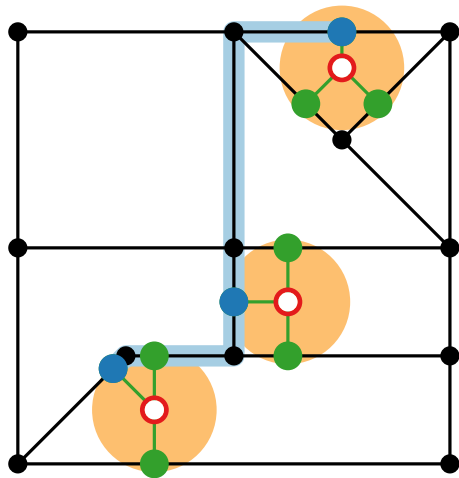
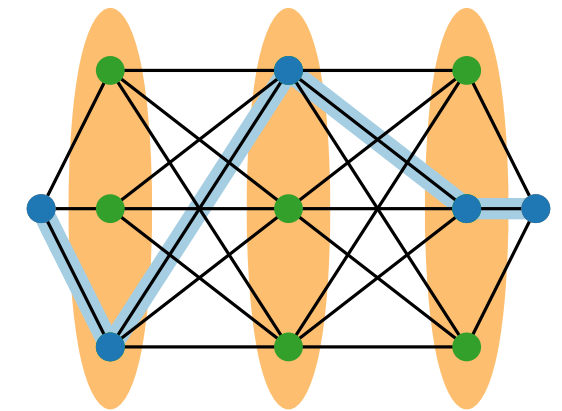


Algorithmen für geographische Informationssysteme

4. Vorlesung Map Matching Algorithmen



Teil I:
Map Matching mit
Fréchet Distanz

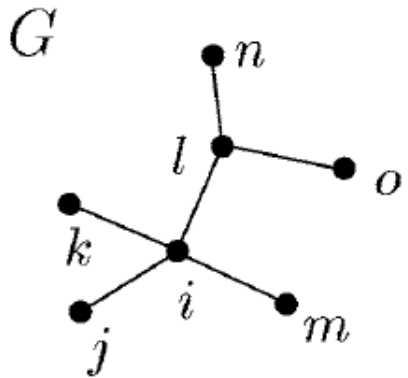


Map Matching mit Fréchet Distance



Optimierungsproblem:

Gegeben ein geometrischer Graph G und ein Linienzug P ,
finde einen Pfad in G mit minimaler Fréchet Distanz zu P .





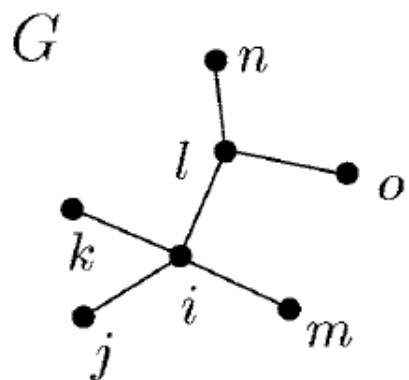
Map Matching mit Fréchet Distance

Optimierungsproblem:

Gegeben ein geometrischer Graph G und ein Linienzug P ,
finde einen Pfad in G mit minimaler Fréchet Distanz zu P .

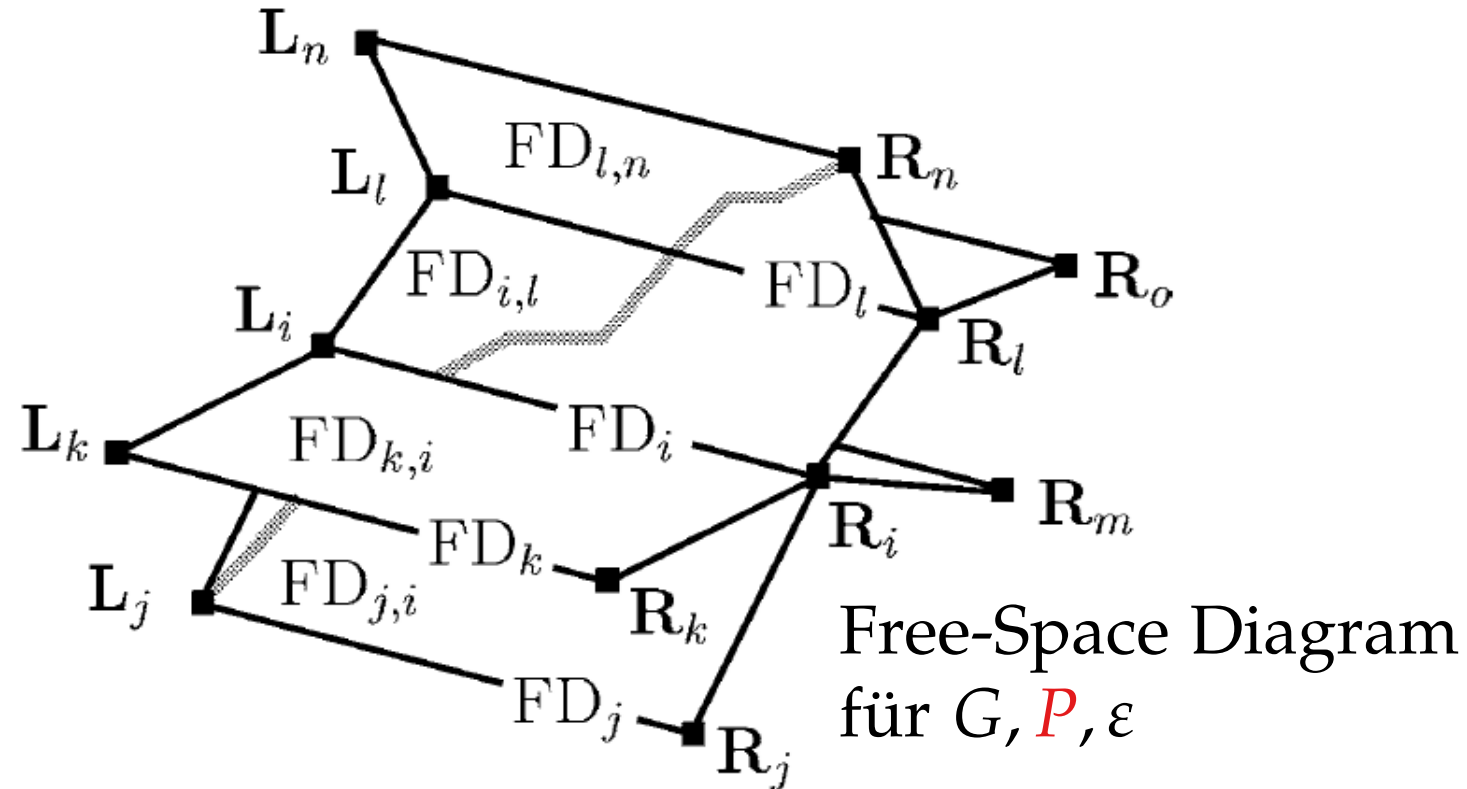
Entscheidungsproblem:

Gegeben G , P und ε , gibt es einen Pfad Q in G mit $d_F(P, Q) \leq \varepsilon$?

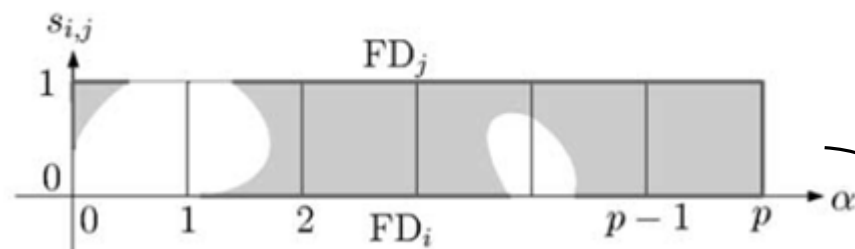


Optimierungsproblem:

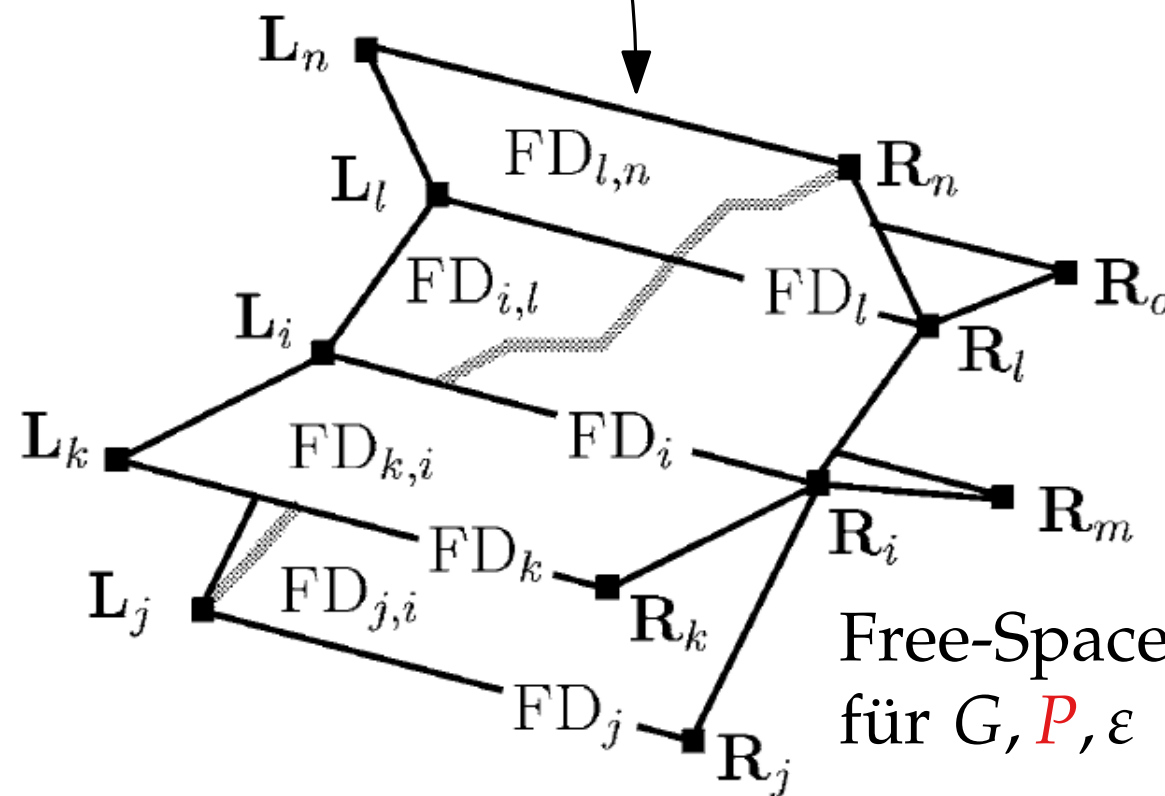
Entscheidungsproblem:



Map Matching mit Fréchet Distance



Free-Space Diagram für P, ε und eine Kante von G



Free-Space Diagram für G, P, ε

Map Matching mit Fréchet Distance



Gehe ähnlich wie DIJKSTRA vor:

Map Matching mit Fréchet Distance



Gehe ähnlich wie DIJKSTRA vor:

- Finde immer den ersten Punkt (von links nach rechts), der erreichbar ist.

Map Matching mit Fréchet Distance



Gehe ähnlich wie DIJKSTRA vor:

- Finde immer den ersten Punkt (von links nach rechts), der erreichbar ist.
- Dann betrachte anliegende Zellen und update ihren erreichbaren Punkte, wenn möglich.



Map Matching mit Fréchet Distance

Gehe ähnlich wie DIJKSTRA vor:

- Finde immer den ersten Punkt (von links nach rechts), der erreichbar ist.
- Dann betrachte anliegende Zellen und update ihren erreichbaren Punkte, wenn möglich.
- Laufzeit für Entscheidungsproblem: $\mathcal{O}(mp \log m)$



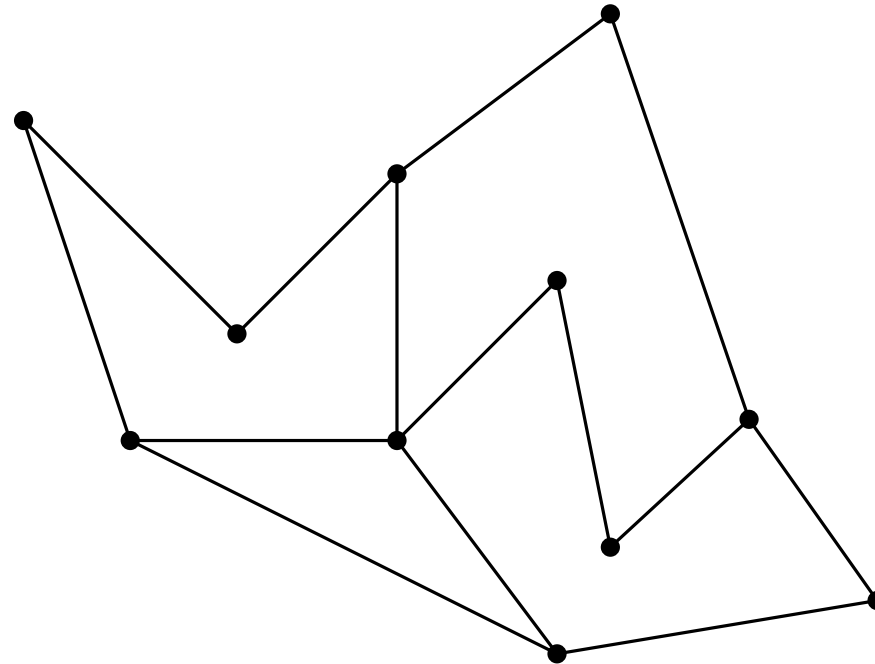
Map Matching mit Fréchet Distance

Gehe ähnlich wie DIJKSTRA vor:

- Finde immer den ersten Punkt (von links nach rechts), der erreichbar ist.
- Dann betrachte anliegende Zellen und update ihren erreichbaren Punkte, wenn möglich.
- Laufzeit für Entscheidungsproblem: $\mathcal{O}(mp \log m)$
- Laufzeit für Optimierungsproblem: $O(mp \log m \log mp)$

[Alt et al. 2003: Matching Planar Maps, J. Algorithm., 49:262–283]

