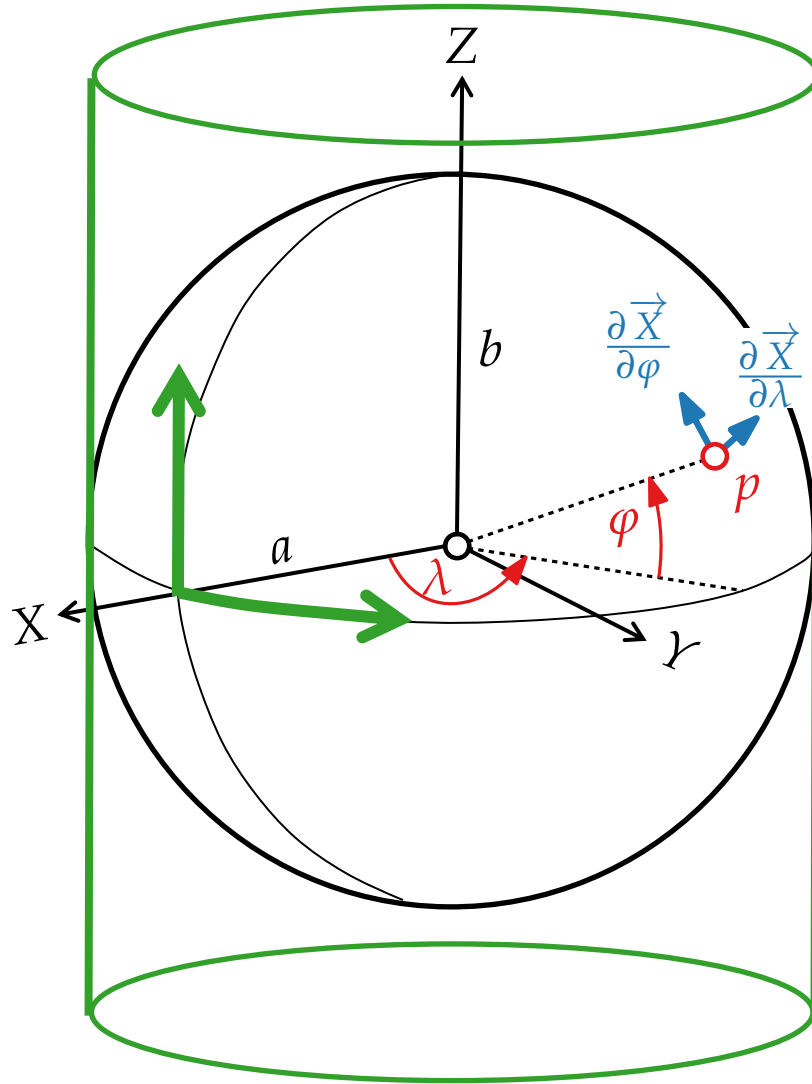
Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Tangentialvektoren:

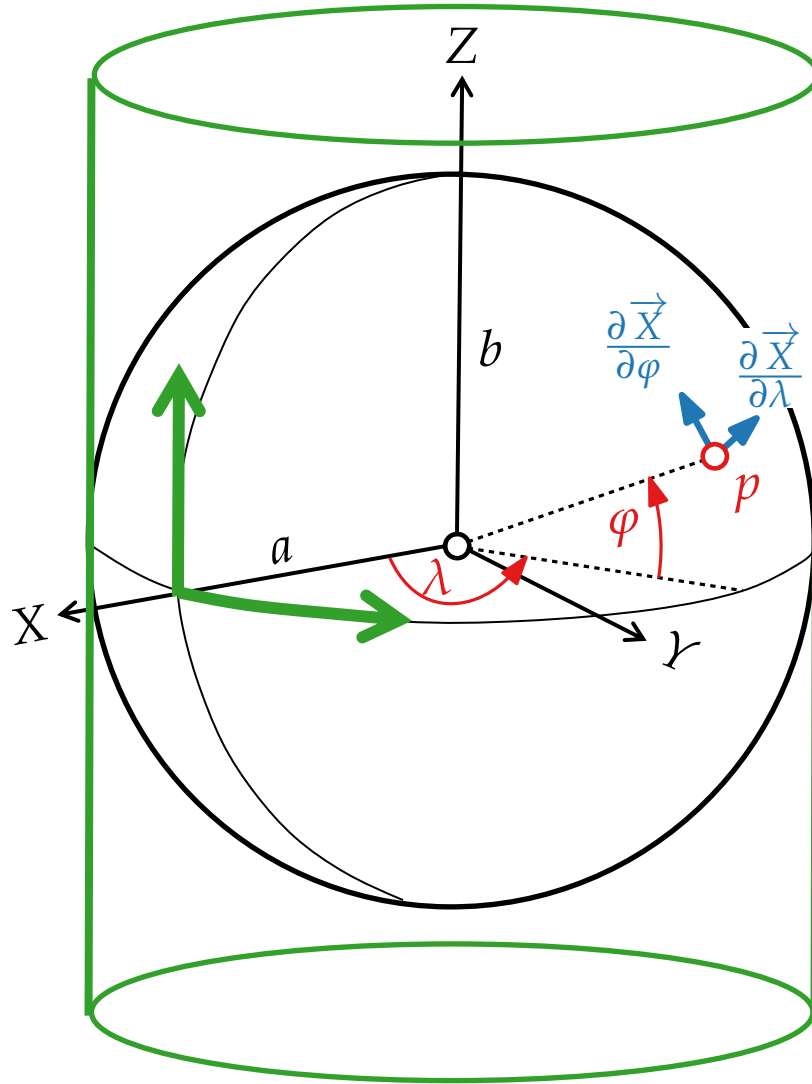
$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderabbildung:

λ bildet x-Koordinate direkt ab

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderabbildung:

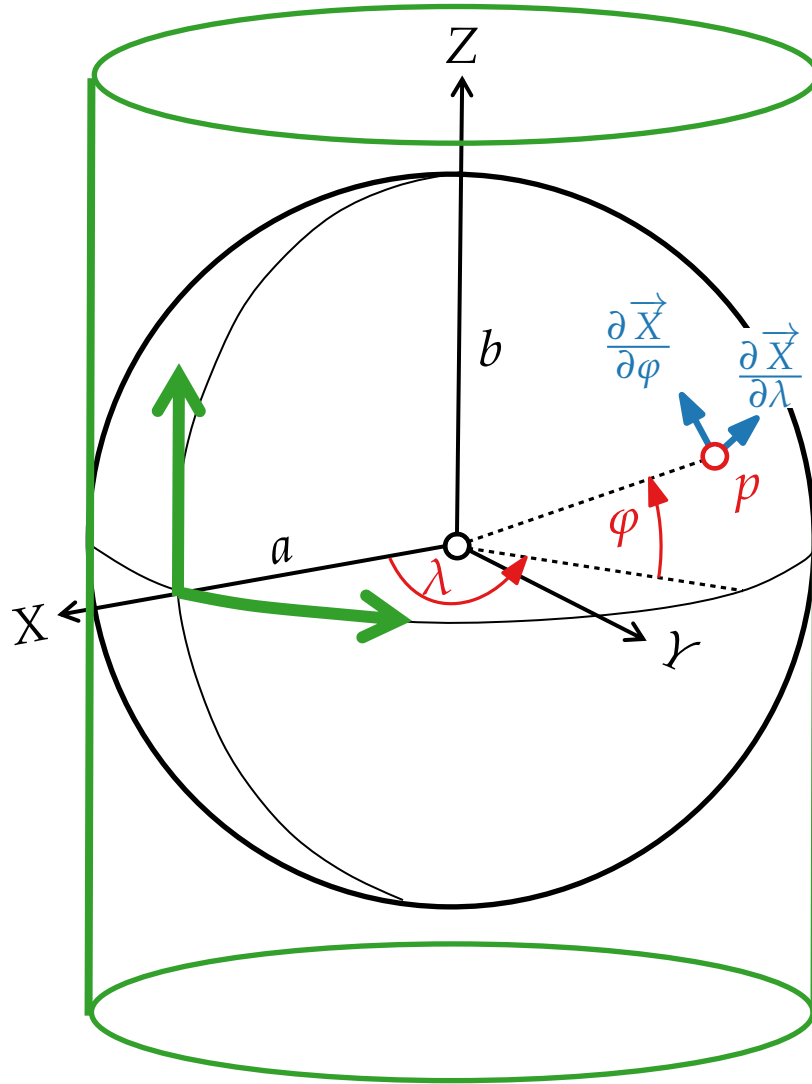
λ bildet x-Koordinate direkt ab

$$\rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\lambda \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderabbildung:

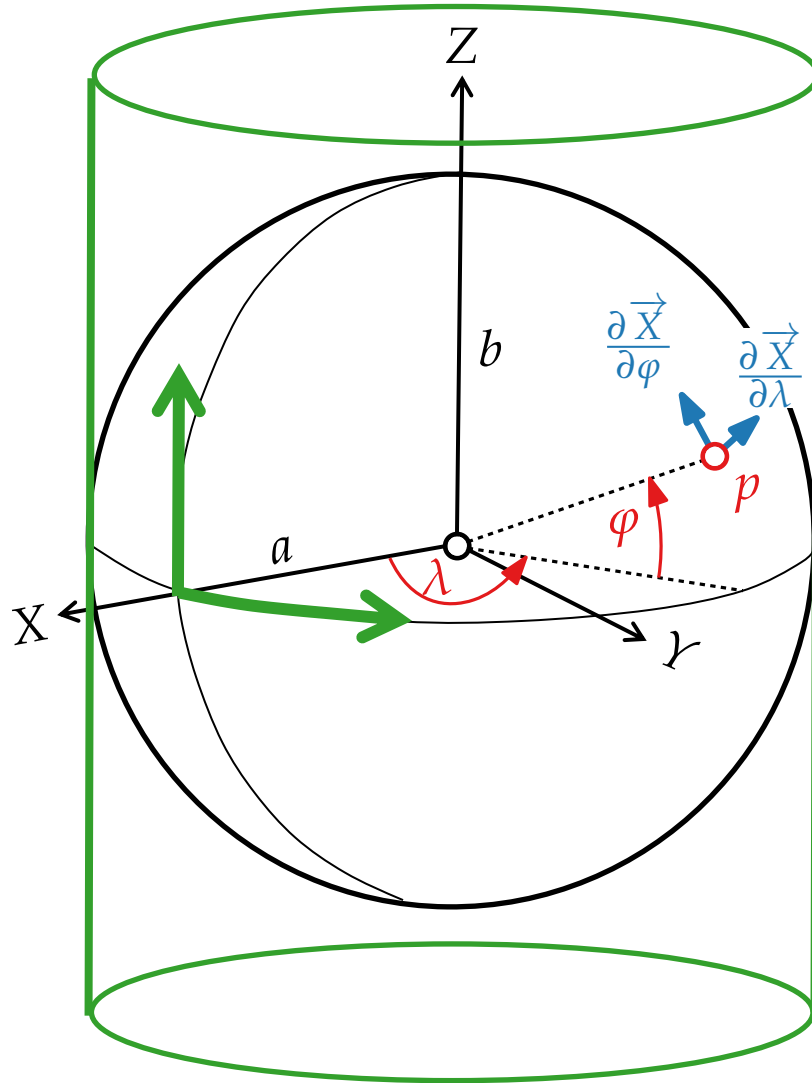
λ bildet x -Koordinate direkt ab

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\lambda \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderabbildung:

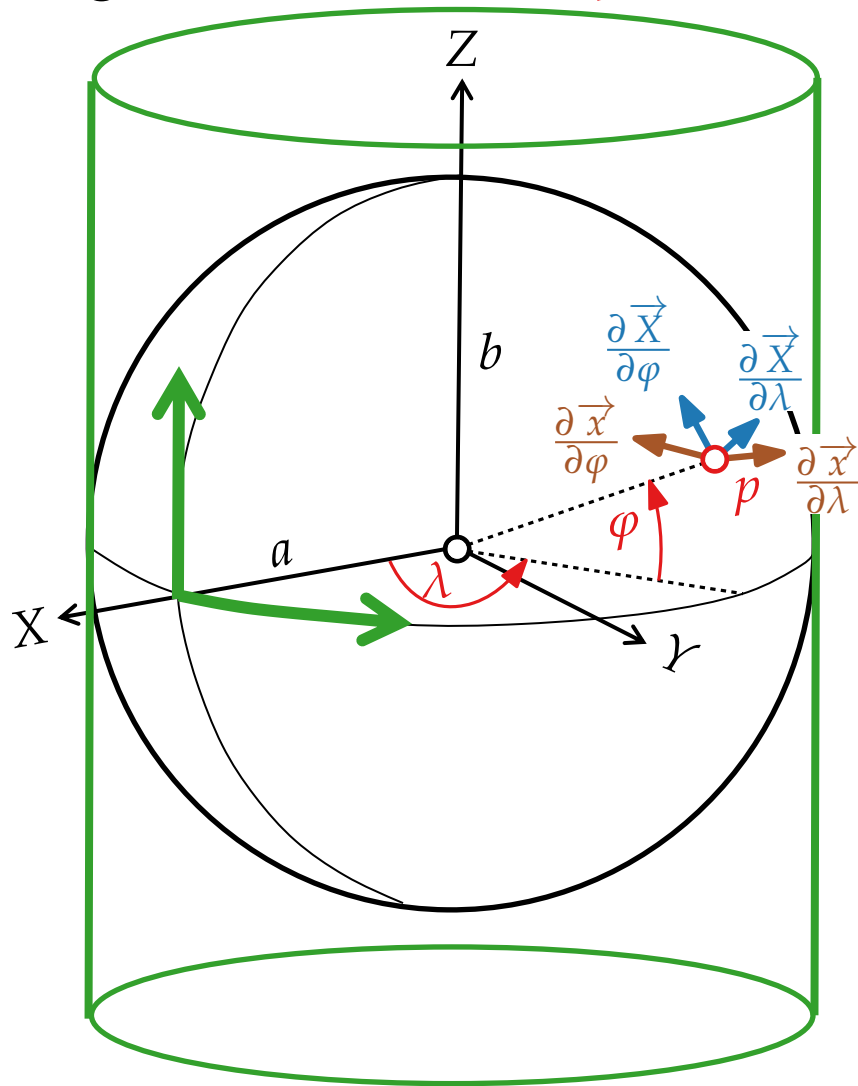
λ bildet x-Koordinate direkt ab

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\lambda \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderabbildung:

λ bildet x -Koordinate direkt ab

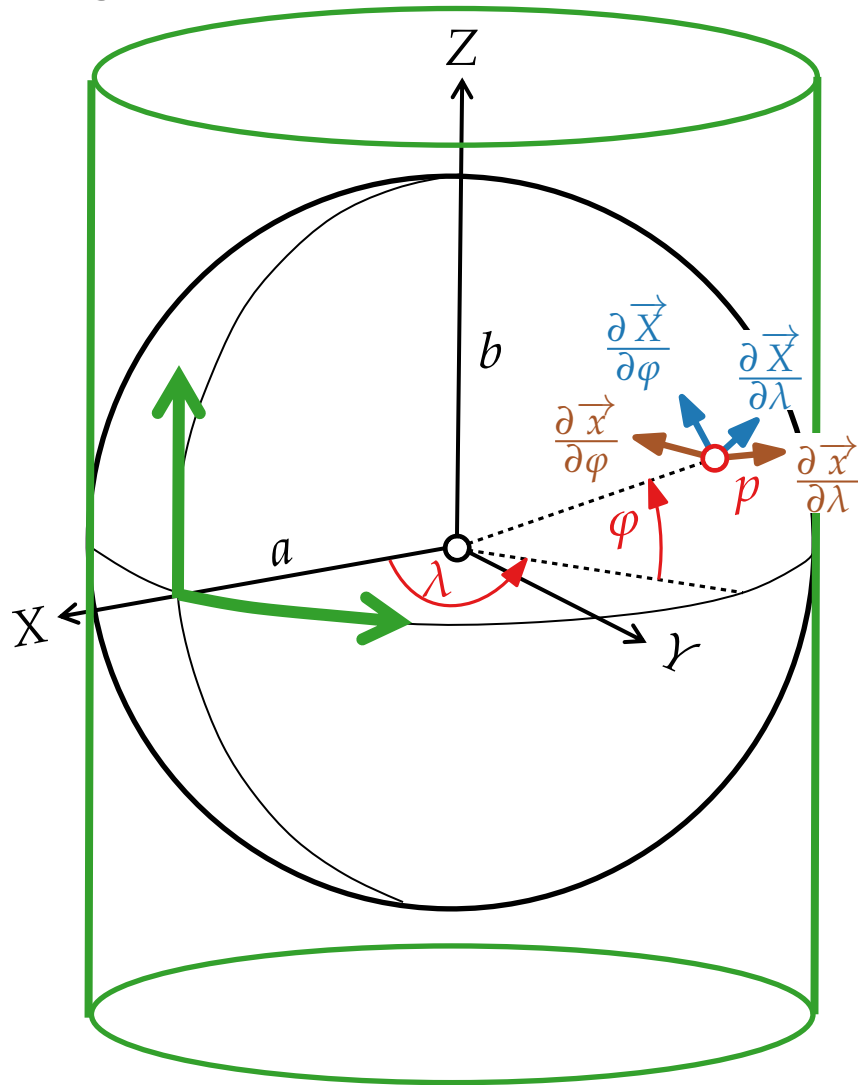
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\lambda \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderabbildung:

λ bildet x-Koordinate direkt ab

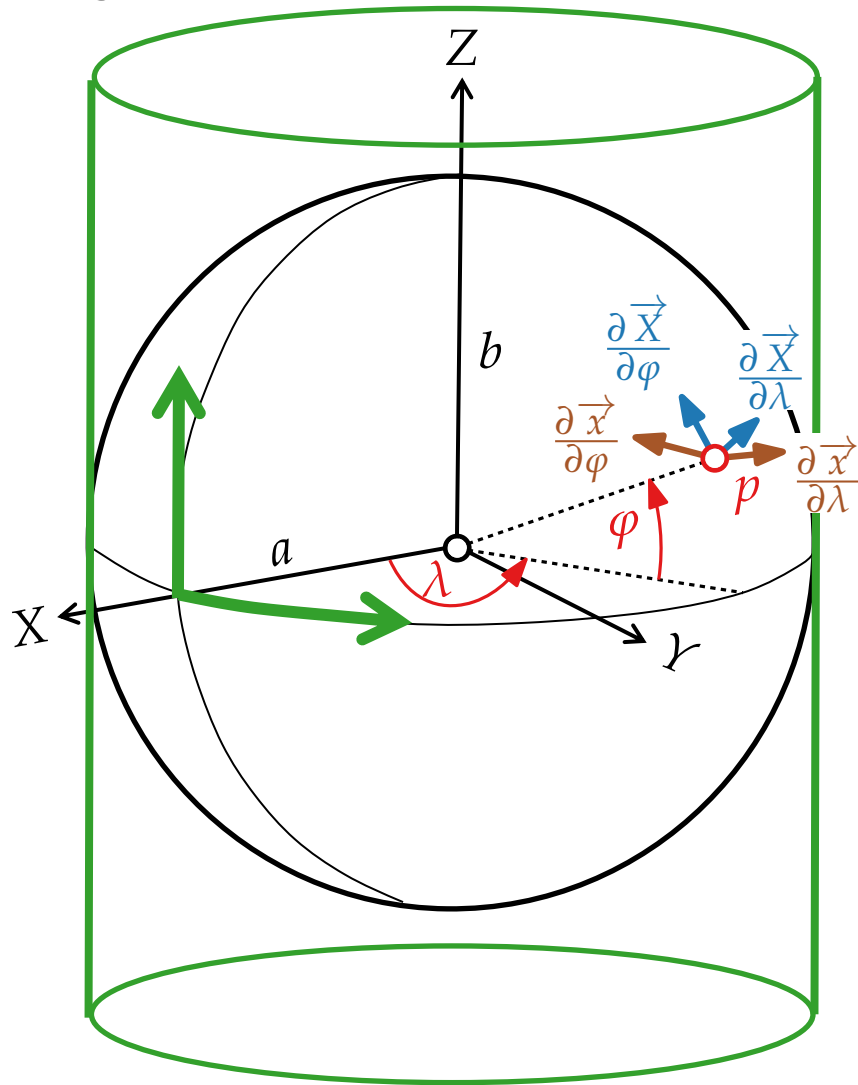
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\lambda \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

Tangentialvektoren:

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderabbildung:

λ bildet x -Koordinate direkt ab

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\lambda \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$

Was bewirkt eine Änderung von λ oder φ ?

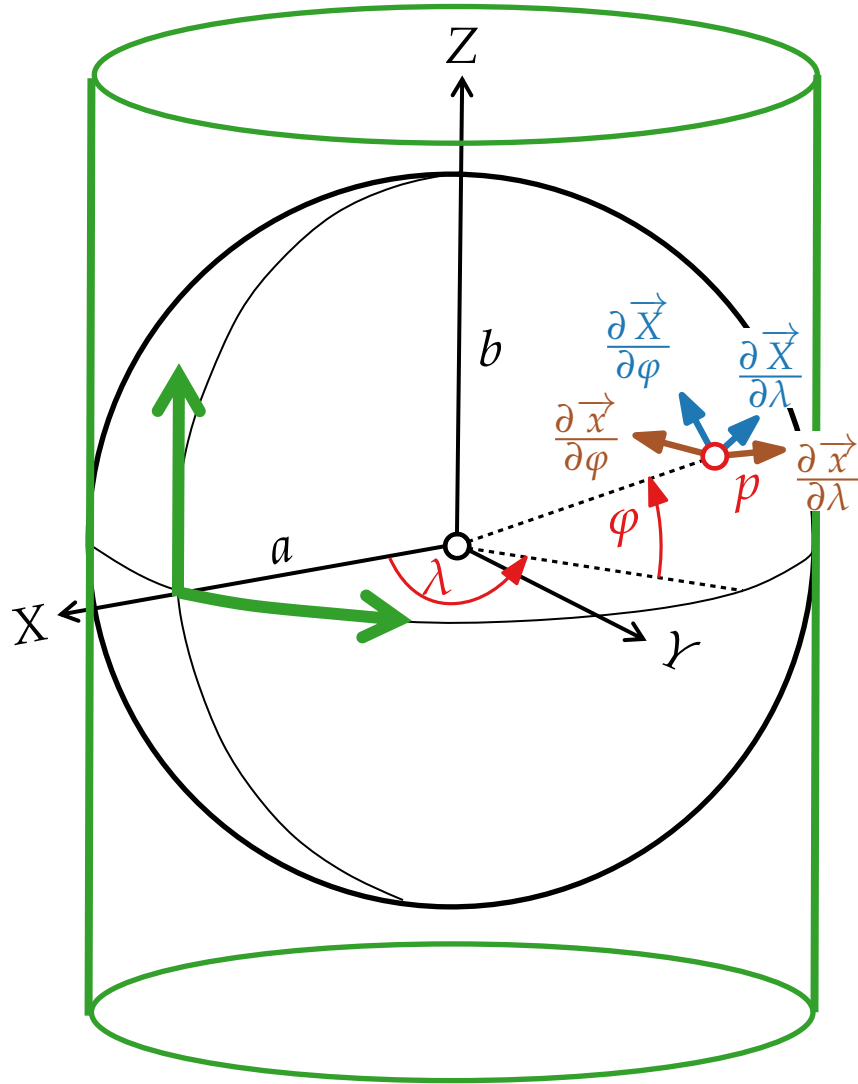
Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tangentialvektoren:

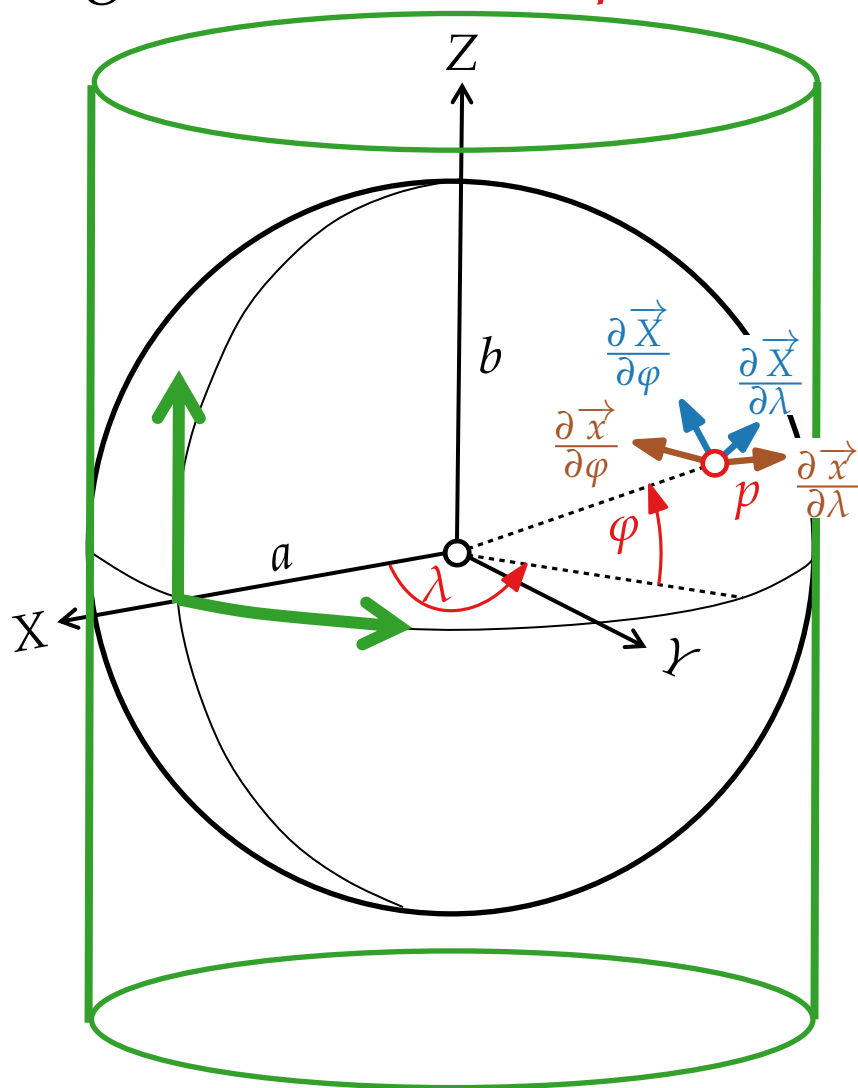
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tangentialvektoren:

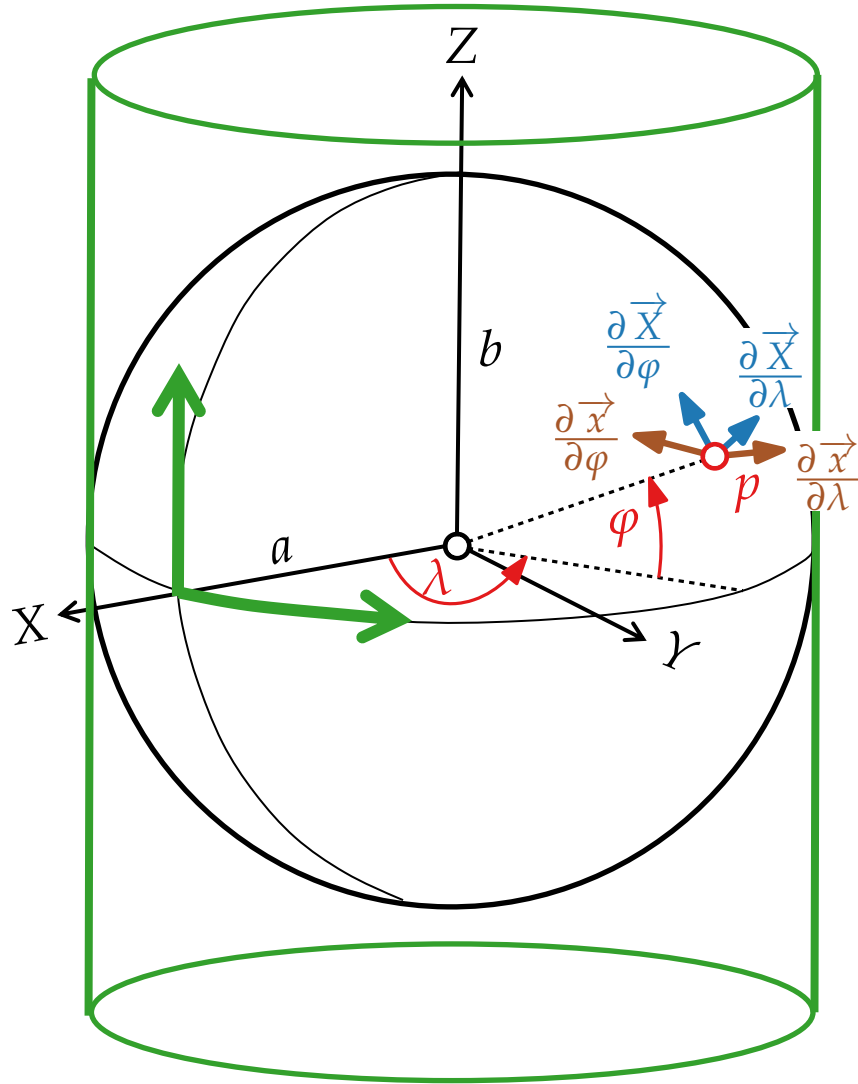
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}$$

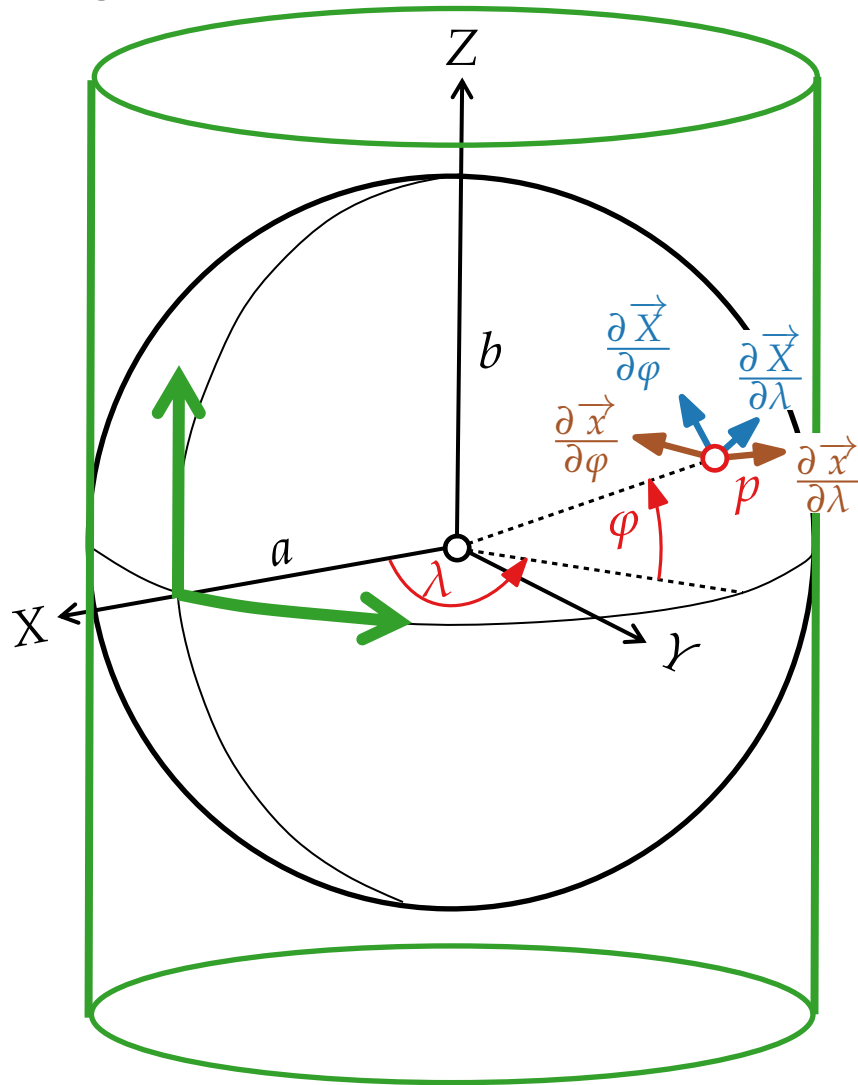
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right)^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi)$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi}$$

Herleitung der Mercatorfunktion



$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\underbrace{\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda}_{=1}) + R^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \begin{matrix} \boxed{=1} \\ \boxed{=1} \end{matrix} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \\ &= R \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \\ &= R \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \\ &= R \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \\ &= R \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \\ &= R \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \\ &= R \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda} \\ &= \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda)} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \boxed{=1} \\ &= R \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda} \\ &= \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda)} \quad \boxed{=1} \end{aligned}$$



Herleitung der Mercatorfunktion

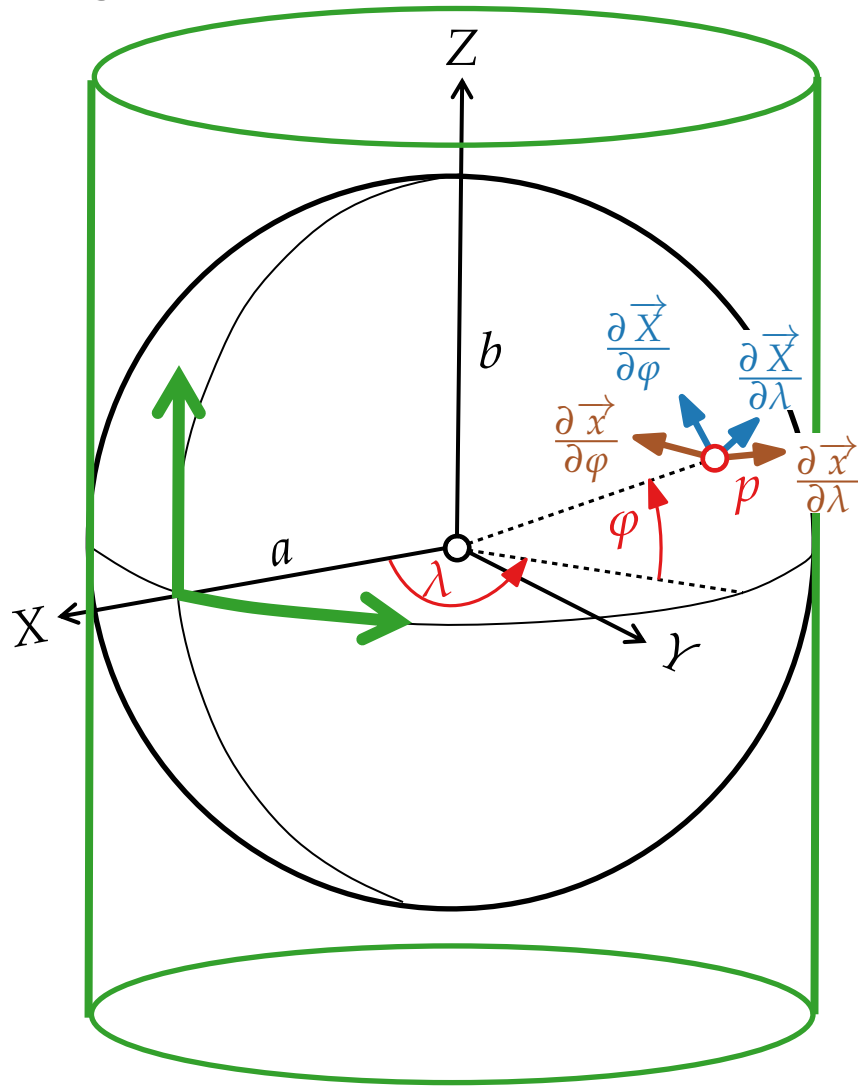
$$\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}^2} = \sqrt{f'(\varphi)^2} = f'(\varphi) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \quad \stackrel{=1}{=} \\ &= R \quad \stackrel{=1}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda}\right)^2} &= \sqrt{\begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda} \\ &= \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda)} \quad \stackrel{=1}{=} \\ &= R \cos \varphi \quad \stackrel{=1}{=} \end{aligned}$$

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



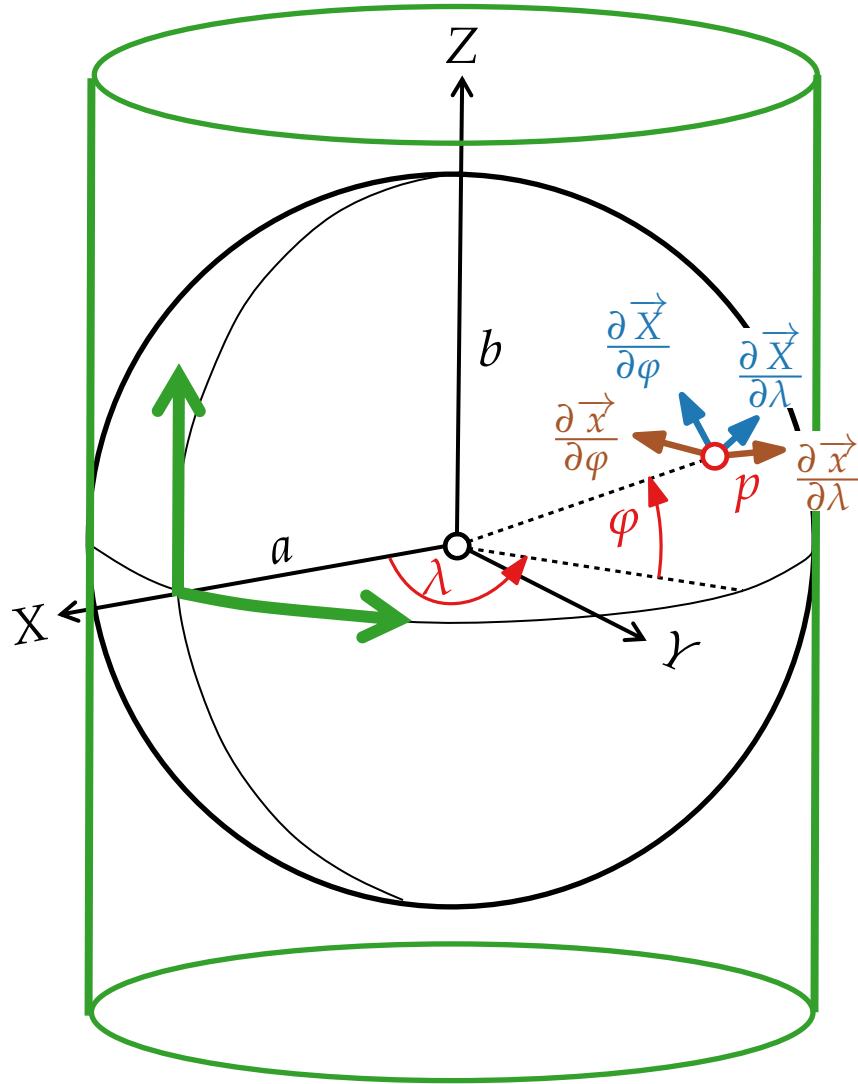
Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right)^2}$$