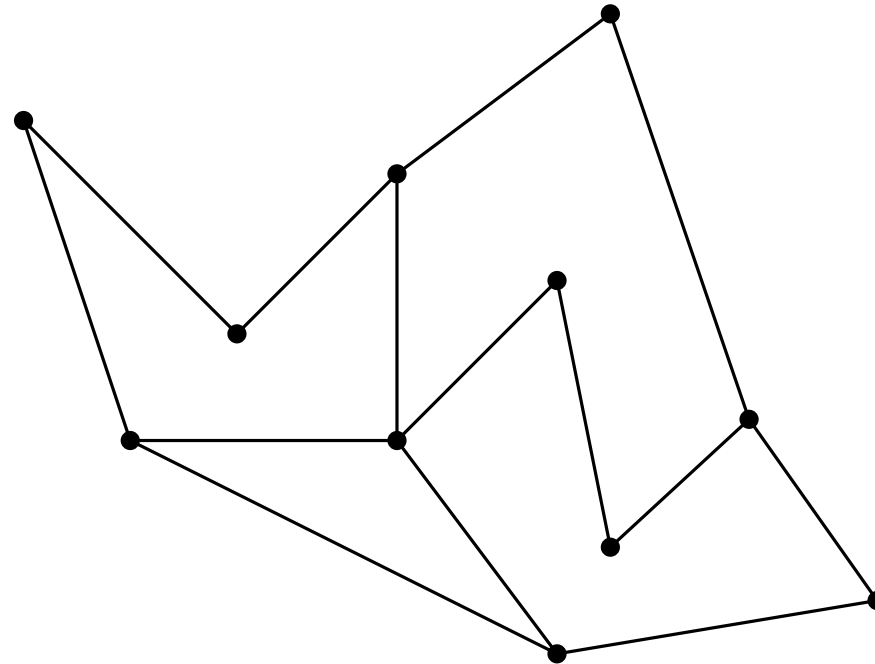
Problem



Problem



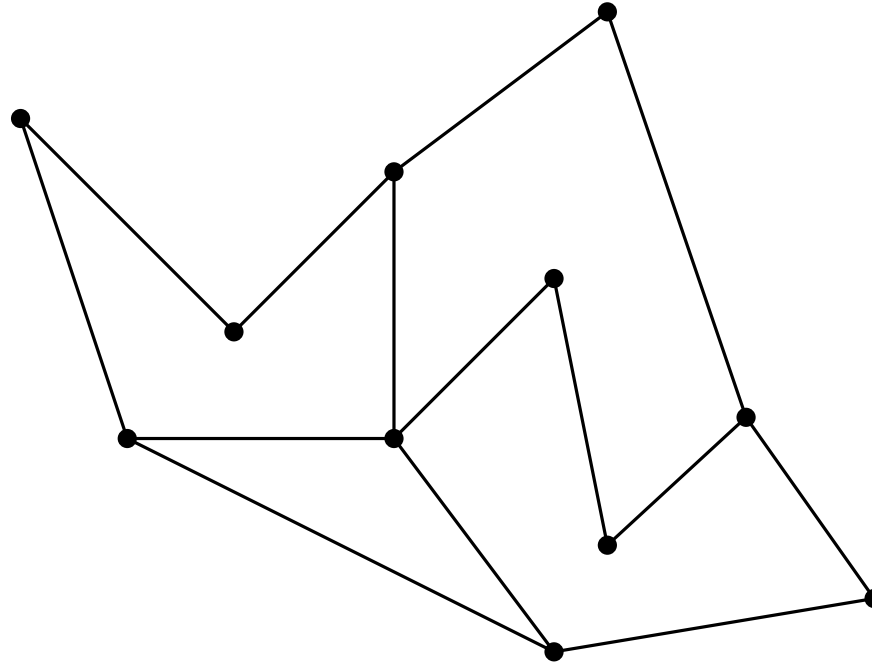
GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.



Problem



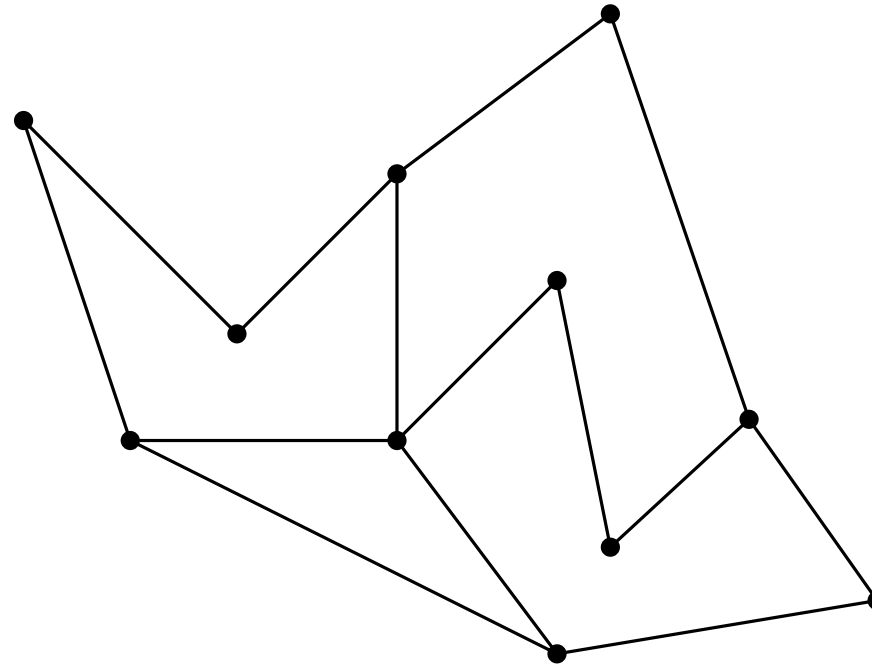
GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.
z.B. [Lou et al.: Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories, ACM GIS '09]:



Problem



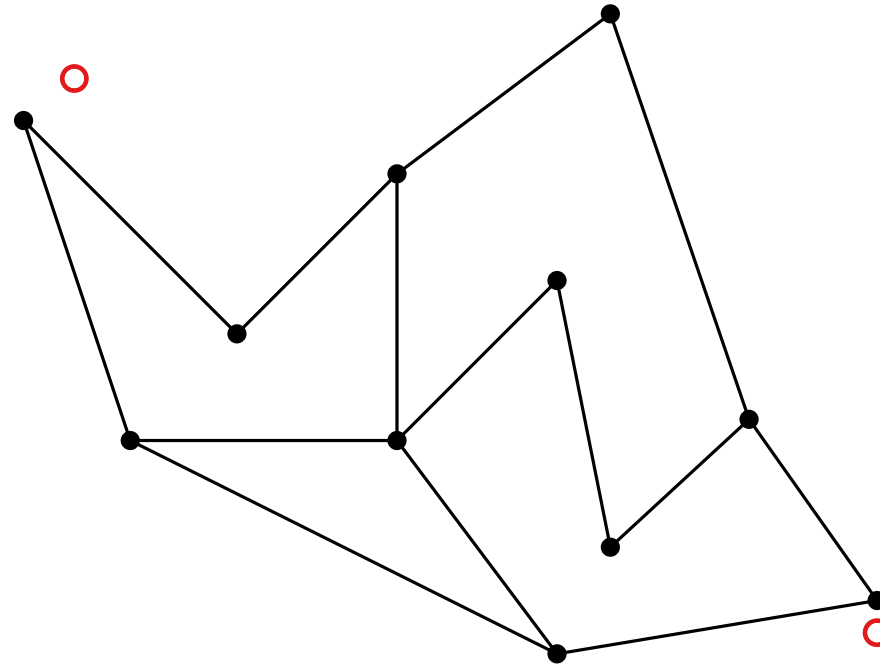
GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.
z.B. [Lou et al.: Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories, ACM GIS '09]:
Ein Punkt etwa alle zwei Minuten (z.B. zur Aufzeichnung & Analyse von Taxirouten)



Problem



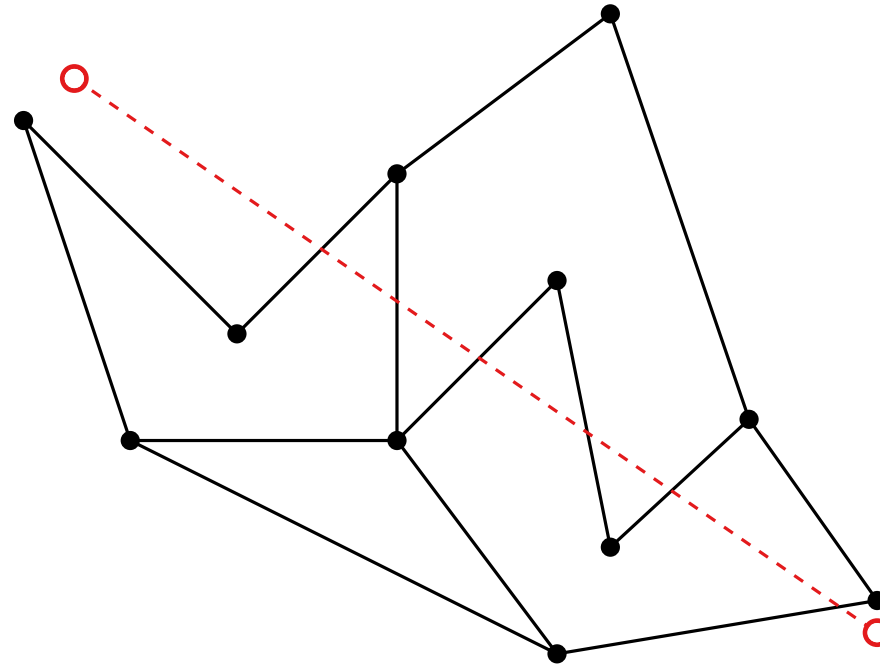
GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.
z.B. [Lou et al.: Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories, ACM GIS '09]:
Ein Punkt etwa alle zwei Minuten (z.B. zur Aufzeichnung & Analyse von Taxirouten)





Problem

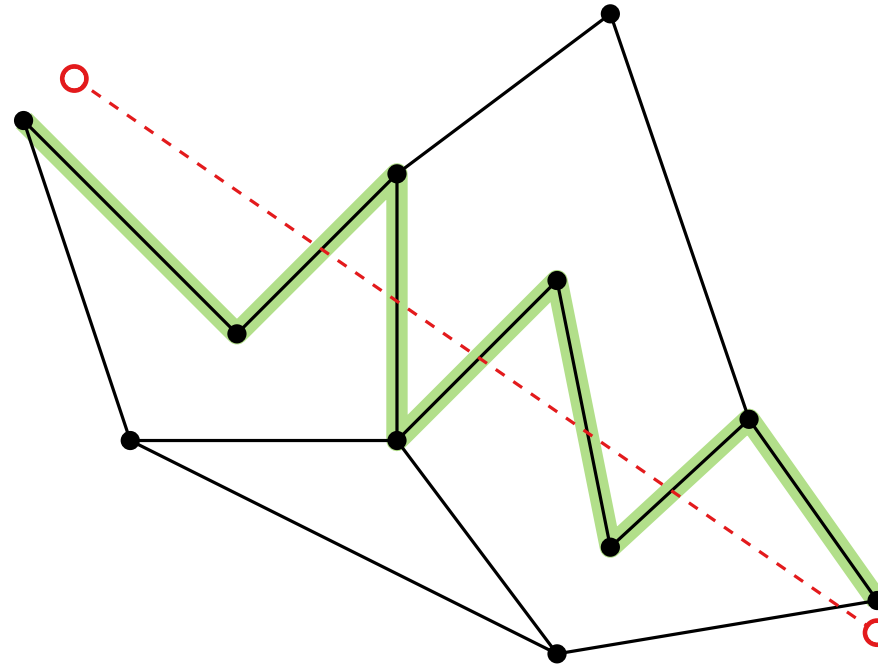
GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.
z.B. [Lou et al.: Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories, ACM GIS '09]:
Ein Punkt etwa alle zwei Minuten (z.B. zur Aufzeichnung & Analyse von Taxirouten)





Problem

GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.
z.B. [Lou et al.: Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories, ACM GIS '09]:
Ein Punkt etwa alle zwei Minuten (z.B. zur Aufzeichnung & Analyse von Taxirouten)

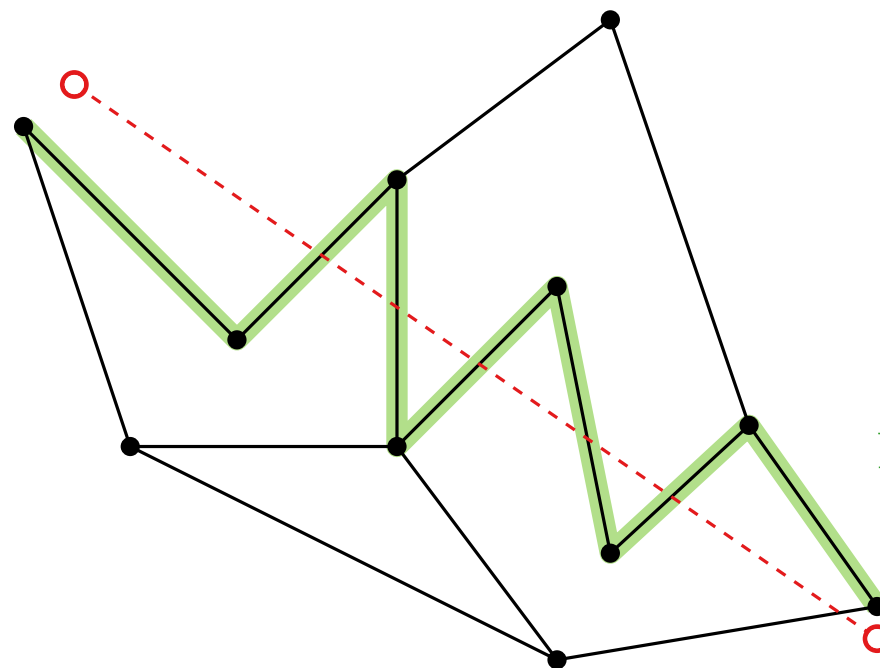


Ergebnis mit minimaler Fréchet-Distanz



Problem

GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.
z.B. [Lou et al.: Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories, ACM GIS '09]:
Ein Punkt etwa alle zwei Minuten (z.B. zur Aufzeichnung & Analyse von Taxirouten)



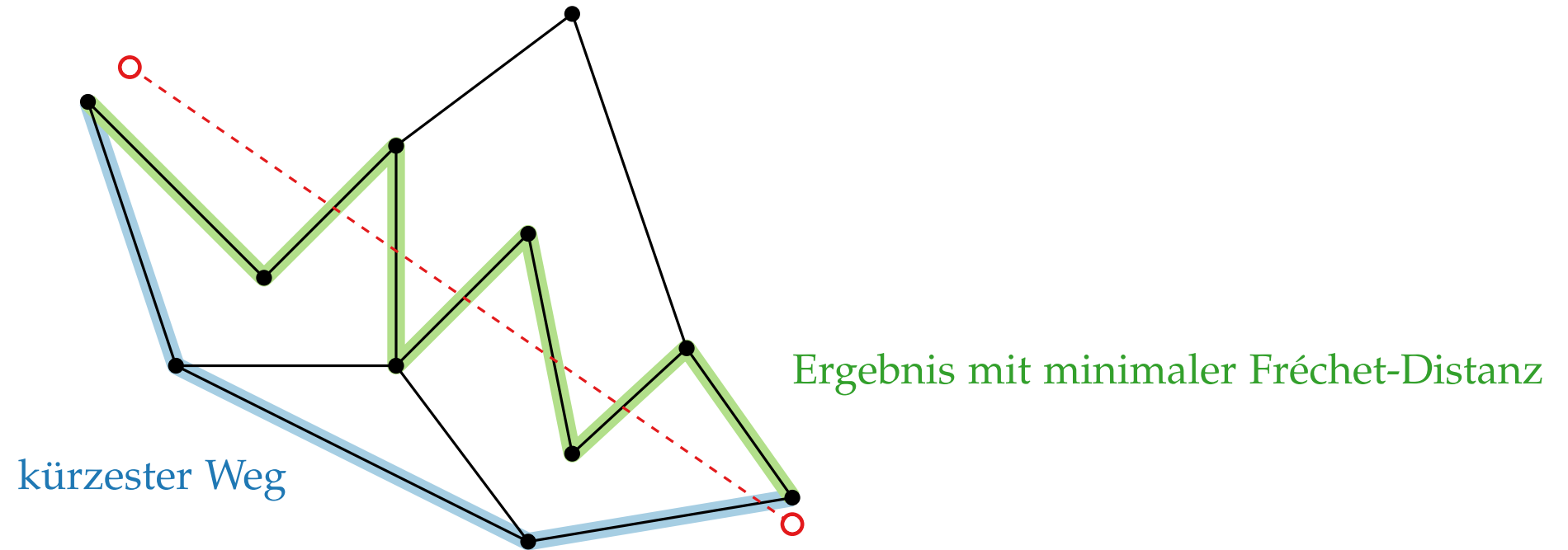
Ergebnis mit minimaler Fréchet-Distanz

Fahrer wählen bevorzugt **kürzeste Wege** im Straßennetz.