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

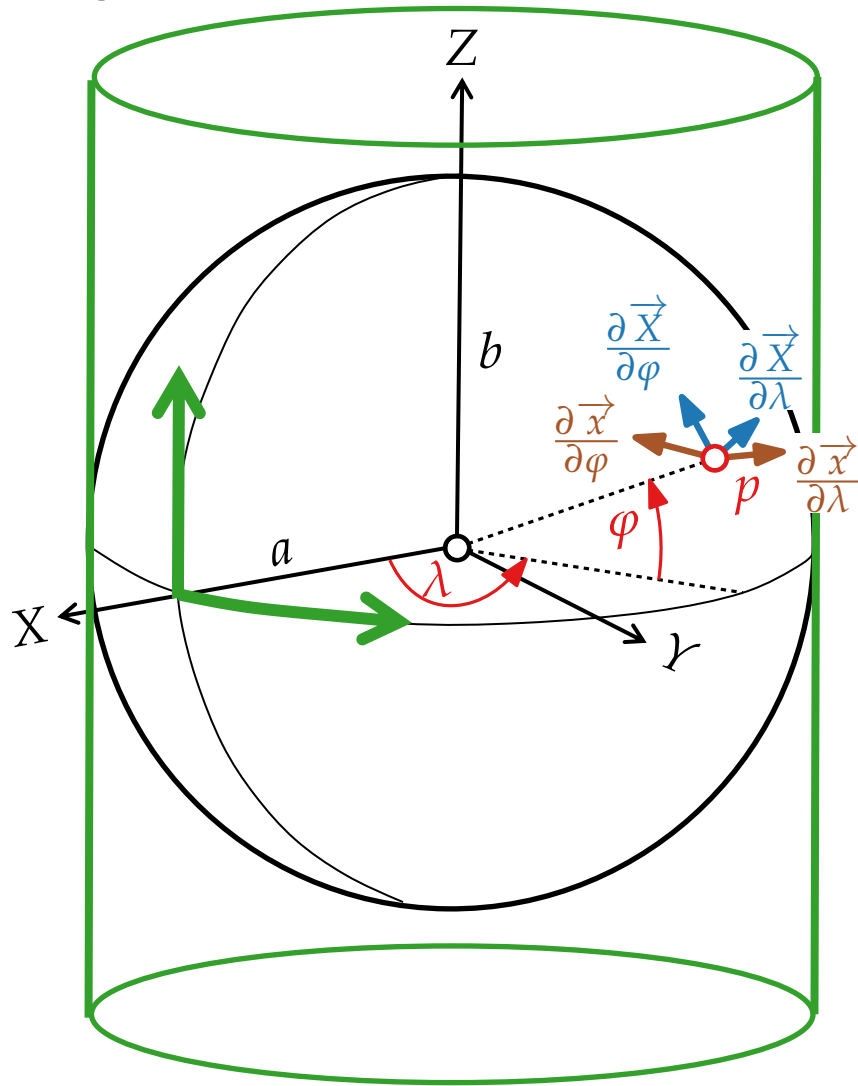
$$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right)^2}$$

$$\rightarrow f'(\varphi) / R = R / R \cos \varphi$$

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

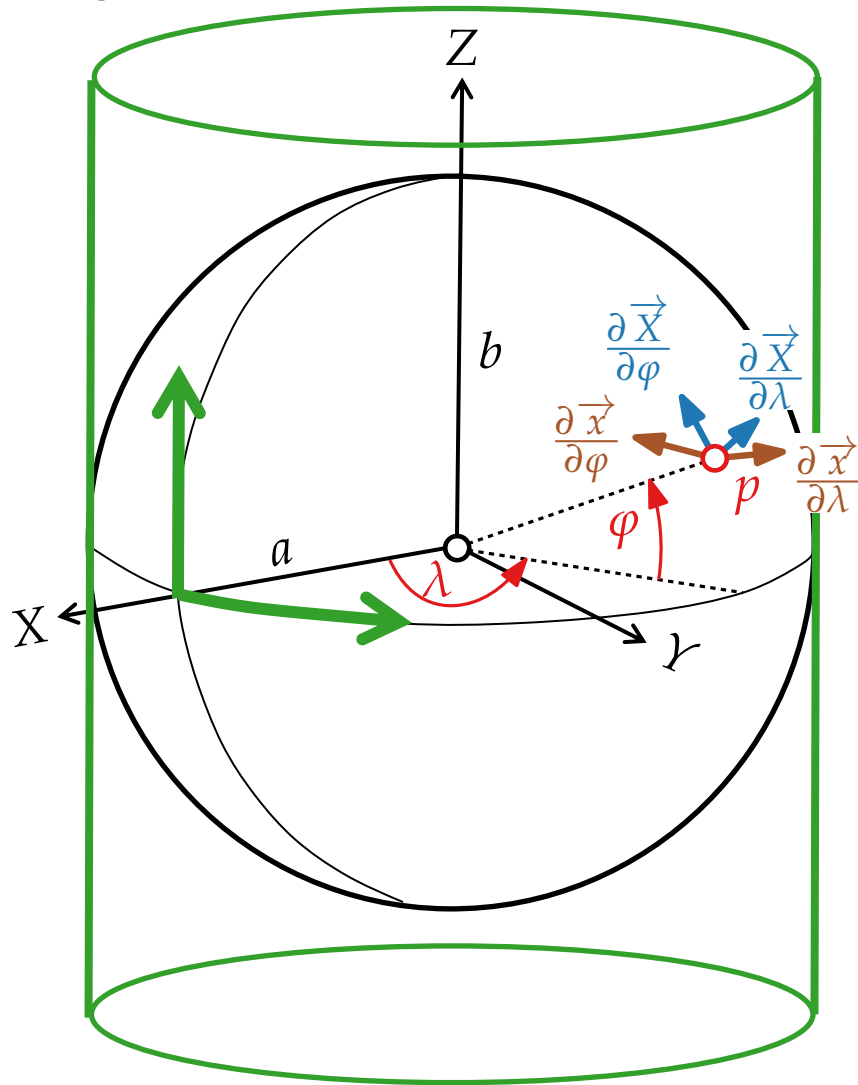
$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right)^2}$$

$$\rightarrow f'(\varphi) / R = R / R \cos \varphi$$

$$\rightarrow f'(\varphi) = R / \cos \varphi$$

Herleitung der Mercatorfunktion

Länge λ und Breite φ



Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right| / \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right|$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi} \right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \lambda} \right)^2}$$

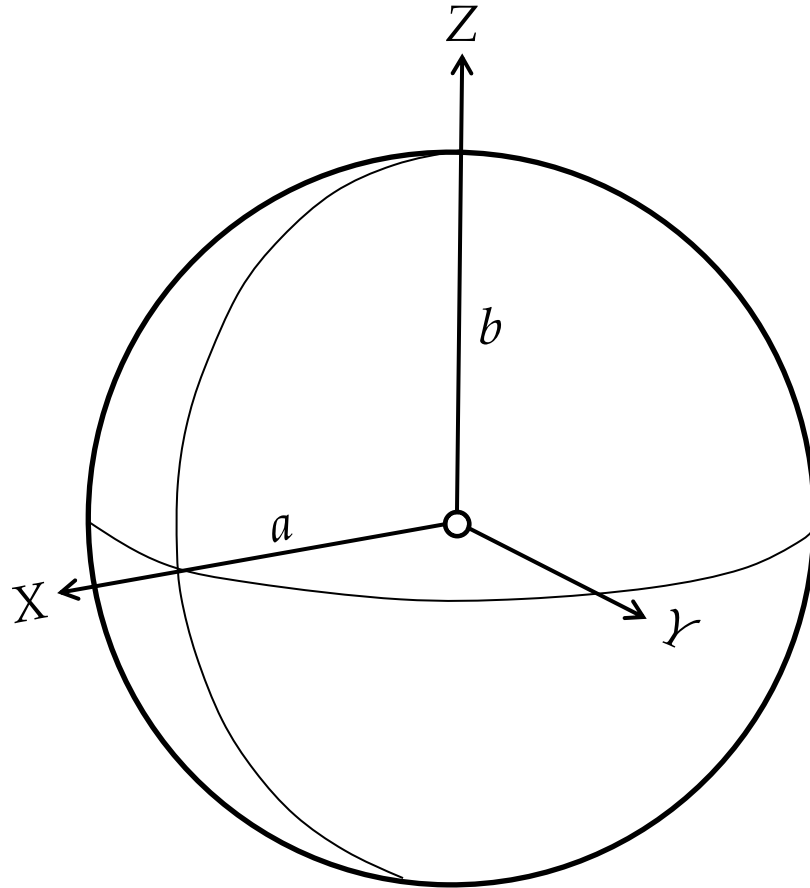
$$\rightarrow f'(\varphi) / R = R / R \cos \varphi$$

$$\rightarrow f'(\varphi) = R / \cos \varphi$$

$$\rightarrow f(\varphi) = R \ln \tan(\varphi/2 + \pi/4)$$

Winkeltreue

Länge λ und Breite φ

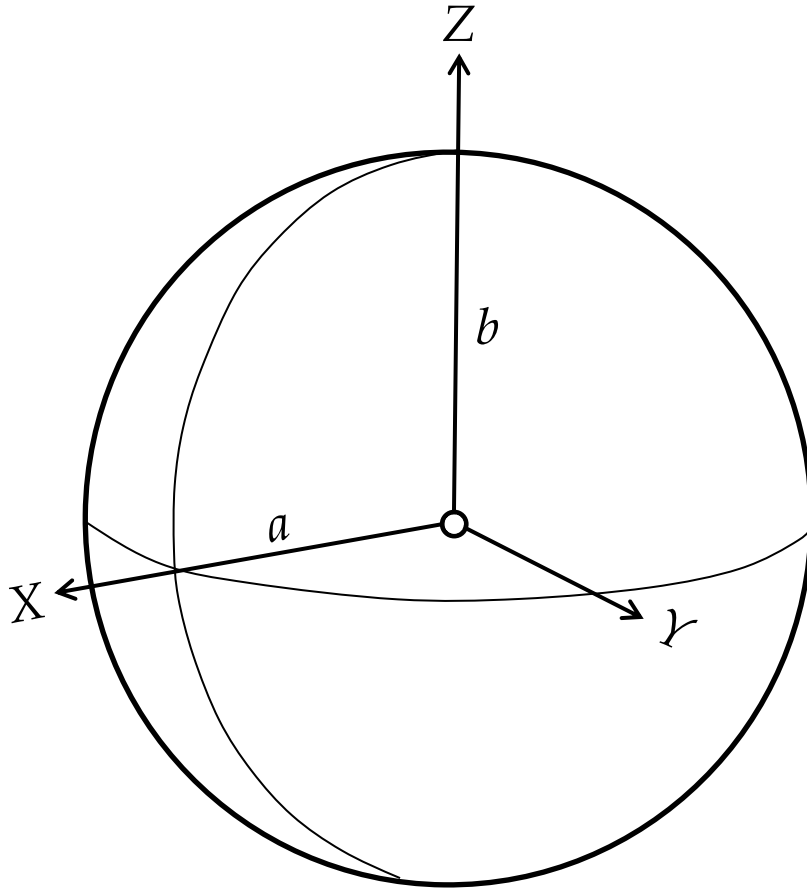


Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\Rightarrow f(\varphi) = R \ln \tan(\varphi/2 + \pi/4)$$

Winkeltreue

Länge λ und Breite φ



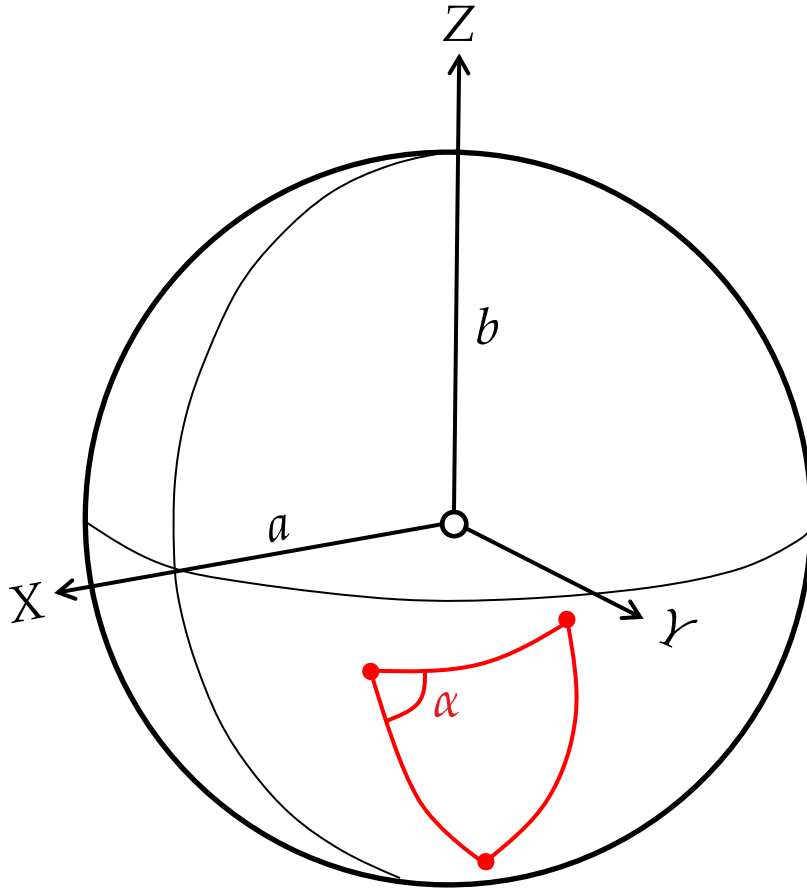
Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\Rightarrow f(\varphi) = R \ln \tan(\varphi/2 + \pi/4)$$

Achtung: Winkel haben gleiches Verhältnis, sind aber nicht gleich!

Winkeltreue

Länge λ und Breite φ



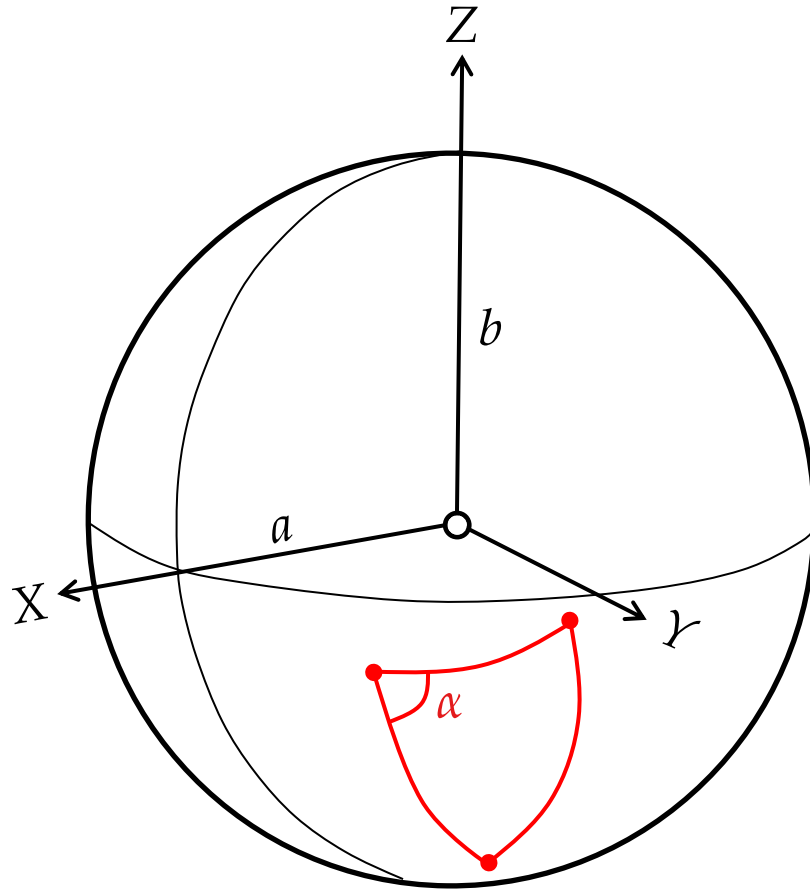
Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\Rightarrow f(\varphi) = R \ln \tan(\varphi/2 + \pi/4)$$

Achtung: Winkel haben gleiches Verhältnis, sind aber nicht gleich!

Winkeltreue

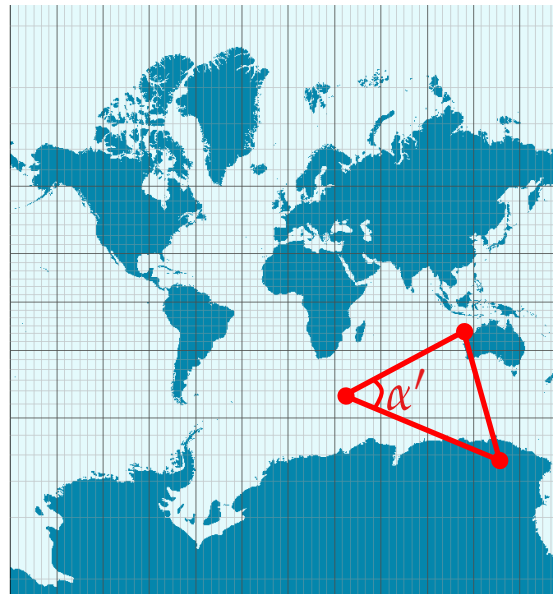
Länge λ und Breite φ



Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

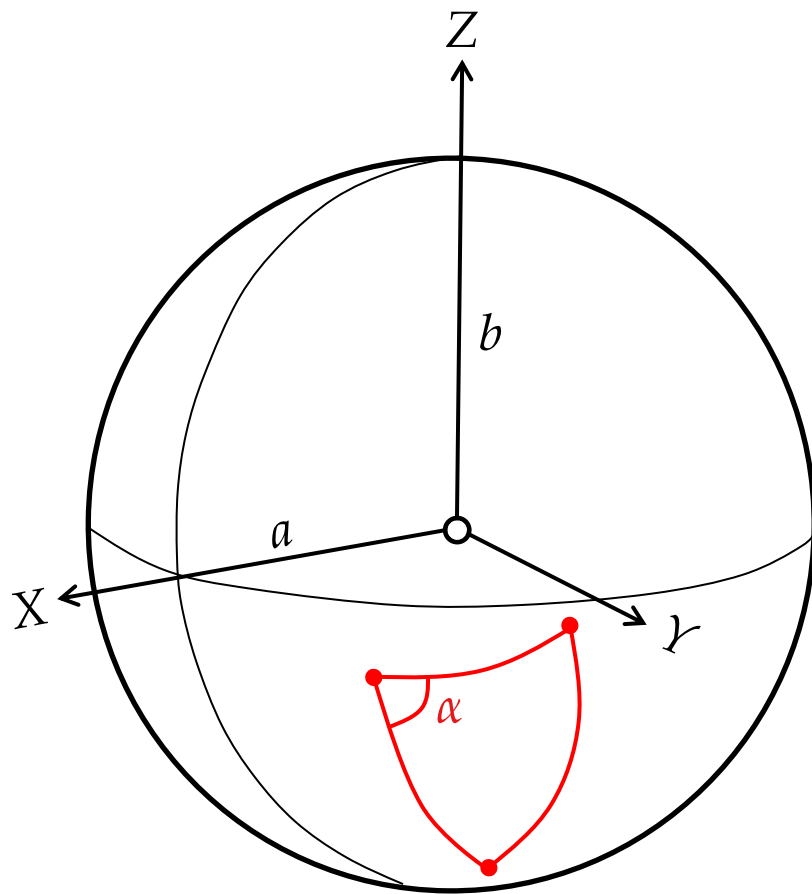
$$\Rightarrow f(\varphi) = R \ln \tan(\varphi/2 + \pi/4)$$

Achtung: Winkel haben gleiches Verhältnis, sind aber nicht gleich!



Winkeltreue

Länge λ und Breite φ



Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\rightarrow f(\varphi) = R \ln \tan(\varphi/2 + \pi/4)$$

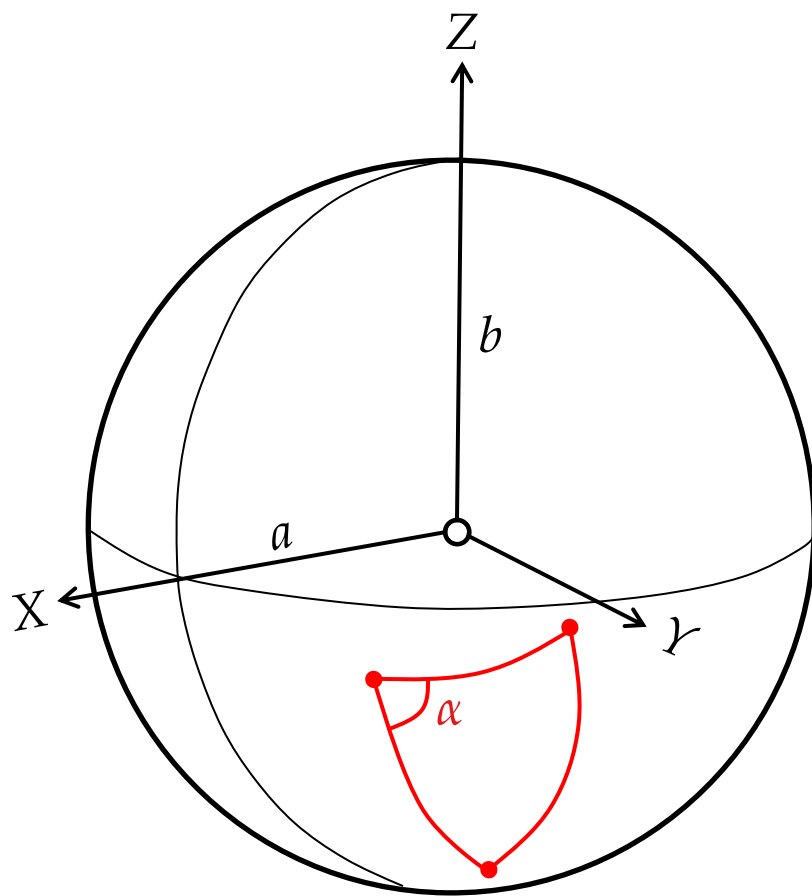
Achtung: Winkel haben gleiches Verhältnis, sind aber nicht gleich!



Winkelsumme
auf der Sphäre
ist anders als
in der Ebene

Winkeltreue

Länge λ und Breite φ



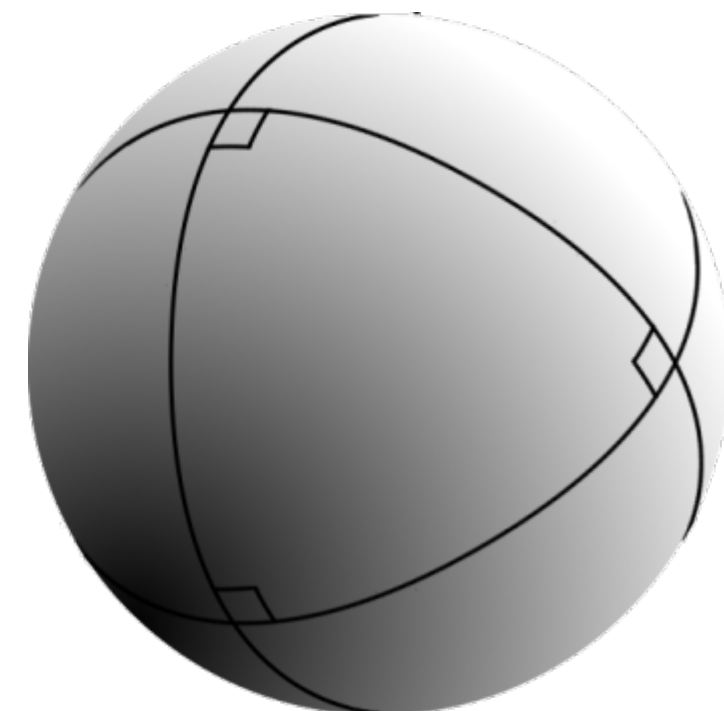
Ziel: Konformität: Gleiches Seitenverhältnis der aufgespannten Rechtecke

$$\rightarrow f(\varphi) = R \ln \tan(\varphi/2 + \pi/4)$$

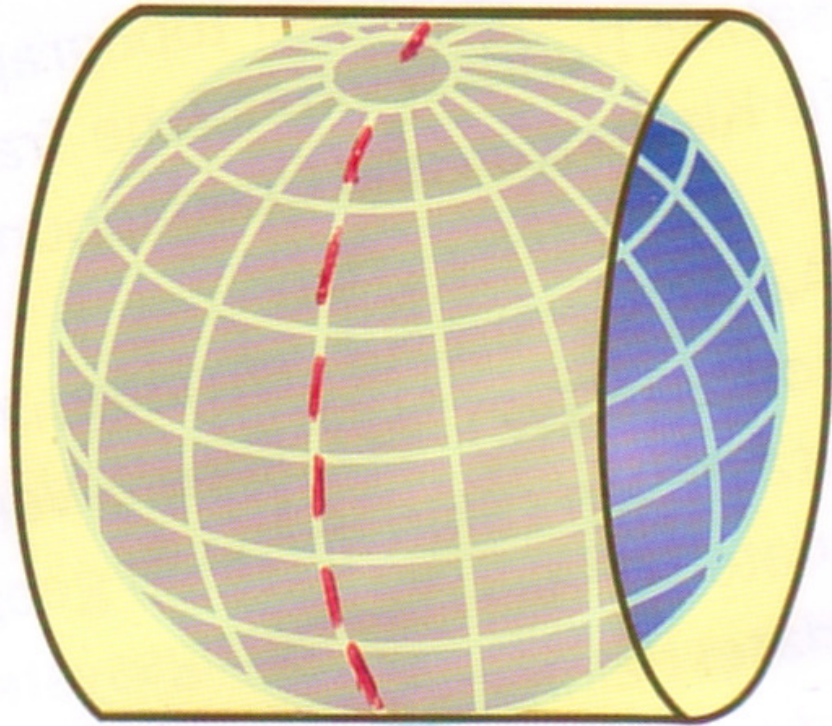
Achtung: Winkel haben gleiches Verhältnis, sind aber nicht gleich!