Problem

GPS-Punkte der Trajektorie weisen häufig einen relativ großen Abstand zueinander auf.
z.B. [Lou et al.: Map-Matching for Low-Sampling-Rate GPS Trajectories, ACM GIS '09]:
Ein Punkt etwa alle zwei Minuten (z.B. zur Aufzeichnung & Analyse von Taxirouten)

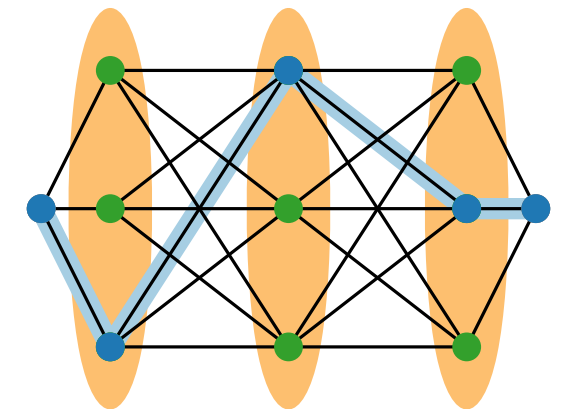
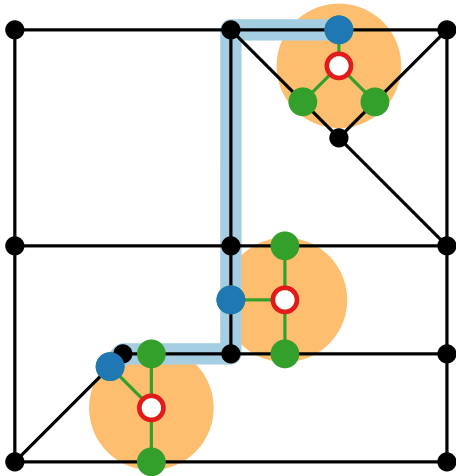


Fahrer wählen bevorzugt **kürzeste Wege** im Straßennetz.

Algorithmen für geographische Informationssysteme

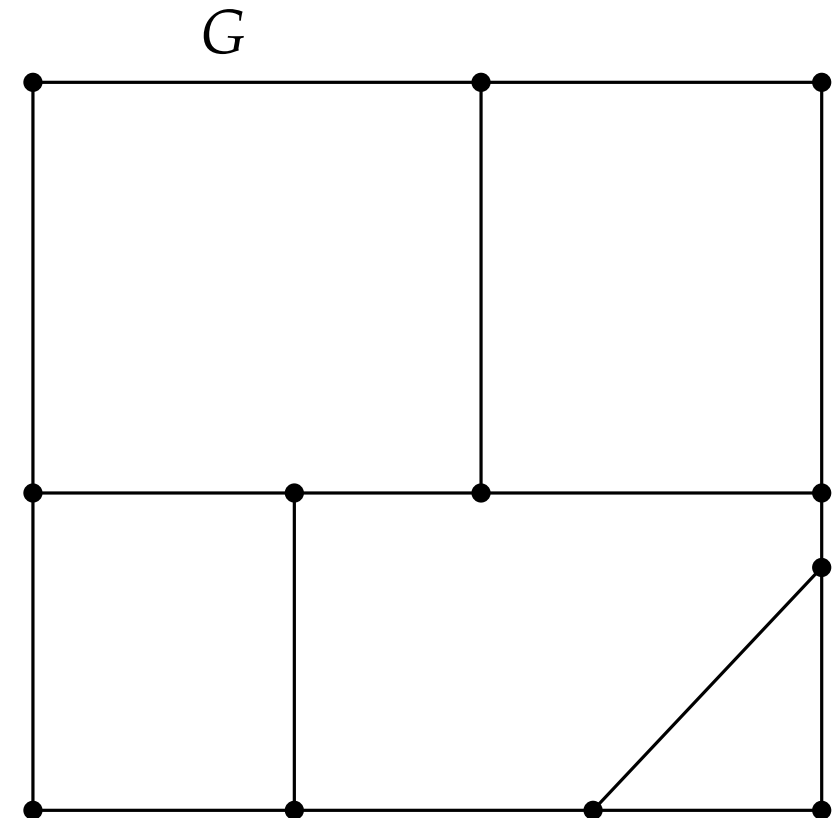
4. Vorlesung Map Matching Algorithmen

Teil II: Andere Ansätze



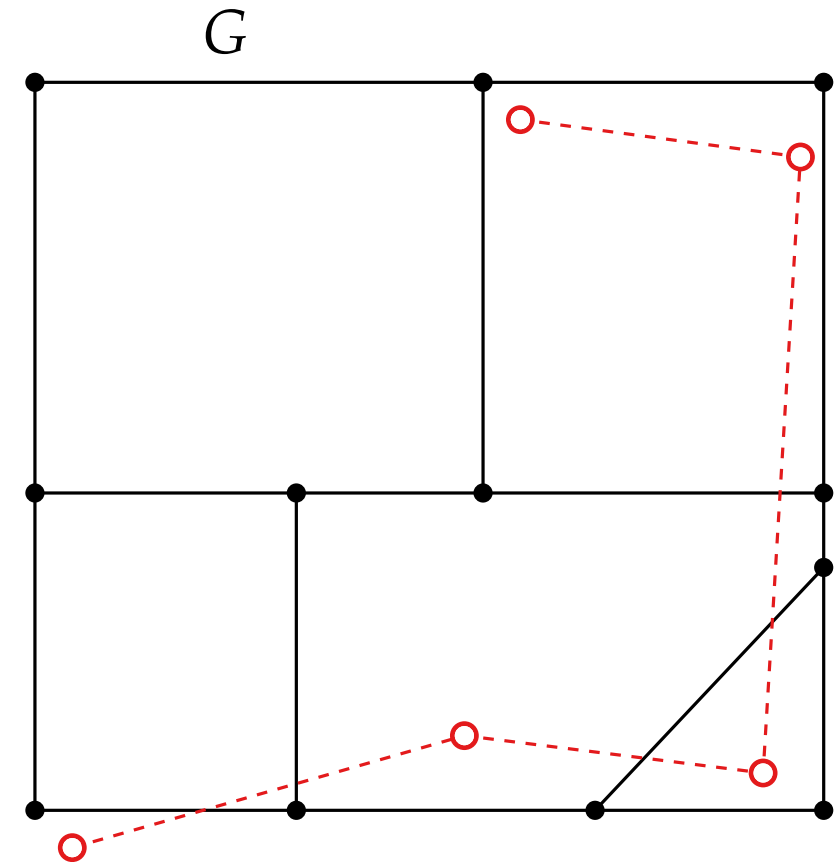
Dalumpines & Scott (2011)

6 - 1



Dalumpines & Scott (2011)

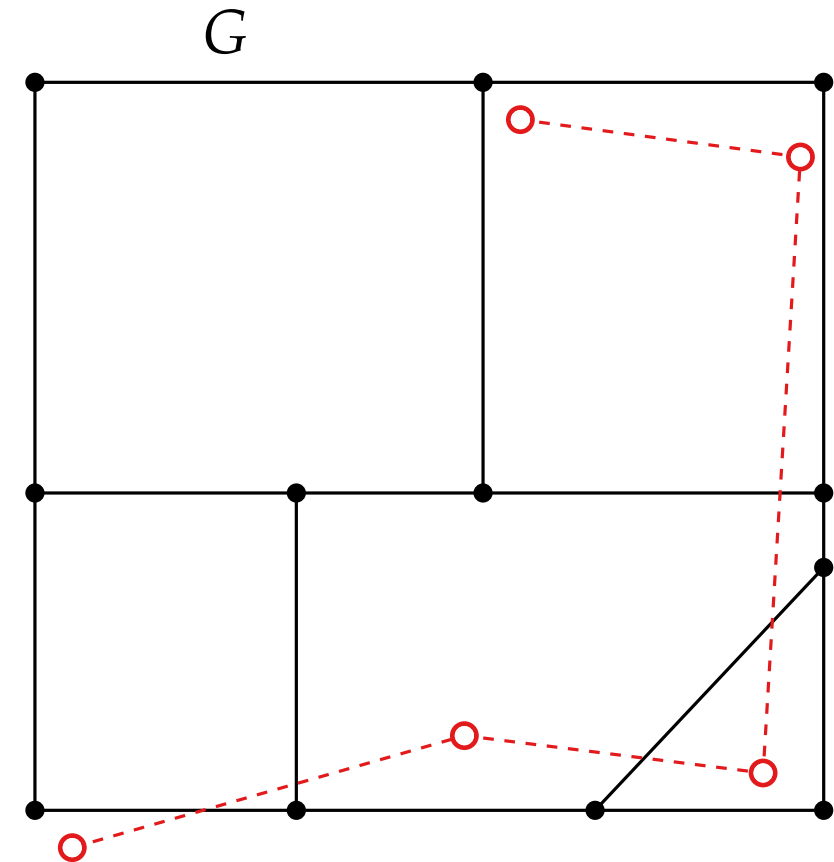
6 - 2



Dalumpines & Scott (2011)



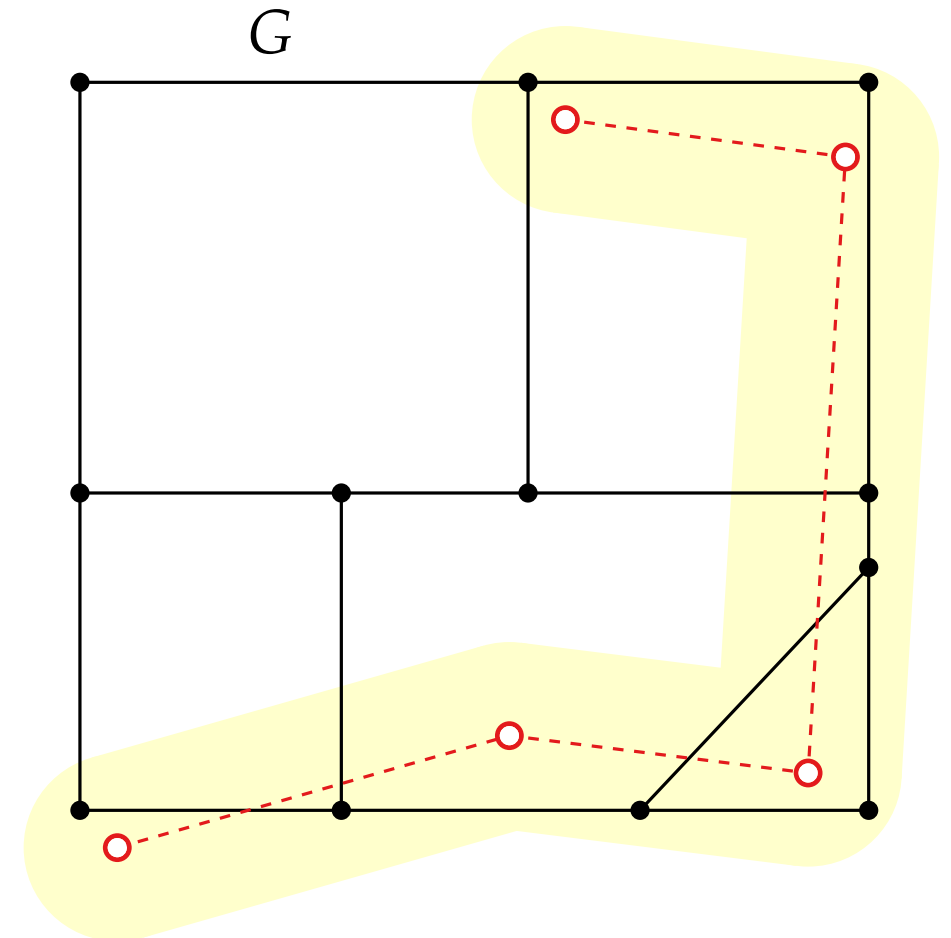
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).



Dalumpines & Scott (2011)



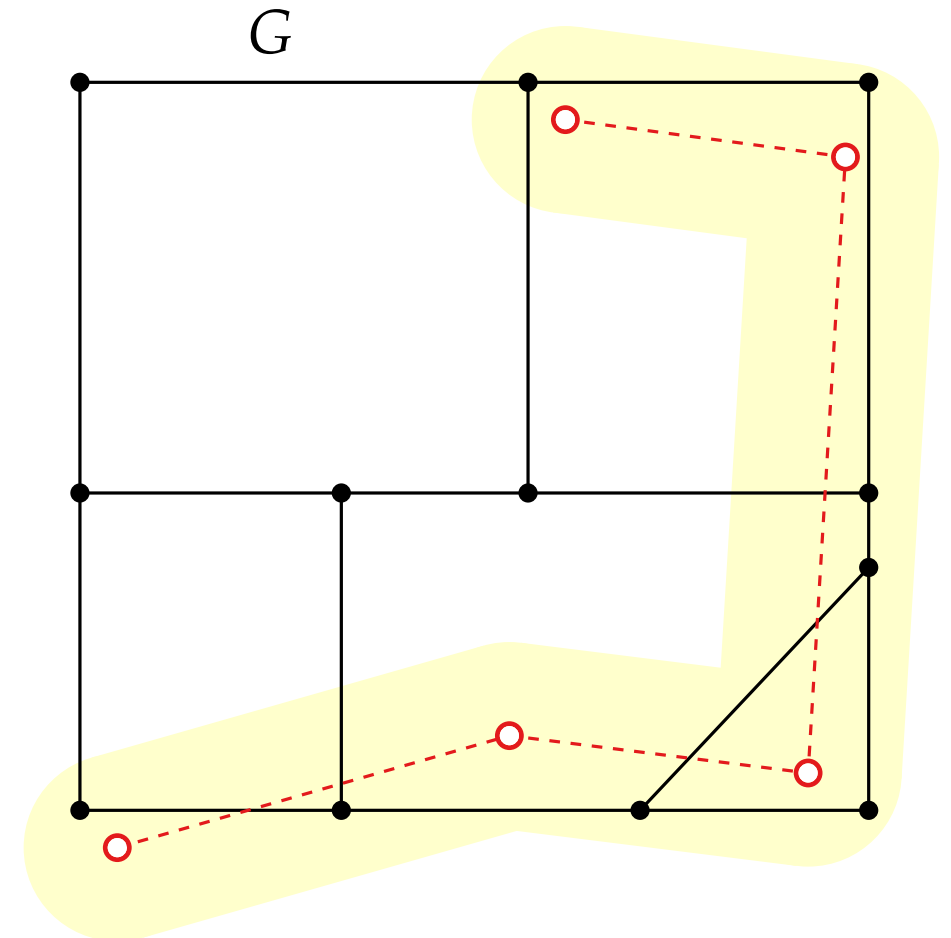
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).



Dalumpines & Scott (2011)



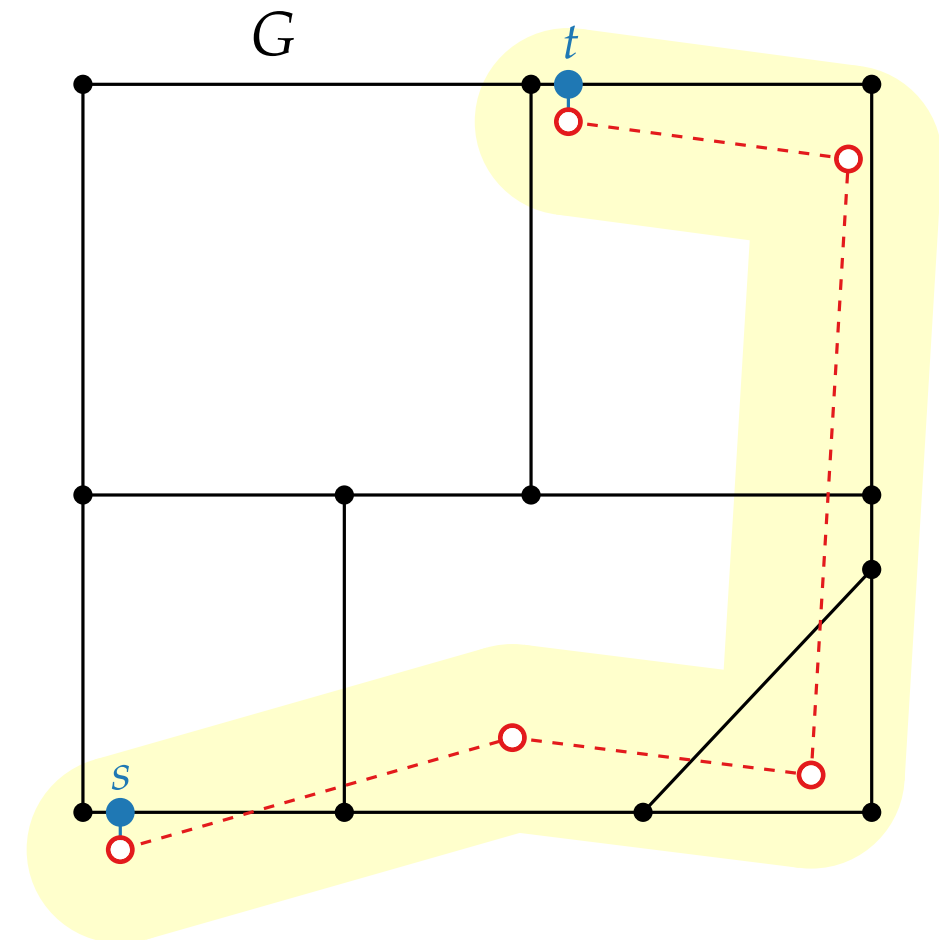
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.



Dalumpines & Scott (2011)



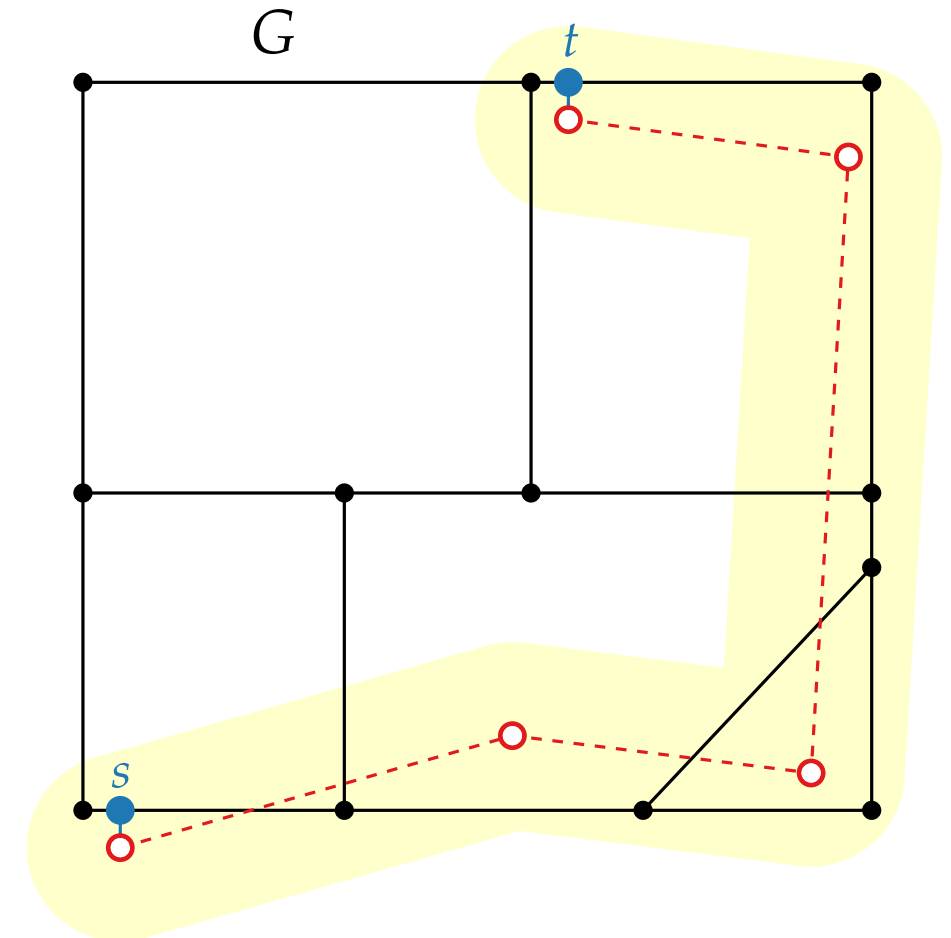
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.



Dalumpines & Scott (2011)



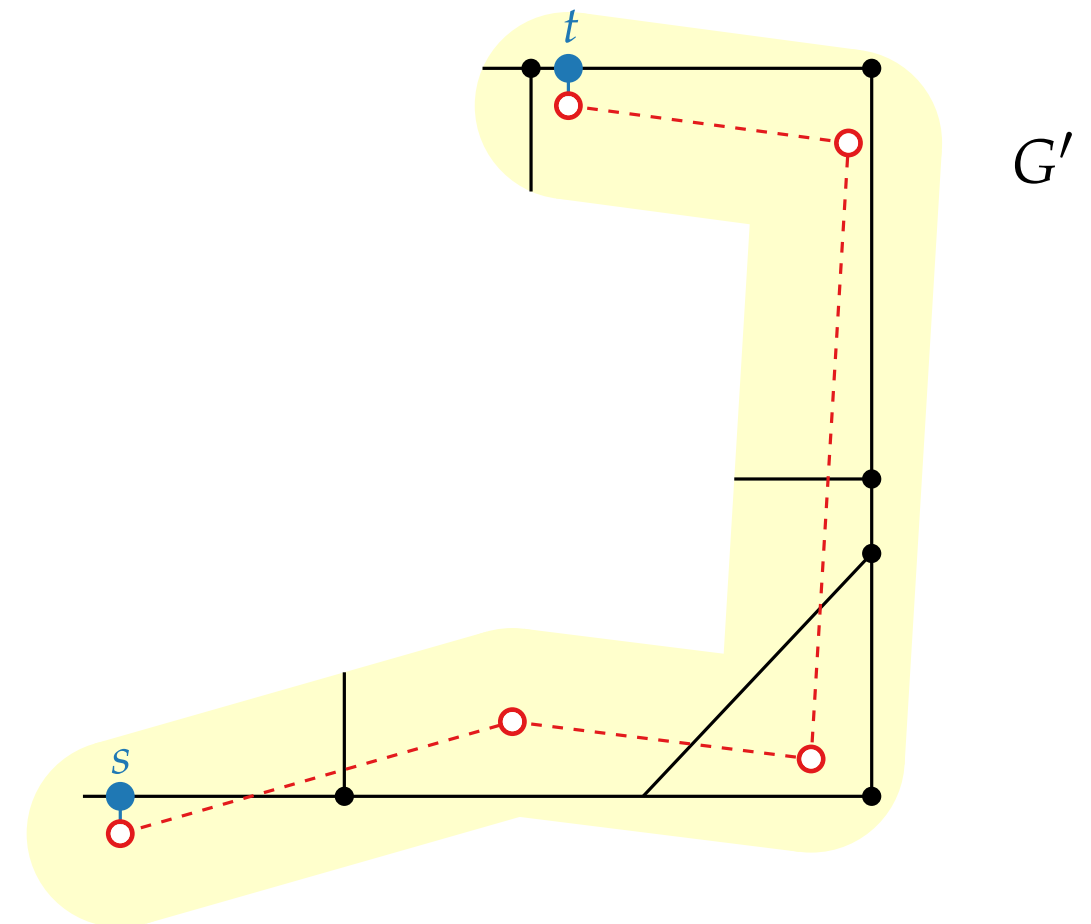
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.





Dalumpines & Scott (2011)

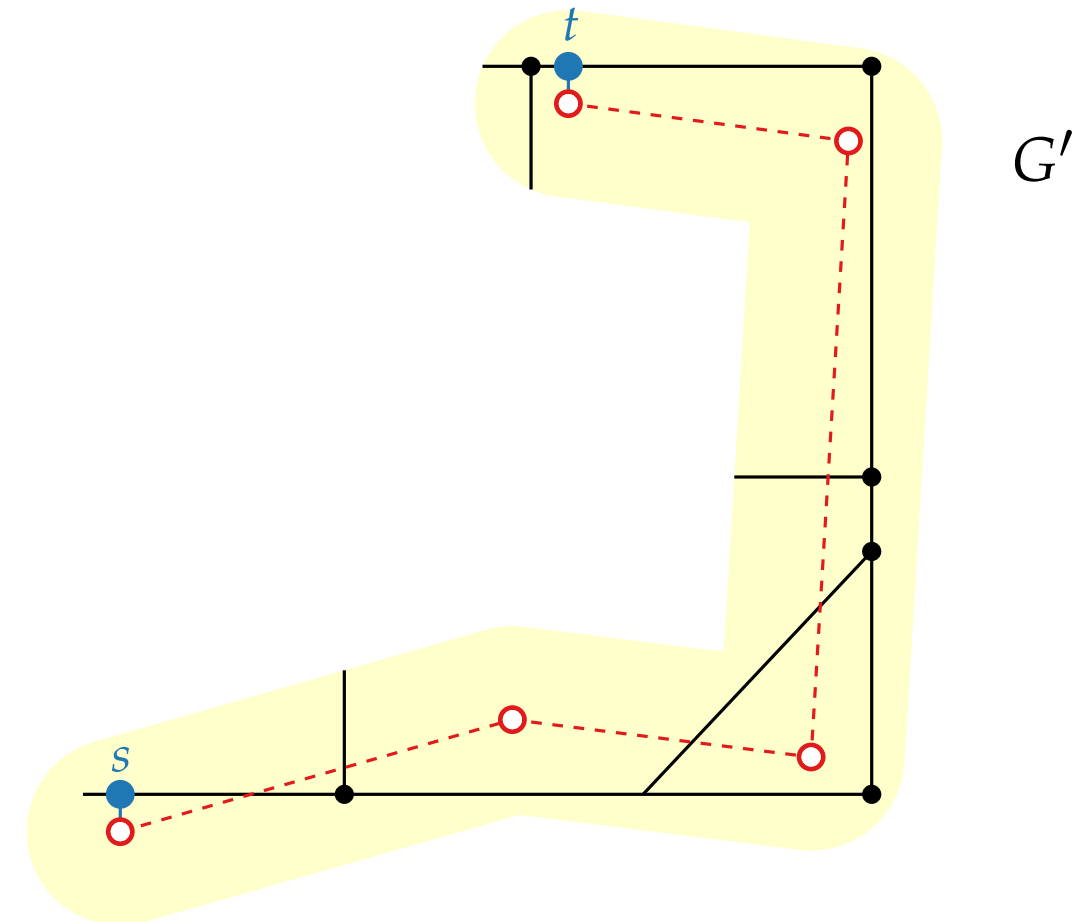
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.





Dalumpines & Scott (2011)

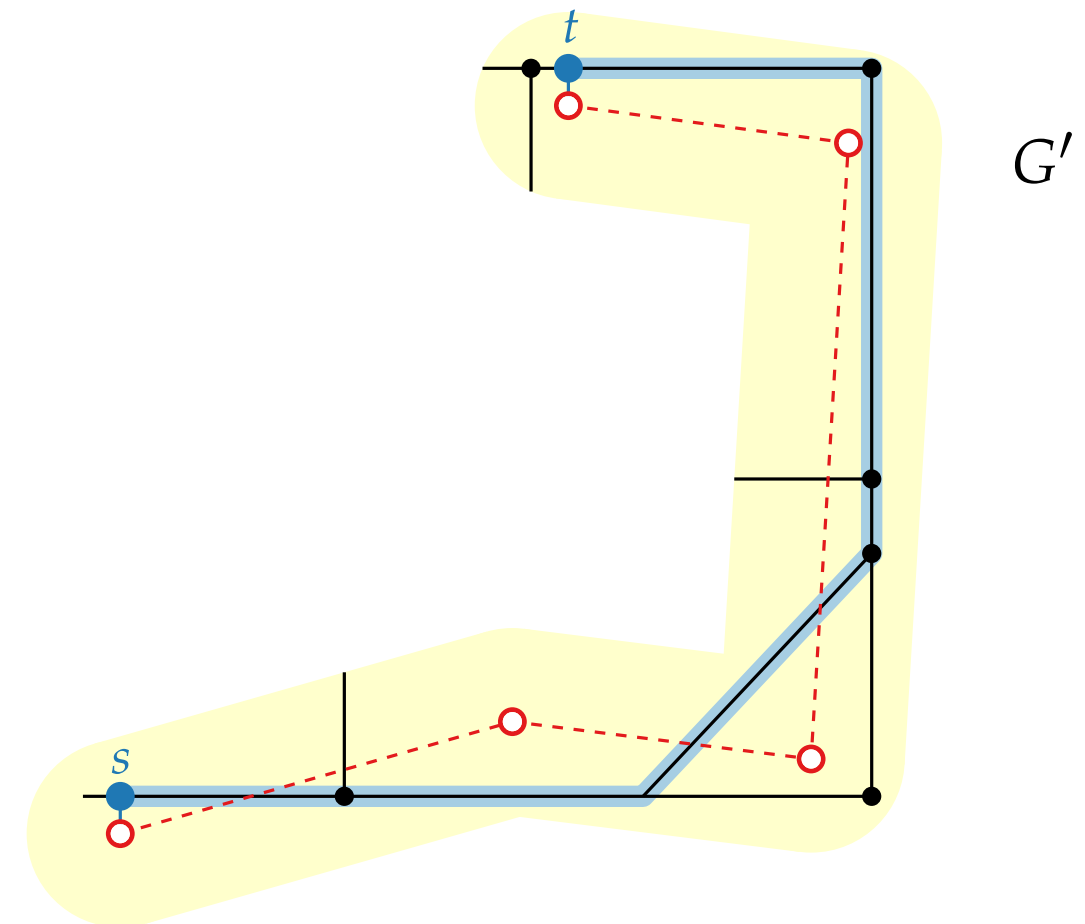
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .





Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

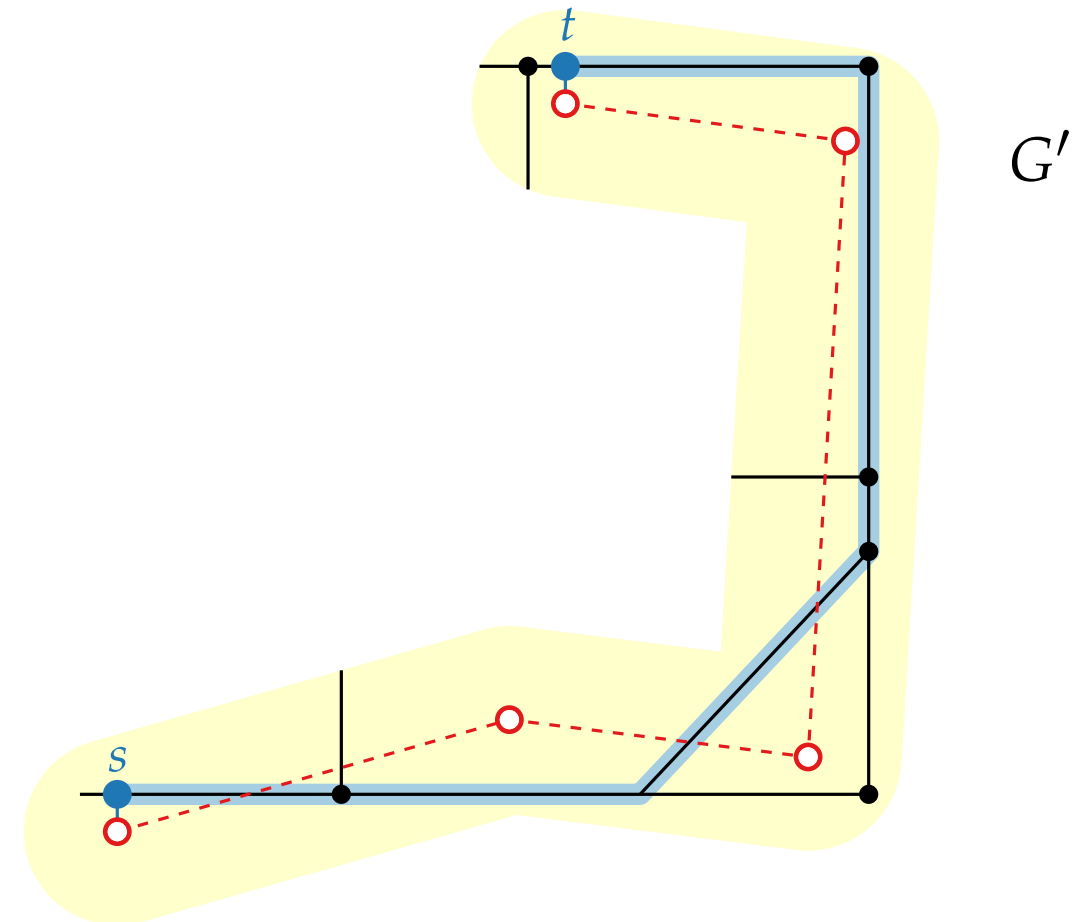




Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

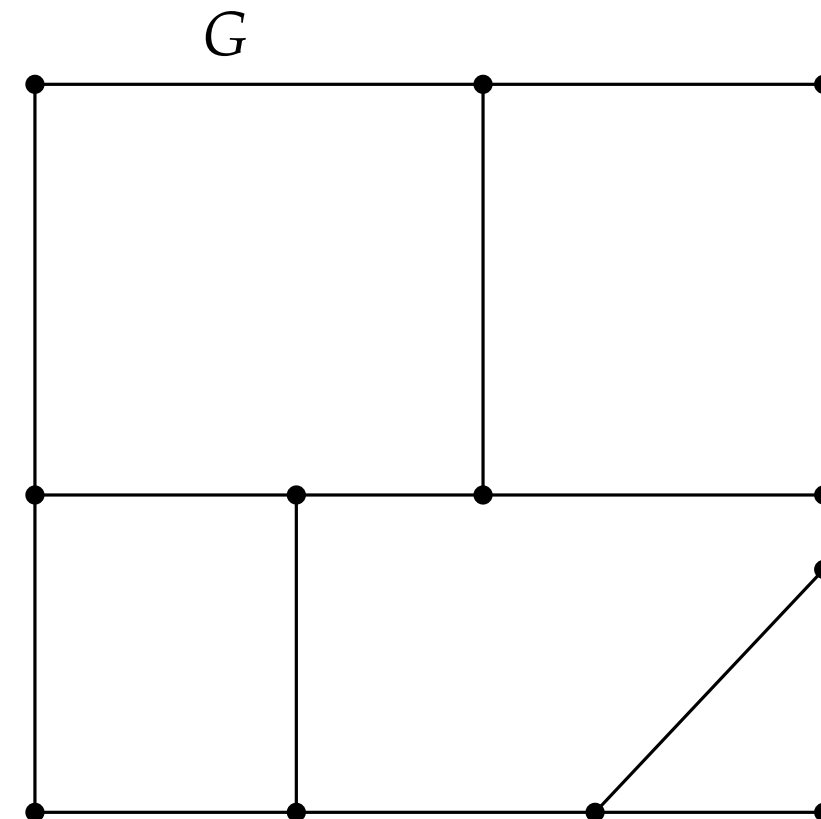




Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s – t –Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

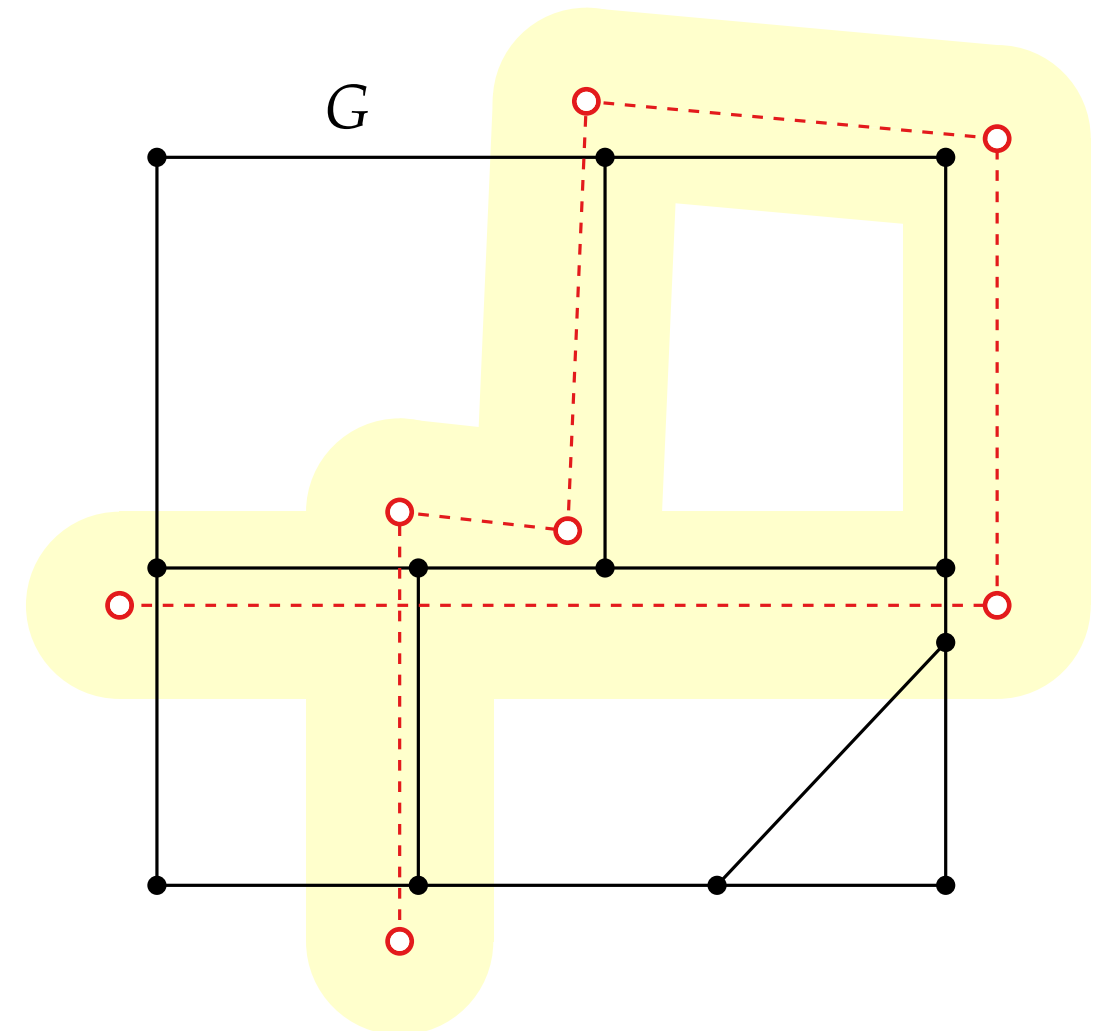




Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s – t –Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

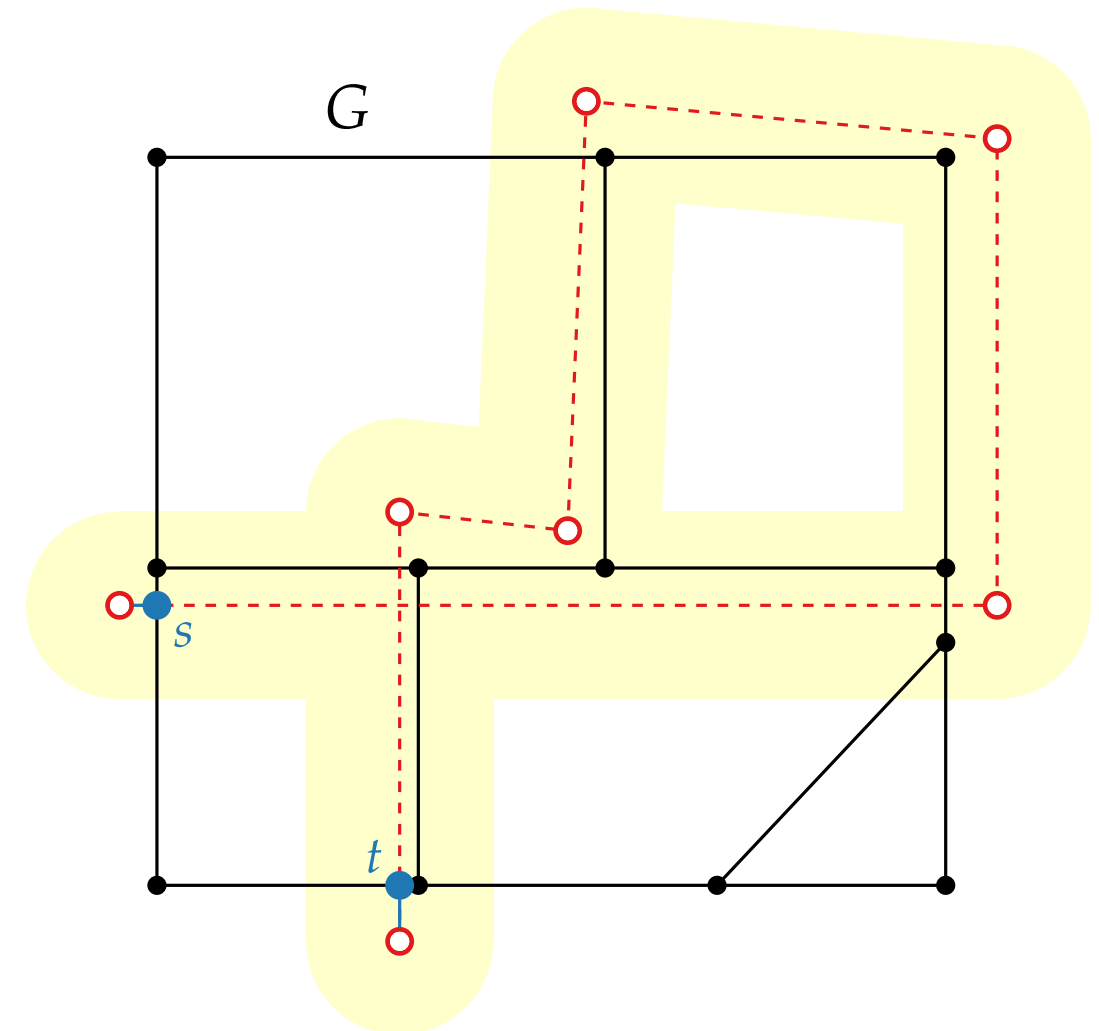




Dalumpines & Scott (2011)

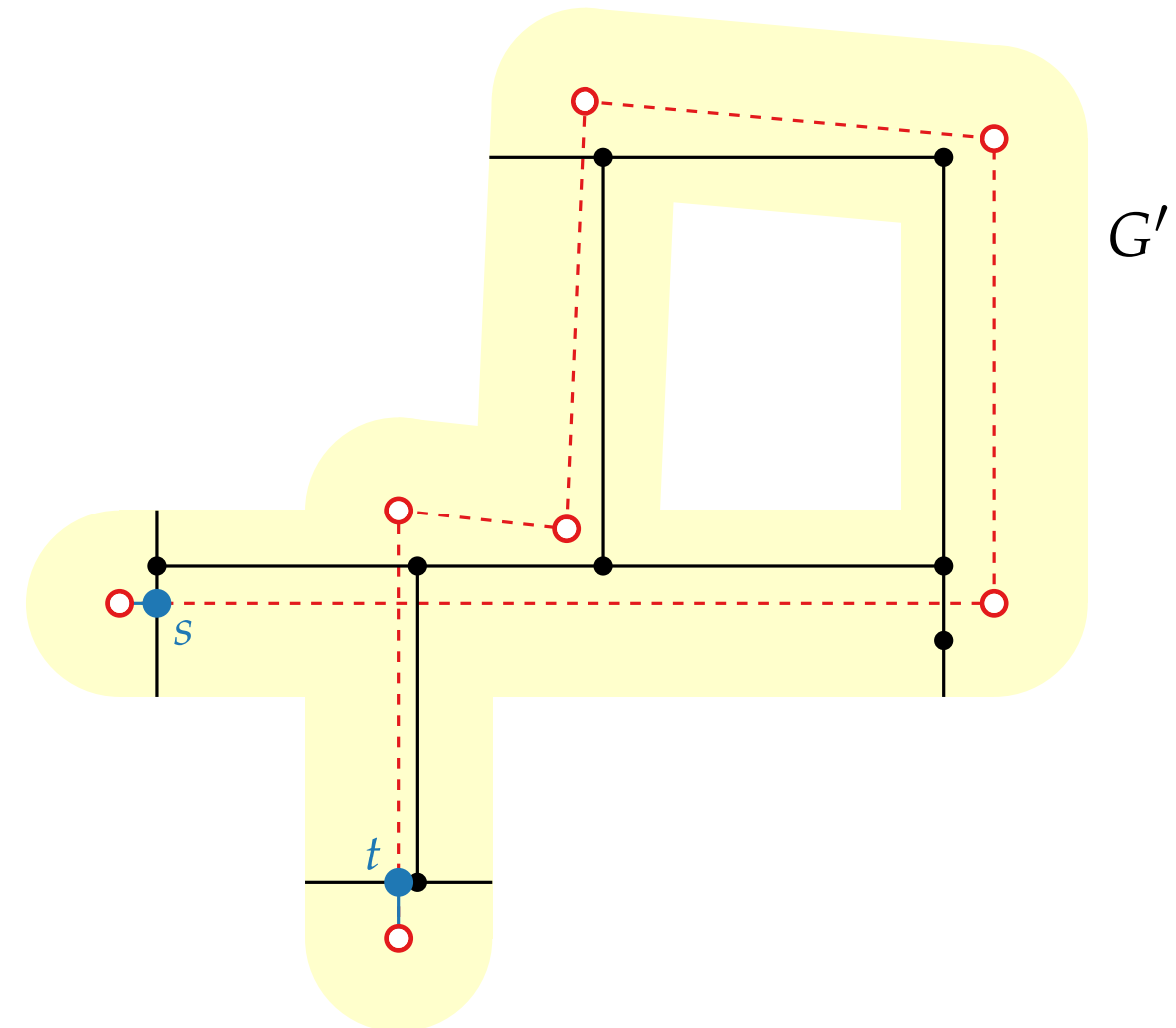
- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s – t –Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!



Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s – t –Pfad in G' .

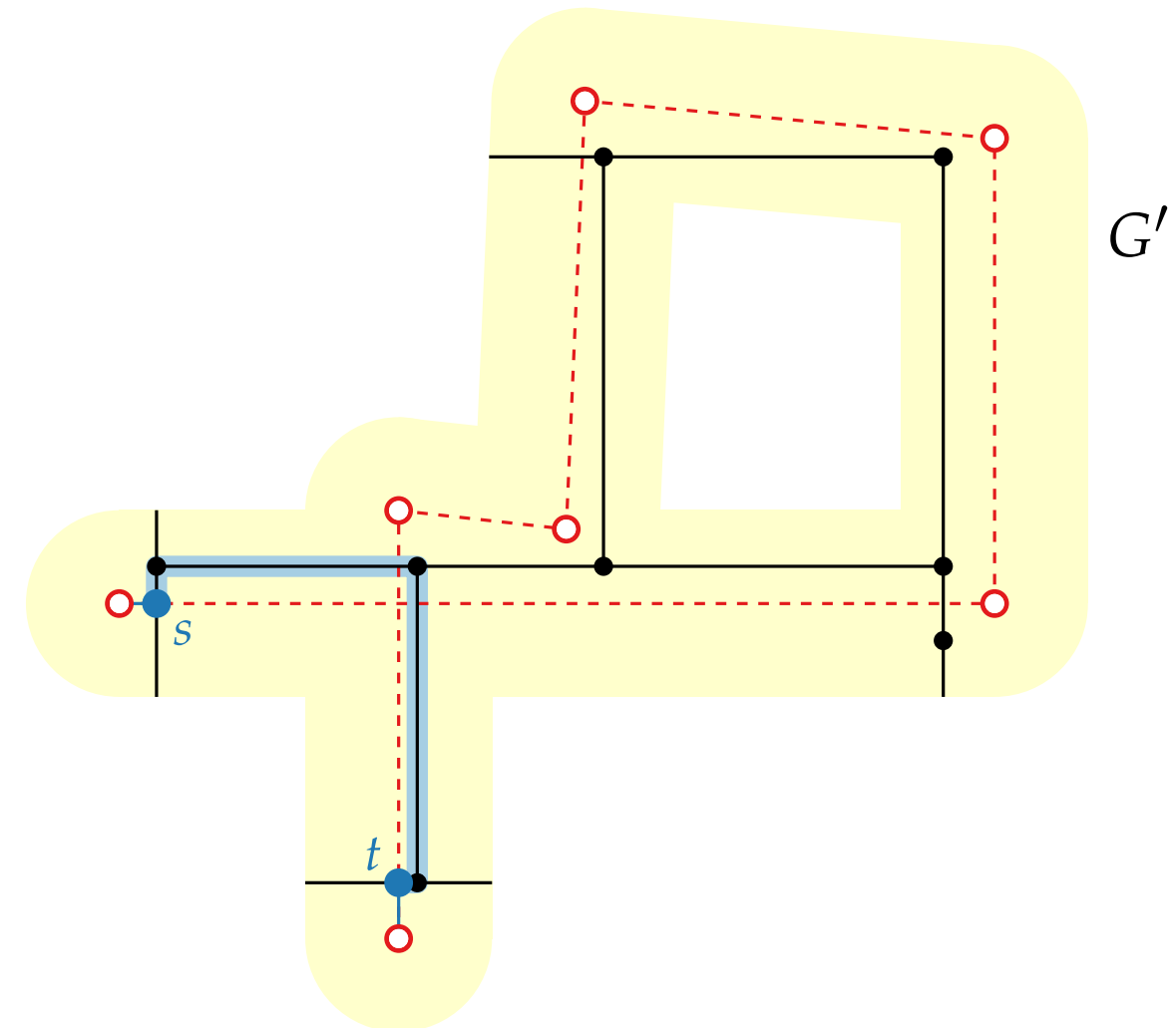




Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s – t –Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!



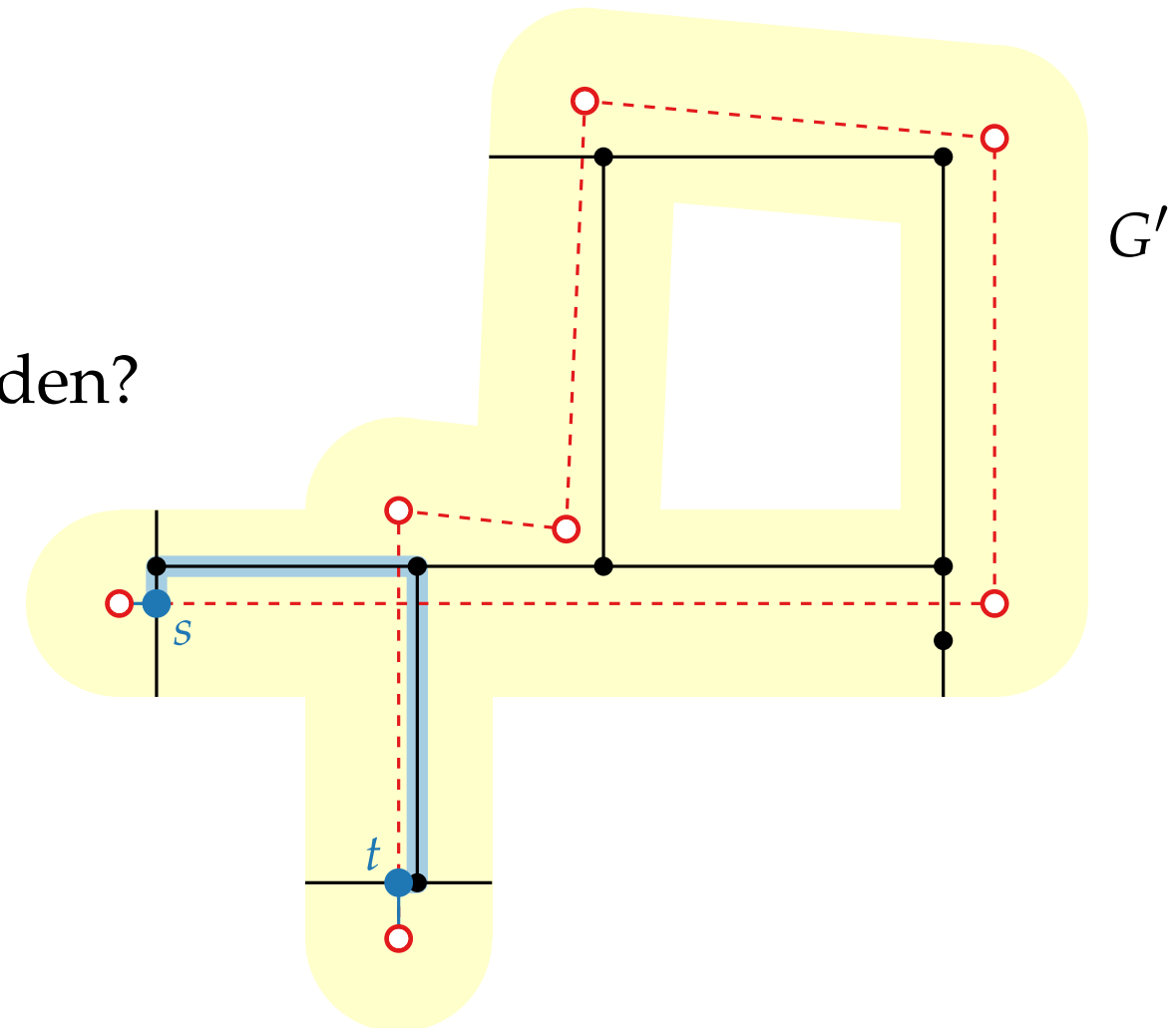


Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s – t –Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

Algorithmus zwischen jedem Punktepaar verwenden?



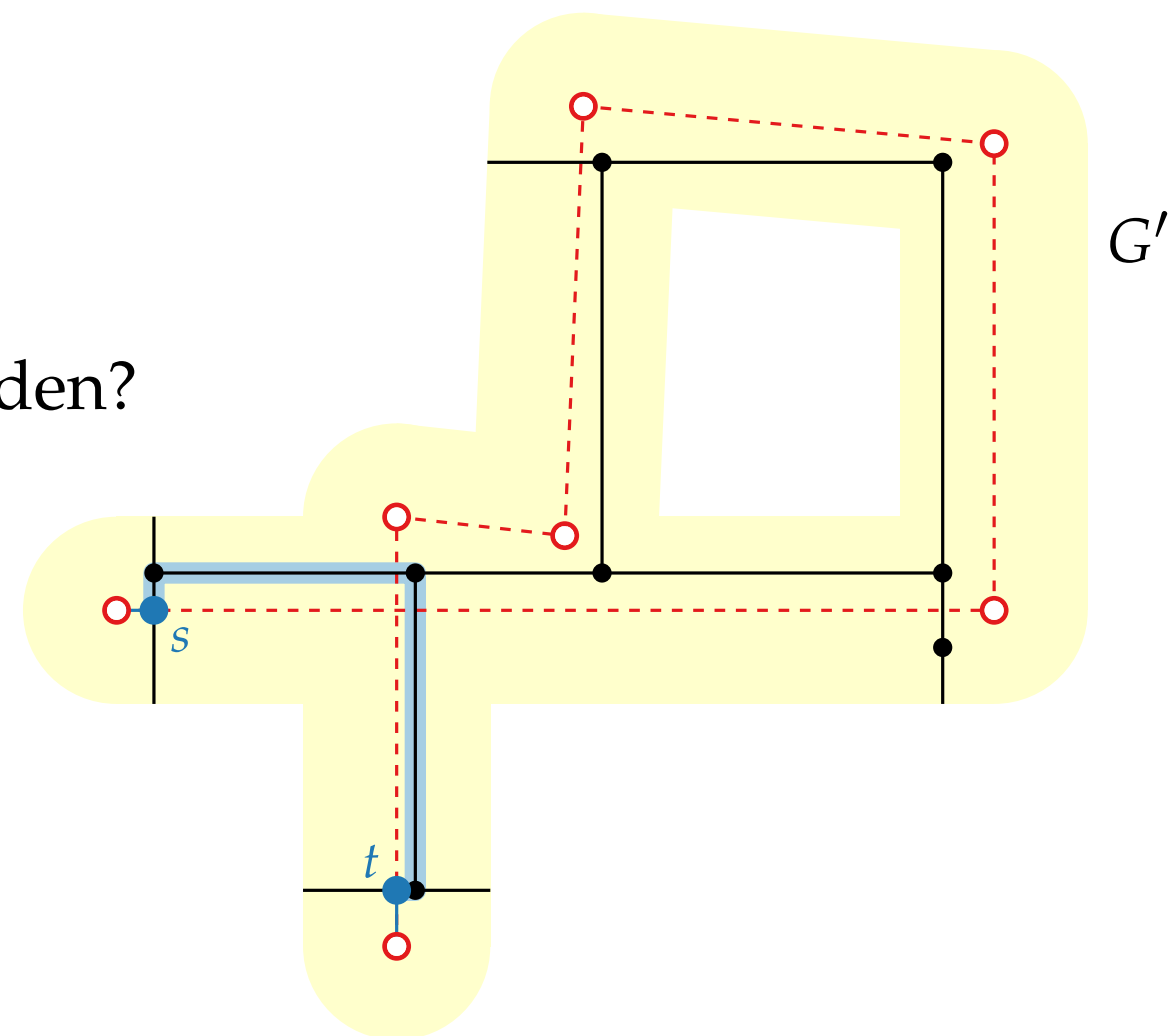
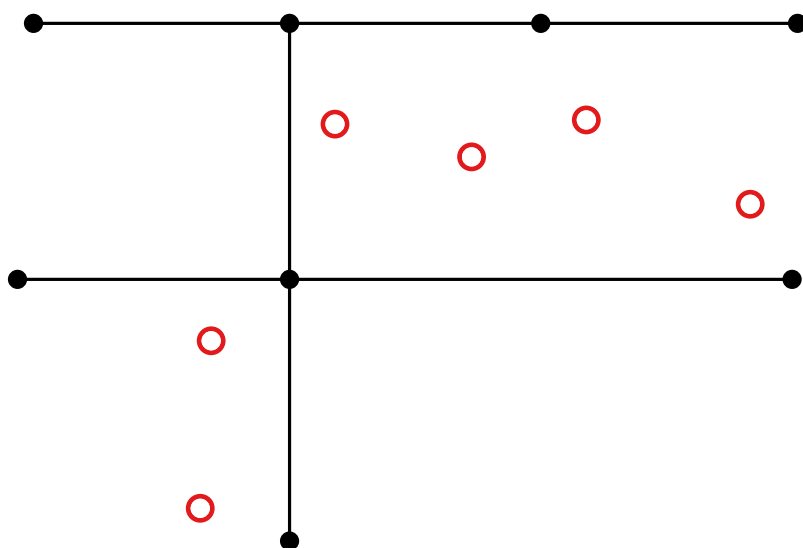


Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

Algorithmus zwischen jedem Punktepaar verwenden?