Winkelsumme auf der Sphäre ist anders als in der Ebene

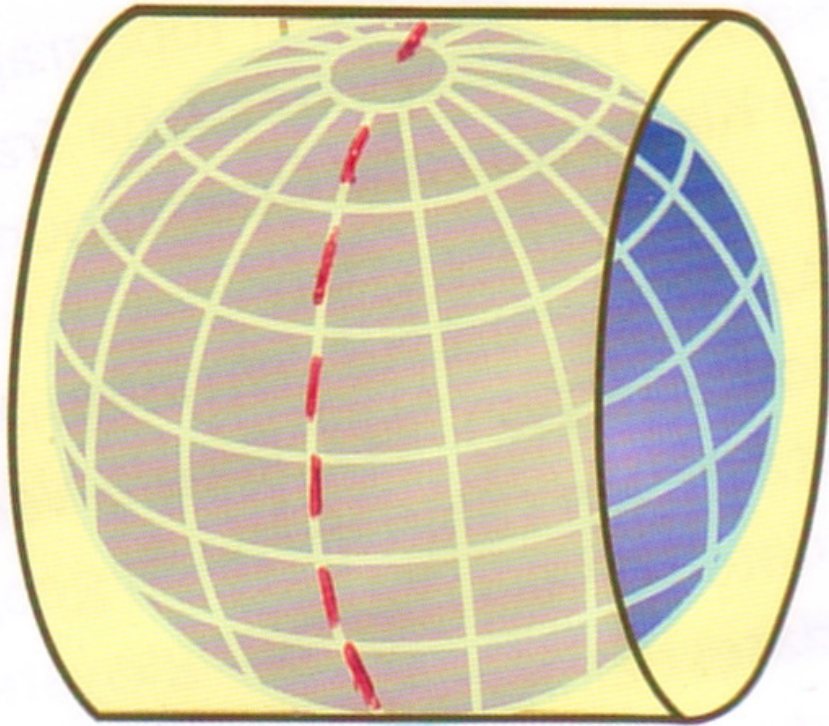


Variante 1: Transversale Lage



Johann Heinrich Lambert
1728–1777

Variante 1: Transversale Lage

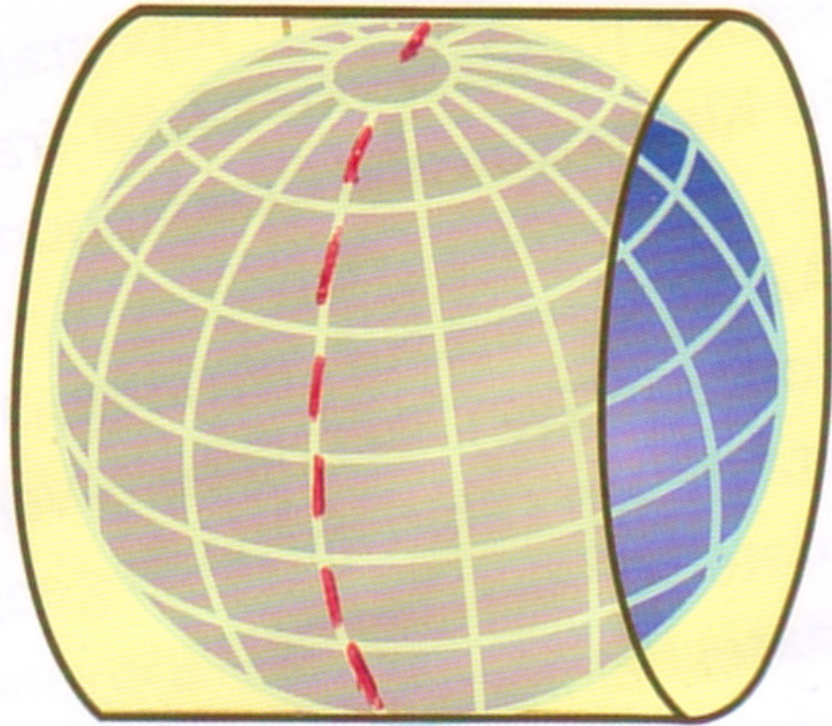


■ Liegender Zylinder



Johann Heinrich Lambert
1728–1777

Variante 1: Transversale Lage

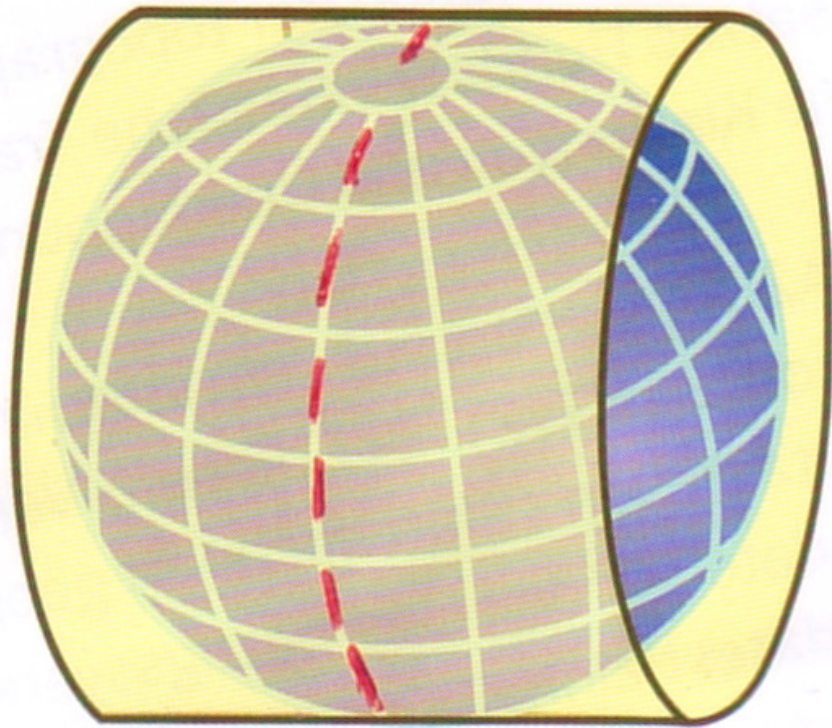


- Liegender Zylinder
- Mittelmeridian kann beliebig gewählt werden

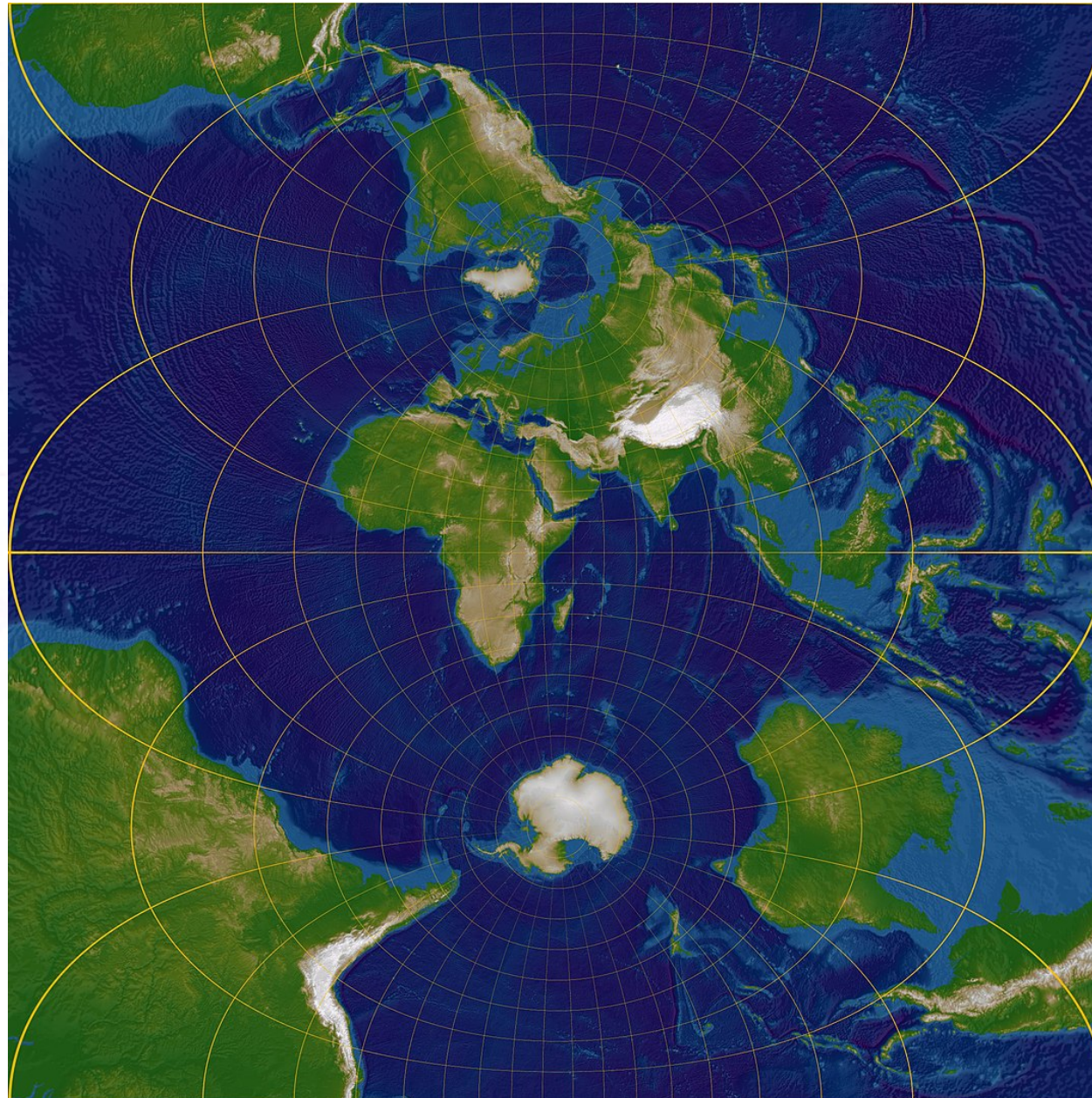


Johann Heinrich Lambert
1728–1777

Variante 1: Transversale Lage

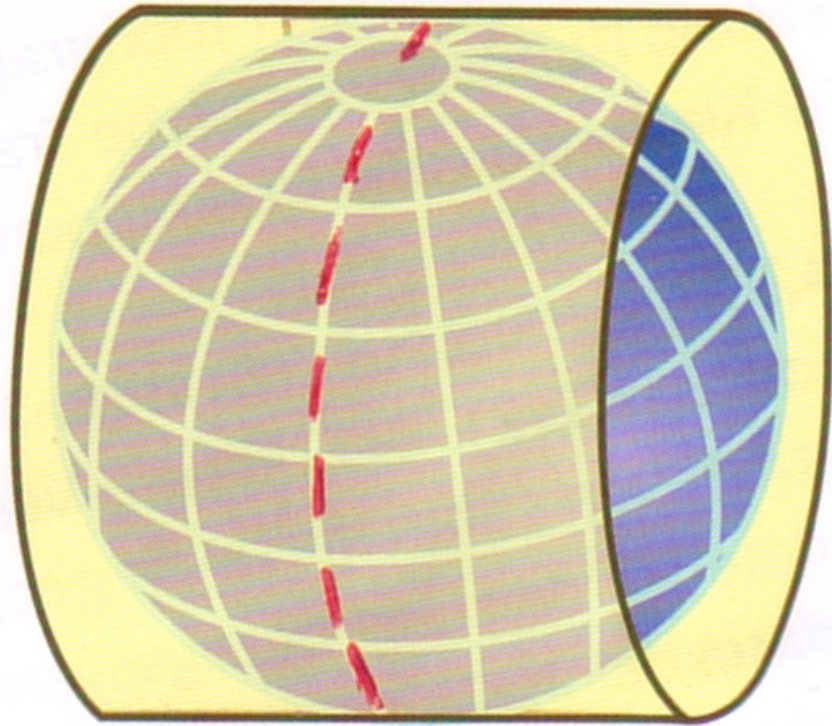


- Liegender Zylinder
- Mittelmeridian kann beliebig gewählt werden

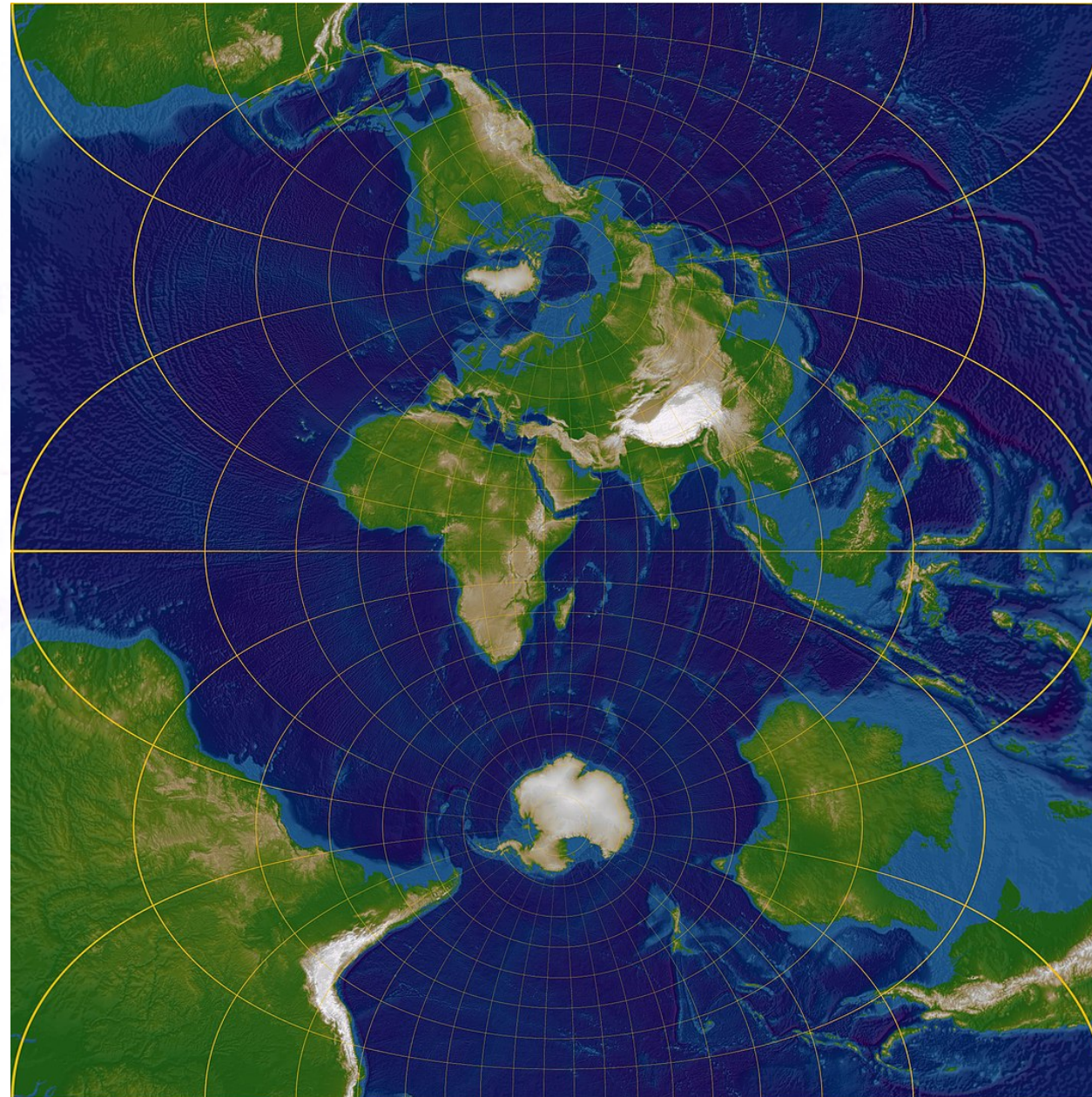


Johann Heinrich Lambert
1728–1777

Variante 1: Transversale Lage



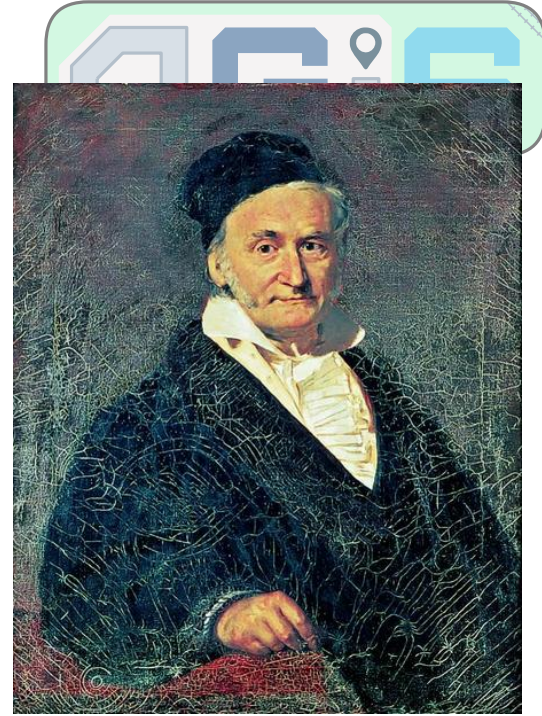
- Liegender Zylinder
- Mittelmeridian kann beliebig gewählt werden



Johann Heinrich Lambert
1728–1777

Starke
Verzerrung
entfernt von
Mittelmeridian

Variante 2: Gauß-Krüger-Koordinatensystem



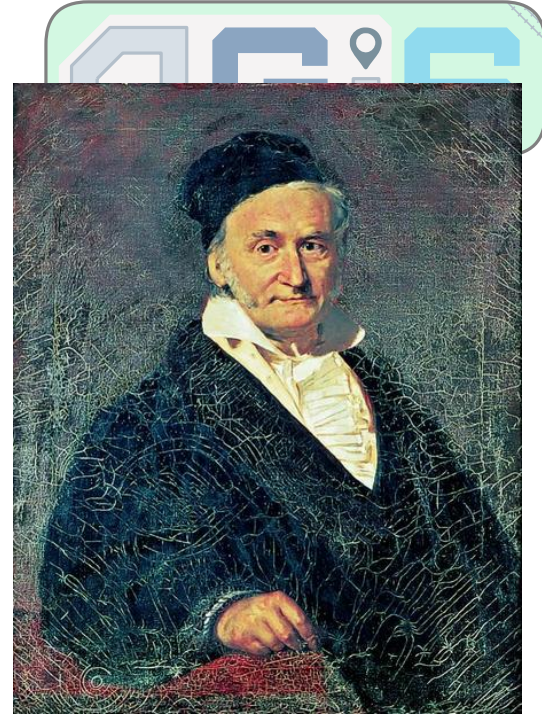
Johann Carl Friedrich Gauß
1777–1855



Johann Heinrich Louis Krüger
1857–1923

Variante 2: Gauß-Krüger-Koordinatensystem

- Erde wird in 3° breite Streifen unterteilt



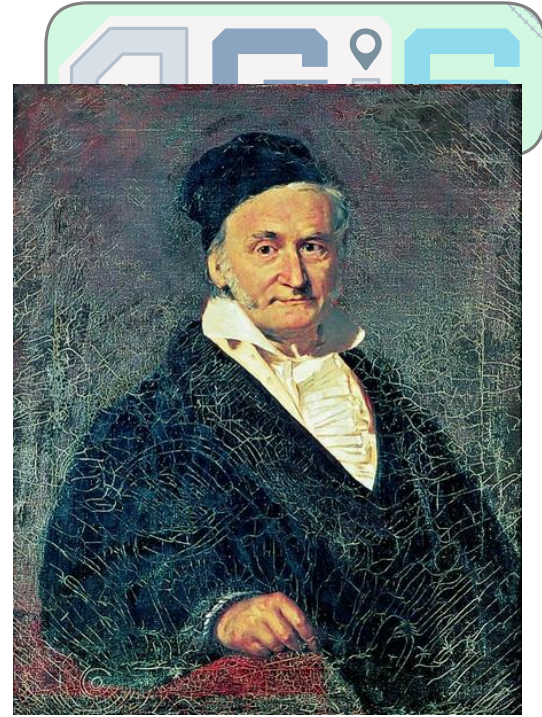
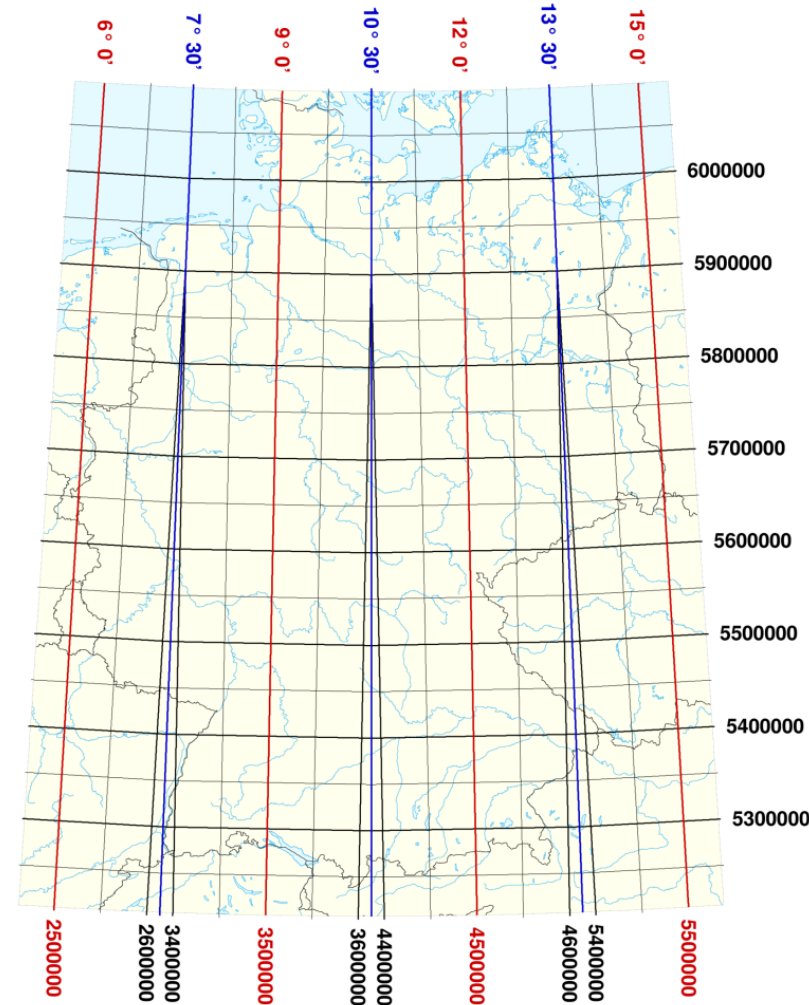
Johann Carl Friedrich Gauß
1777–1855



Johann Heinrich Louis Krüger
1857–1923

Variante 2: Gauß-Krüger-Koordinatensystem

- Erde wird in 3° breite Streifen unterteilt



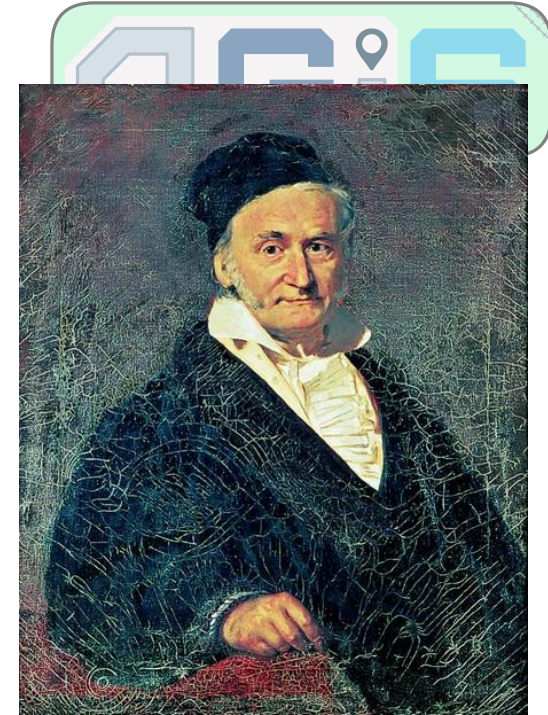
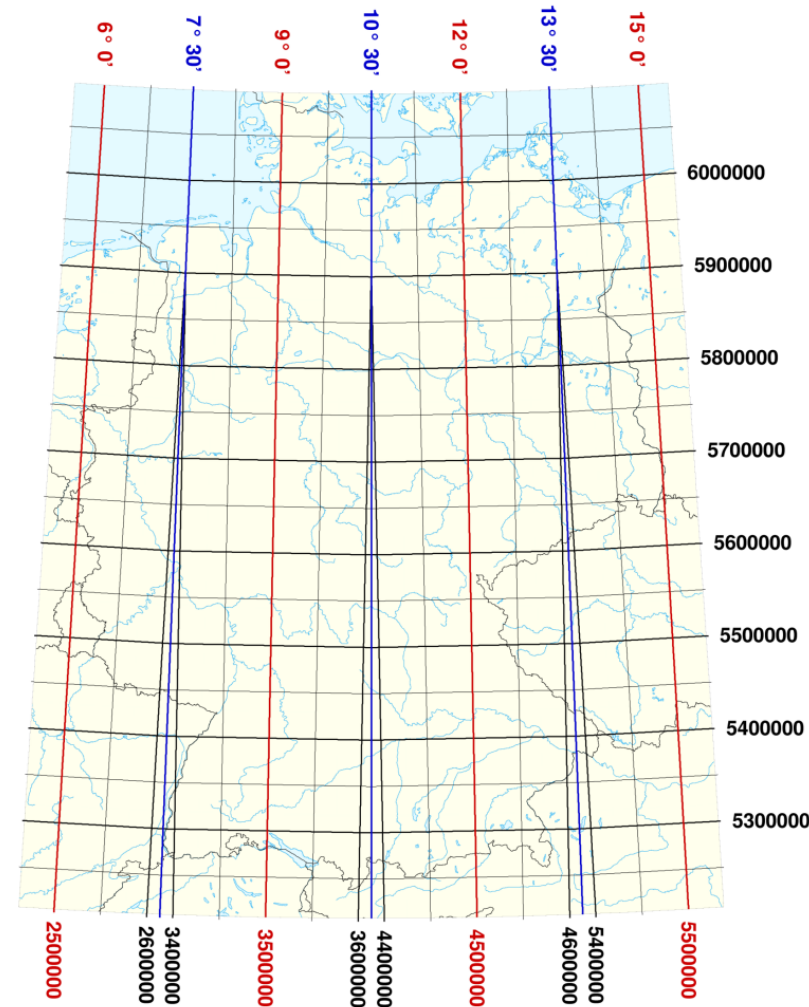
Johann Carl Friedrich Gauß
1777–1855



Johann Heinrich Louis Krüger
1857–1923

Variante 2: Gauß-Krüger-Koordinatensystem

- Erde wird in 3° breite Streifen unterteilt
- Jeder Streifen wird mit einer transversalen Mercatorprojektion abgebildet (Mittelmeridian = Streifenzentrum)