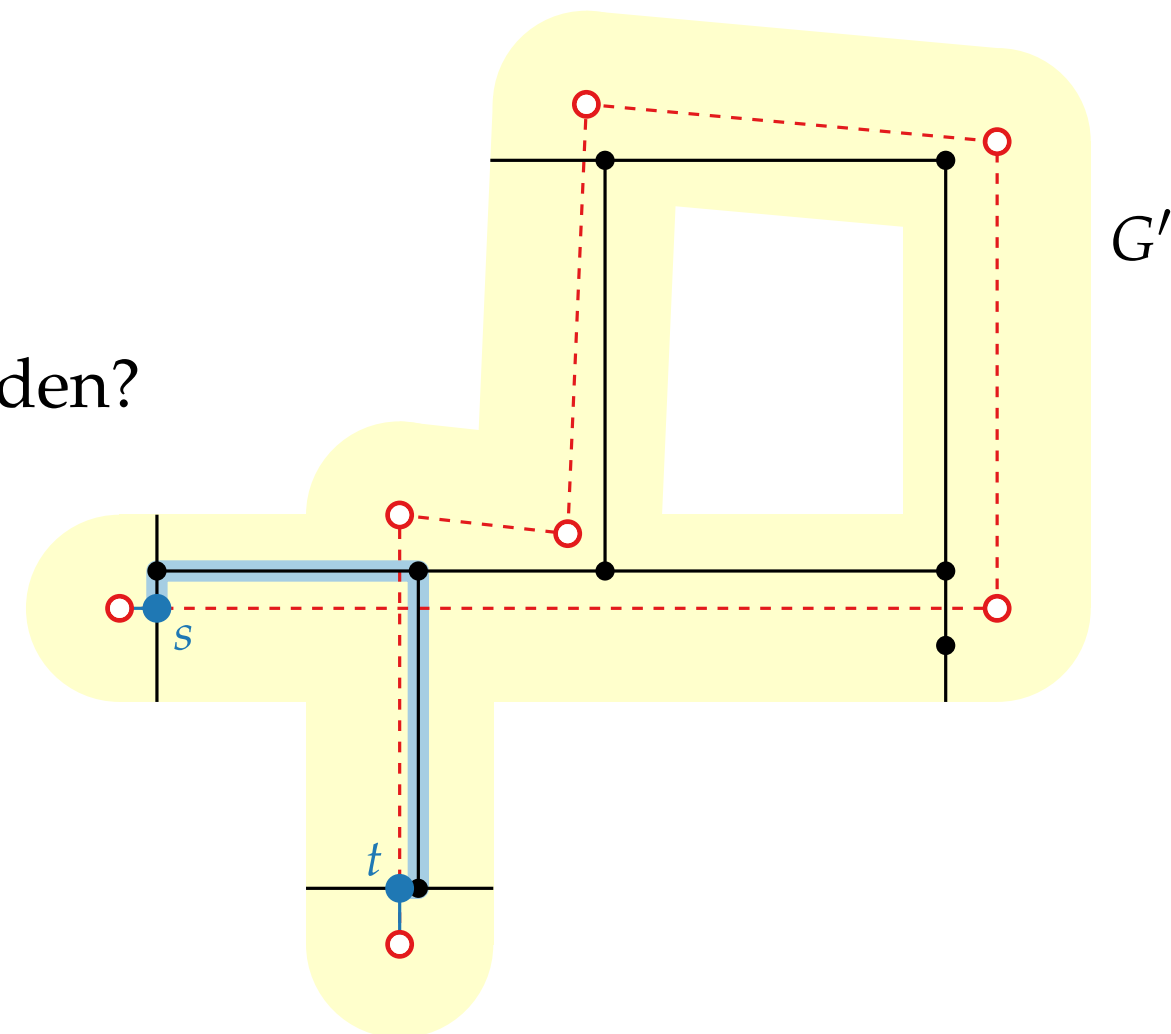
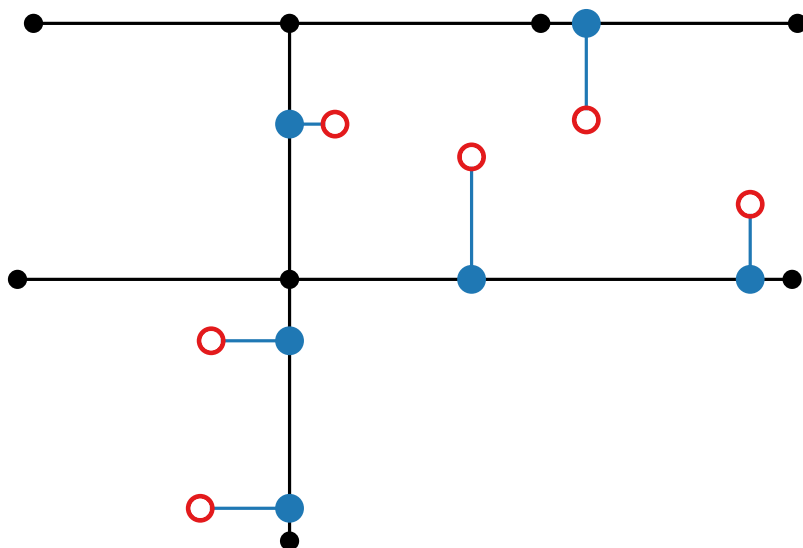


Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

Algorithmus zwischen jedem Punktepaar verwenden?



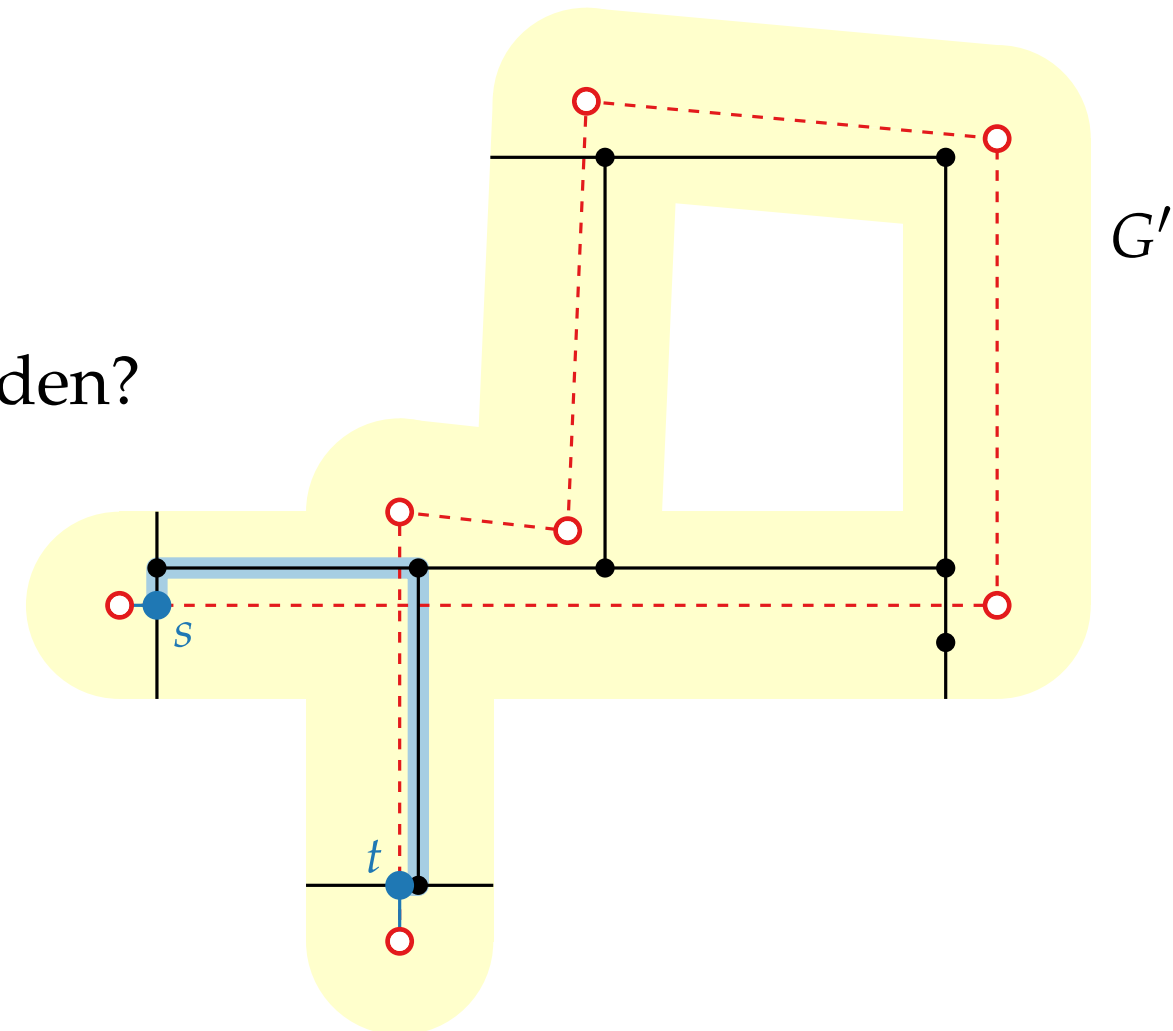
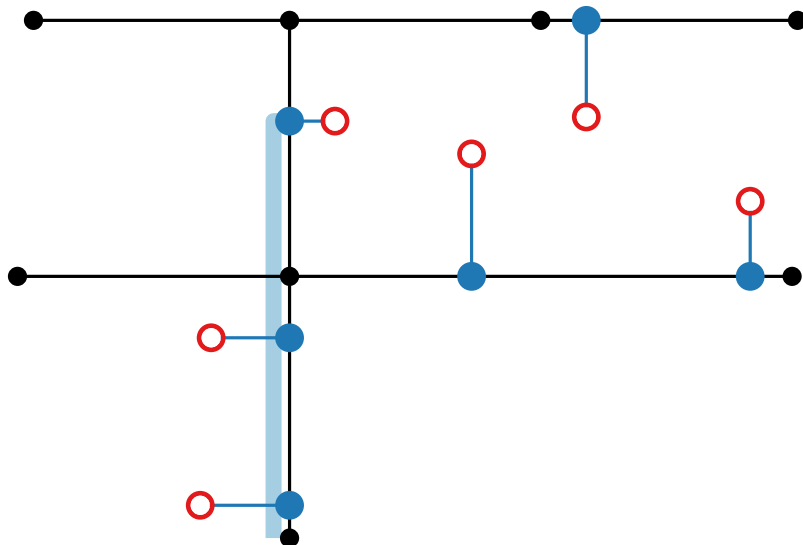


Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

Algorithmus zwischen jedem Punktepaar verwenden?



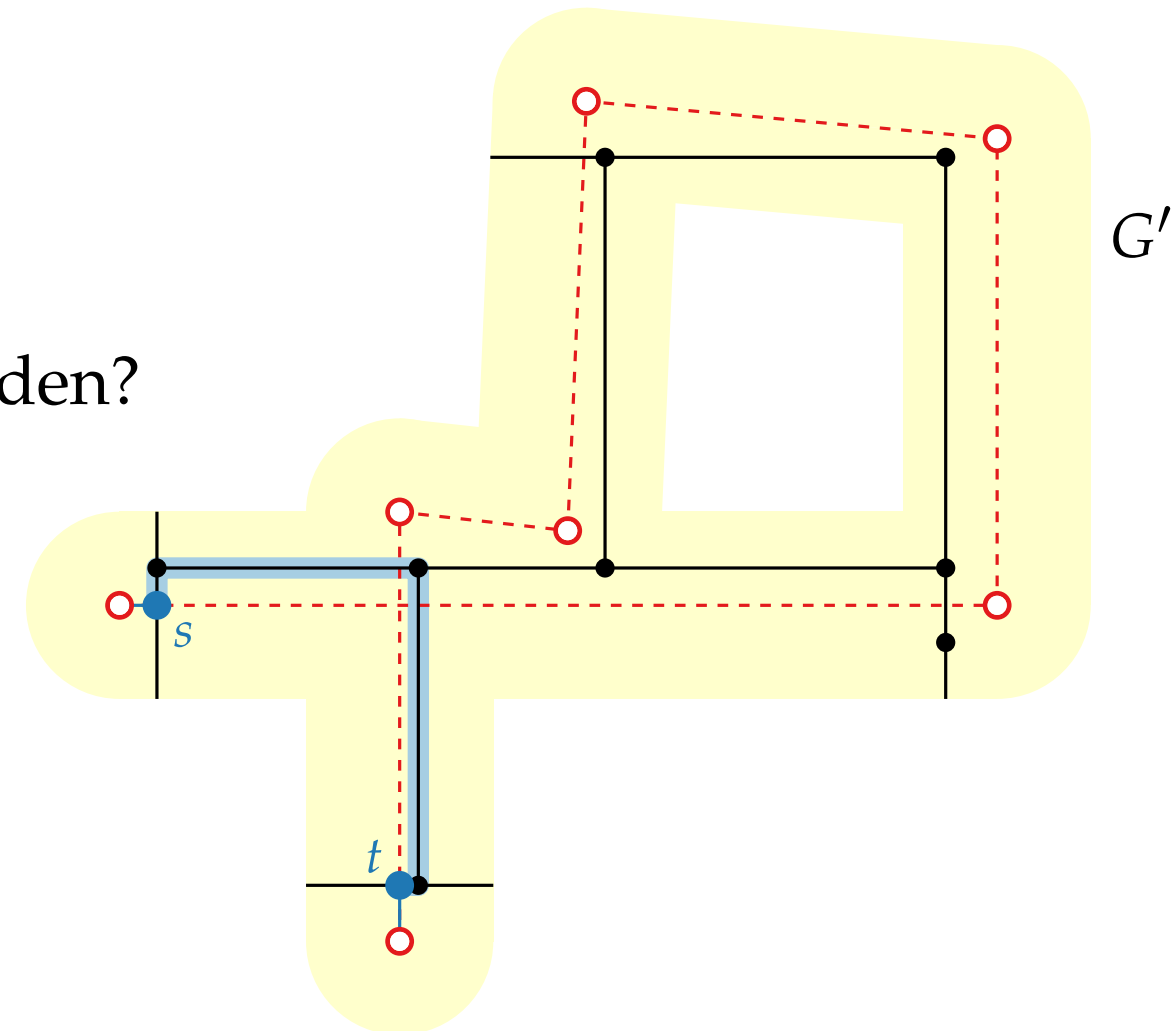
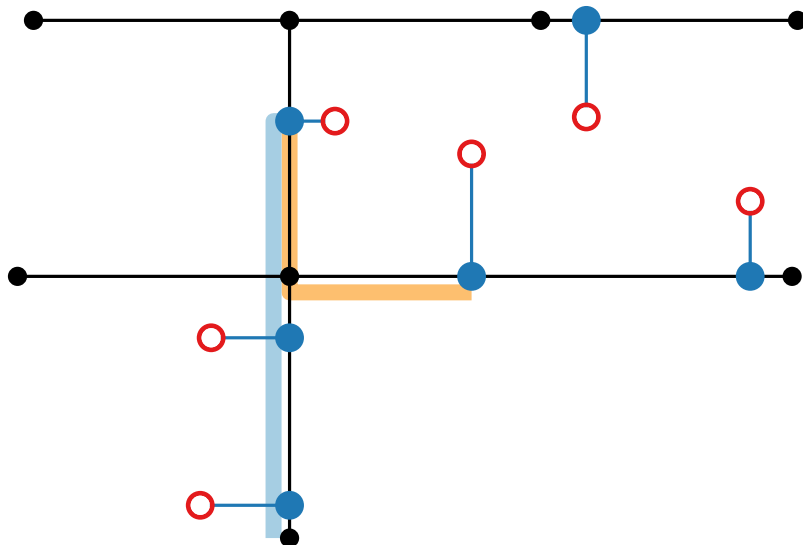


Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

Algorithmus zwischen jedem Punktepaar verwenden?