Johann Carl Friedrich Gauß
1777–1855

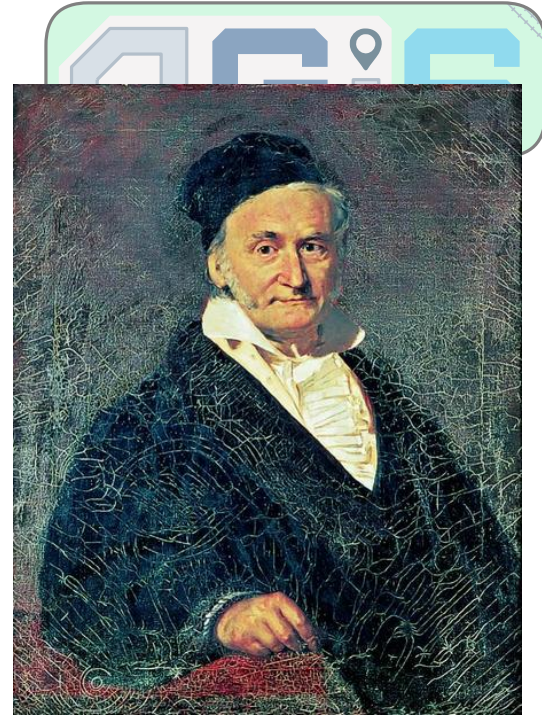
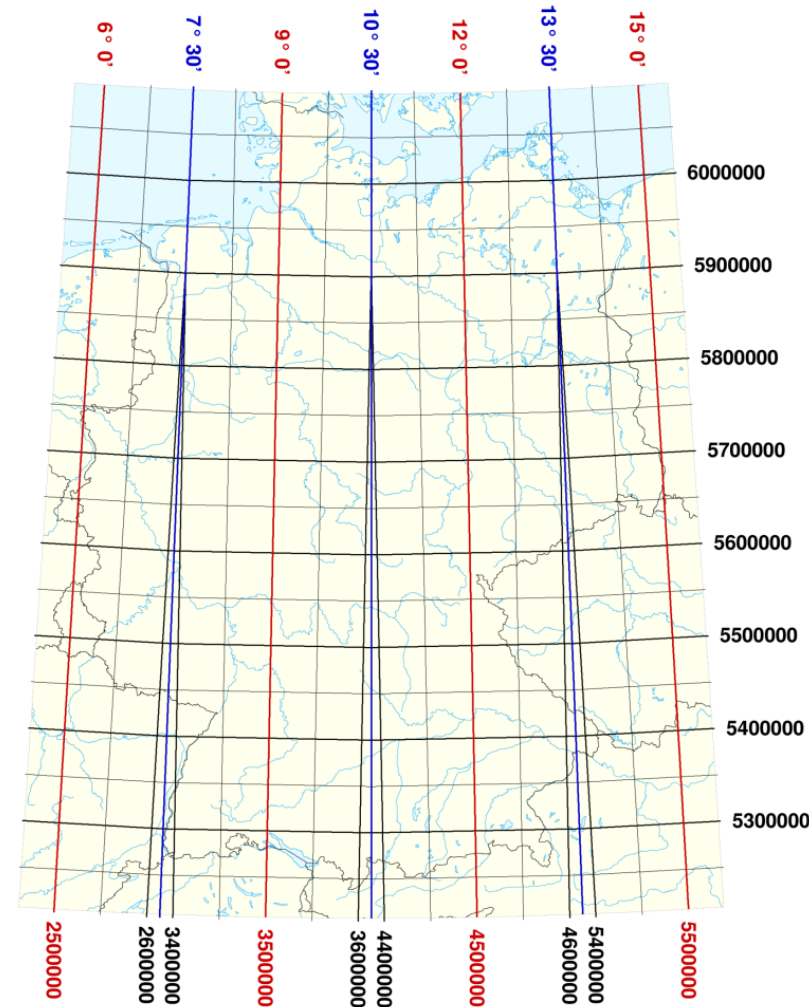


Johann Heinrich Louis Krüger
1857–1923

Variante 2: Gauß-Krüger-Koordinatensystem

- Erde wird in 3° breite Streifen unterteilt
- Jeder Streifen wird mit einer transversalen Mercatorprojektion abgebildet (Mittelmeridian = Streifenzentrum)

Verwendung:



Johann Carl Friedrich Gauß
1777–1855



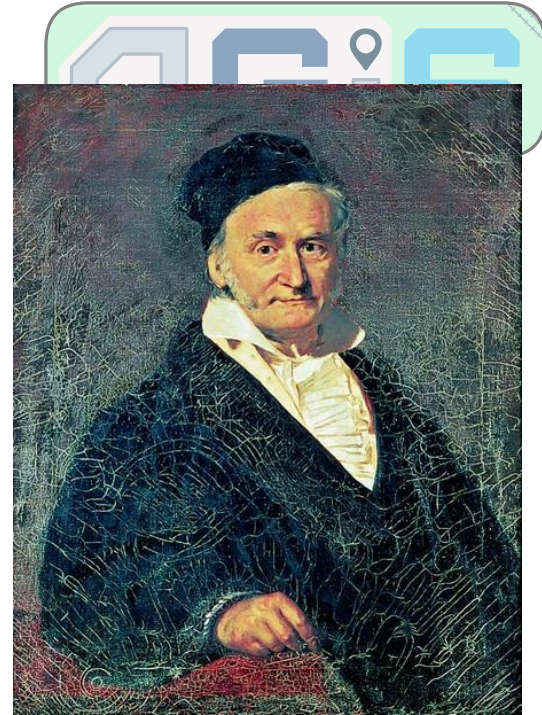
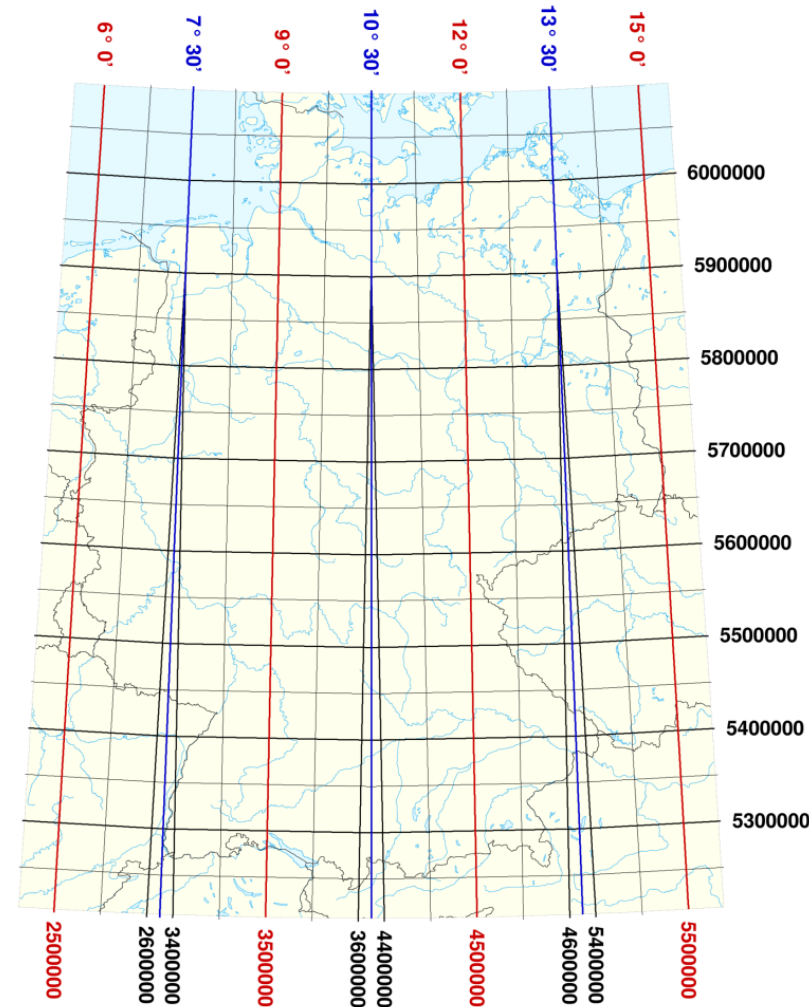
Johann Heinrich Louis Krüger
1857–1923

Variante 2: Gauß-Krüger-Koordinatensystem

- Erde wird in 3° breite Streifen unterteilt
- Jeder Streifen wird mit einer transversalen Mercatorprojektion abgebildet (Mittelmeridian = Streifenzentrum)

Verwendung:

- Deutsche Landesvermessungen (mit Potsdam-Datum)



Johann Carl Friedrich Gauß
1777–1855



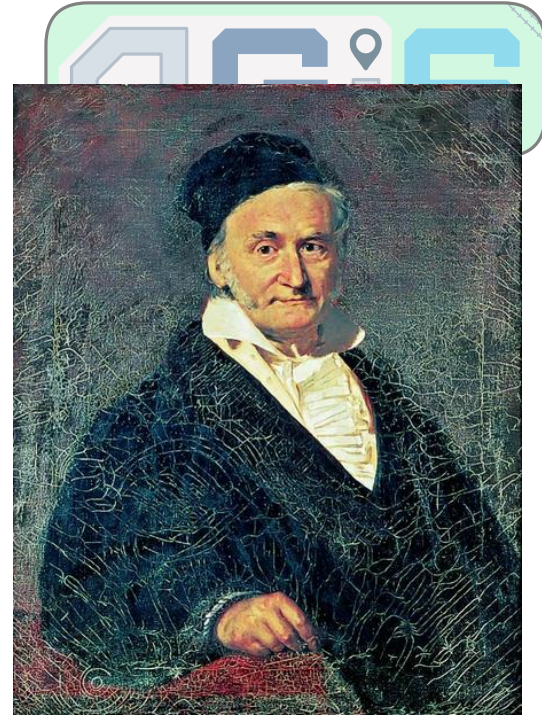
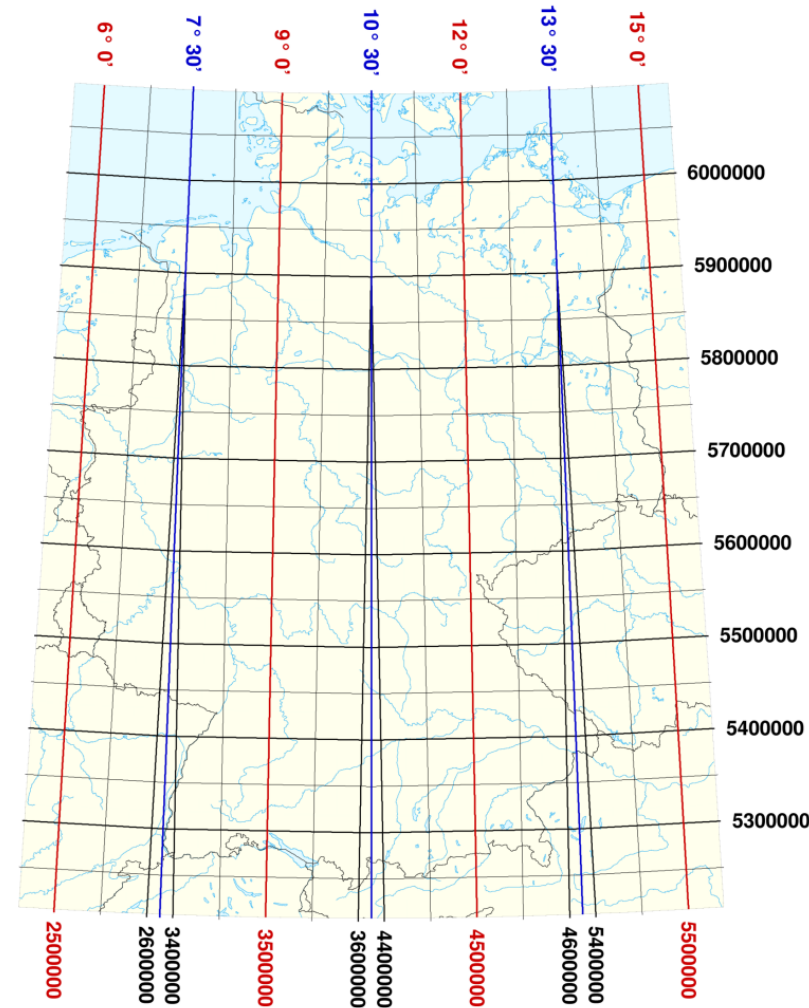
Johann Heinrich Louis Krüger
1857–1923

Variante 2: Gauß-Krüger-Koordinatensystem

- Erde wird in 3° breite Streifen unterteilt
- Jeder Streifen wird mit einer transversalen Mercatorprojektion abgebildet (Mittelmeridian = Streifenzentrum)

Verwendung:

- Deutsche Landesvermessungen (mit Potsdam-Datum)
- Ab 1991 durch **UTM** abgelöst



Johann Carl Friedrich Gauß
1777–1855



Johann Heinrich Louis Krüger
1857–1923

Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger

Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger
- Streifenbreite 6°

Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger
- Streifenbreite 6°
- Projektionszylinder schneidet Erdball an zwei parallel verlaufenden Durchdringungskreisen, sodass ein streifenförmiger Teil des Erdballs aus der Zylinderoberfläche herausragt

Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger
- Streifenbreite 6°
- Projektionszylinder schneidet Erdball an zwei parallel verlaufenden Durchdringungskreisen, sodass ein streifenförmiger Teil des Erdballs aus der Zylinderoberfläche herausragt



Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger
- Streifenbreite 6°
- Projektionszylinder schneidet Erdball an zwei parallel verlaufenden Durchdringungskreisen, sodass ein streifenförmiger Teil des Erdballs aus der Zylinderoberfläche herausragt
- ➔ Weniger Verzerrung auf die gesamte Breite des Streifens bezogen



Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger
- Streifenbreite 6°
- Projektionszylinder schneidet Erdball an zwei parallel verlaufenden Durchdringungskreisen, sodass ein streifenförmiger Teil des Erdballs aus der Zylinderoberfläche herausragt
- ➔ Weniger Verzerrung auf die gesamte Breite des Streifens bezogen

Verwendung:



Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger
- Streifenbreite 6°
- Projektionszylinder schneidet Erdball an zwei parallel verlaufenden Durchdringungskreisen, sodass ein streifenförmiger Teil des Erdballs aus der Zylinderoberfläche herausragt
- ➔ Weniger Verzerrung auf die gesamte Breite des Streifens bezogen

Verwendung:

- GPS-Koordinaten (WGS84)



Variante 3: Universal Transversal Mercator (UTM)



- Prinzip wie Gauß-Krüger
- Streifenbreite 6°
- Projektionszylinder schneidet Erdball an zwei parallel verlaufenden Durchdringungskreisen, sodass ein streifenförmiger Teil des Erdballs aus der Zylinderoberfläche herausragt
- ➔ Weniger Verzerrung auf die gesamte Breite des Streifens bezogen

Verwendung:

- GPS-Koordinaten (WGS84)
- Deutsche Landesvermessungen (ETRS89)