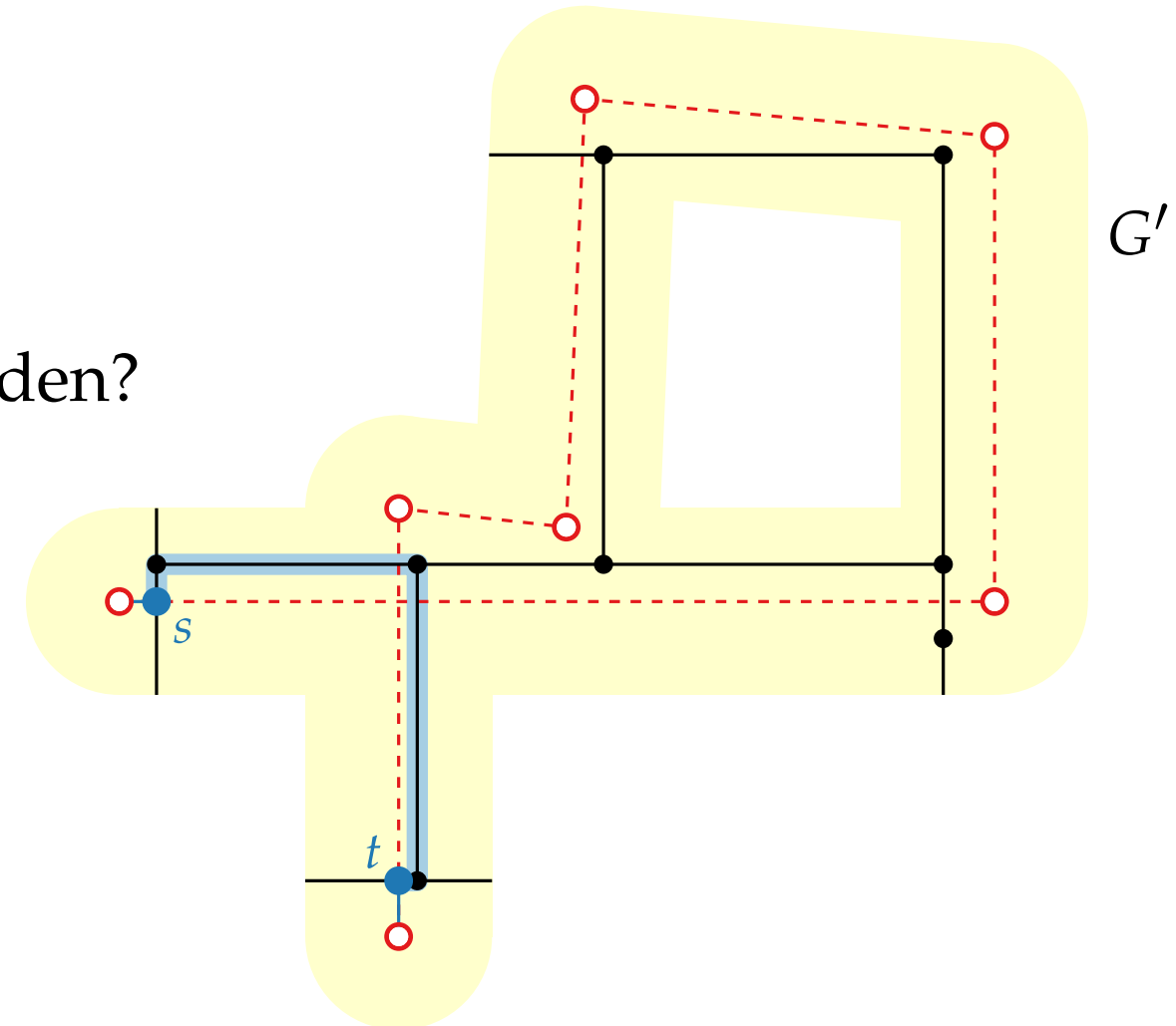
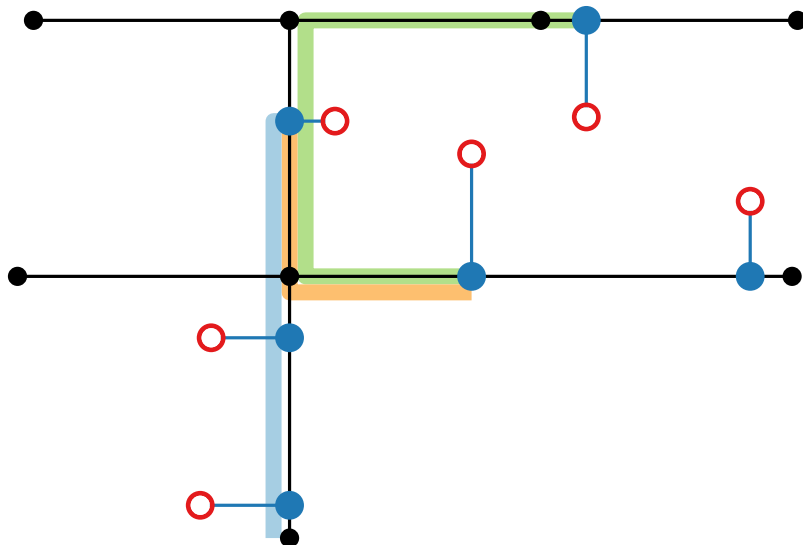


Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

Algorithmus zwischen jedem Punktepaar verwenden?



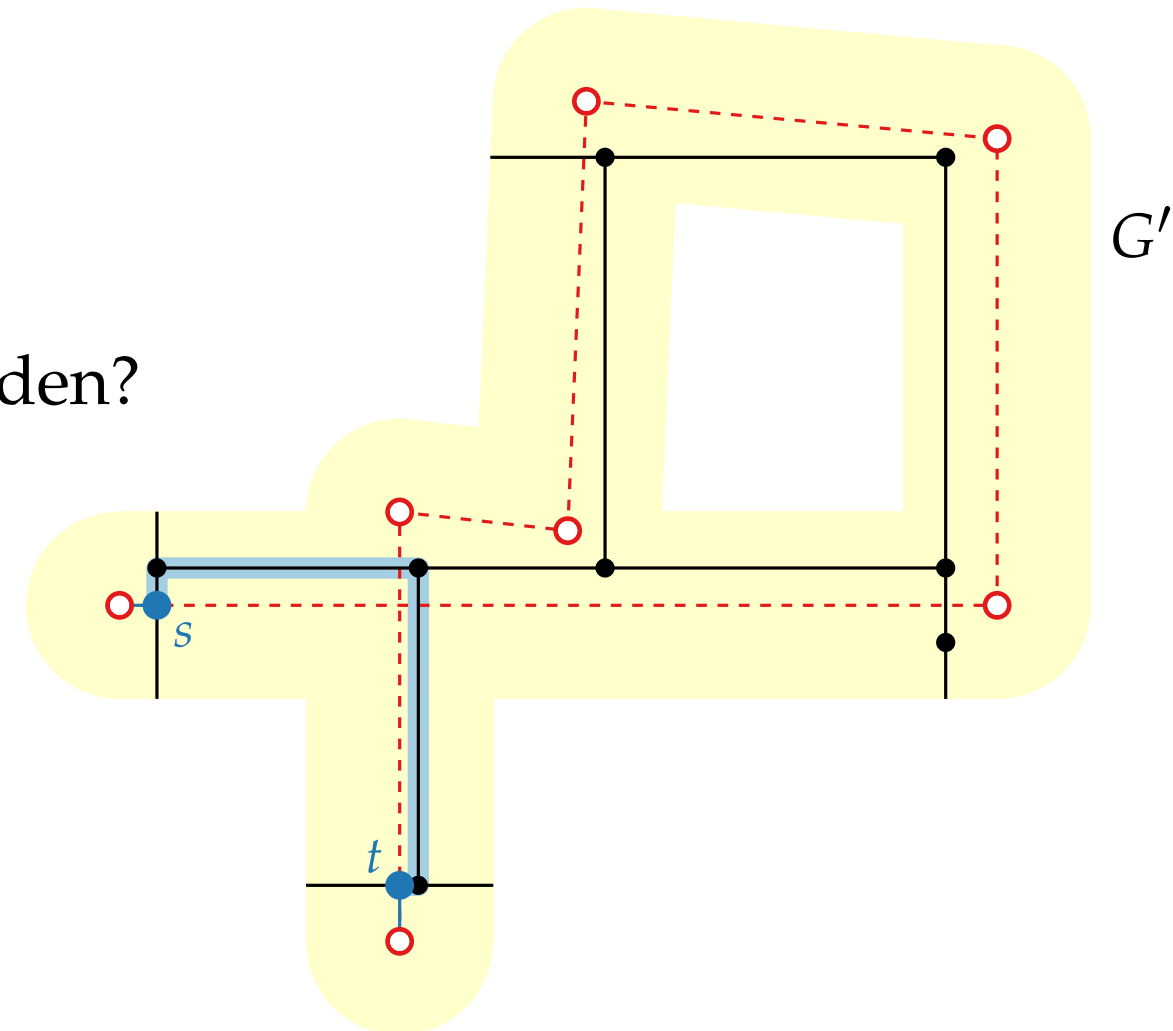
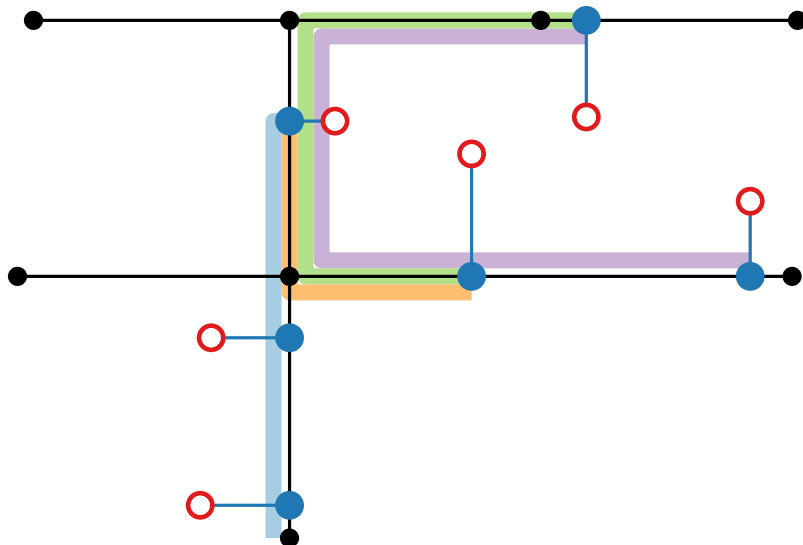


Dalumpines & Scott (2011)

- Erstelle Puffer der Größe ε (vom Benutzer festgelegt).
- Finde Punkte s und t in G mit min. Euklidischen Abstand zu Start und Ende der Trajektorie.
- Berechne Schnitt G' von G mit Puffer.
- Suche kürzesten s - t -Pfad in G' .

Problem: Algorithmus betrachtet nur Endpunkte!

Algorithmus zwischen jedem Punktepaar verwenden?



Newson & Krumm (2009)

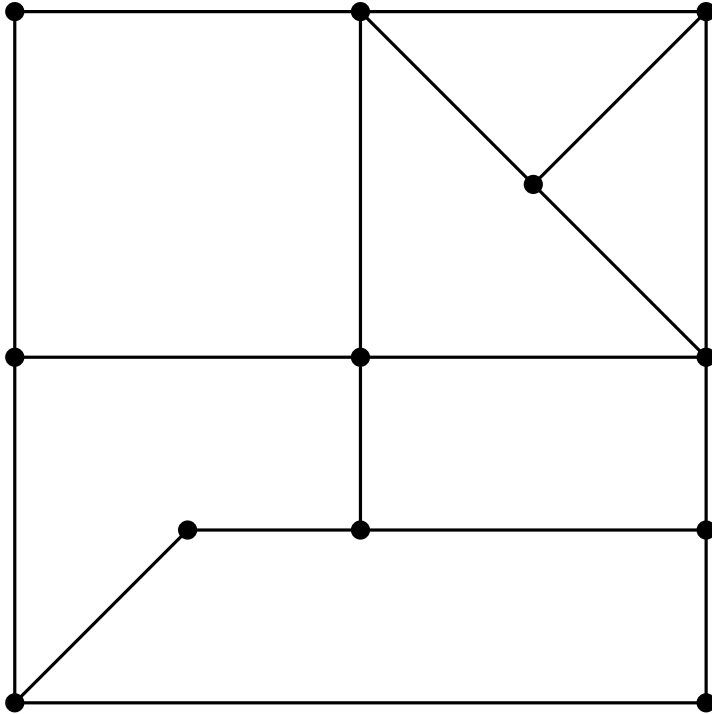


Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell

Newson & Krumm (2009)



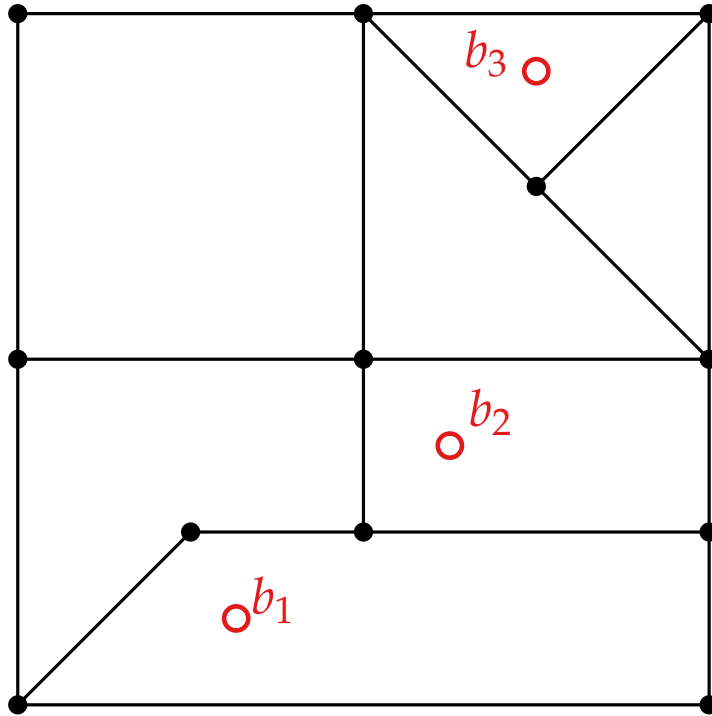
Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



Newson & Krumm (2009)



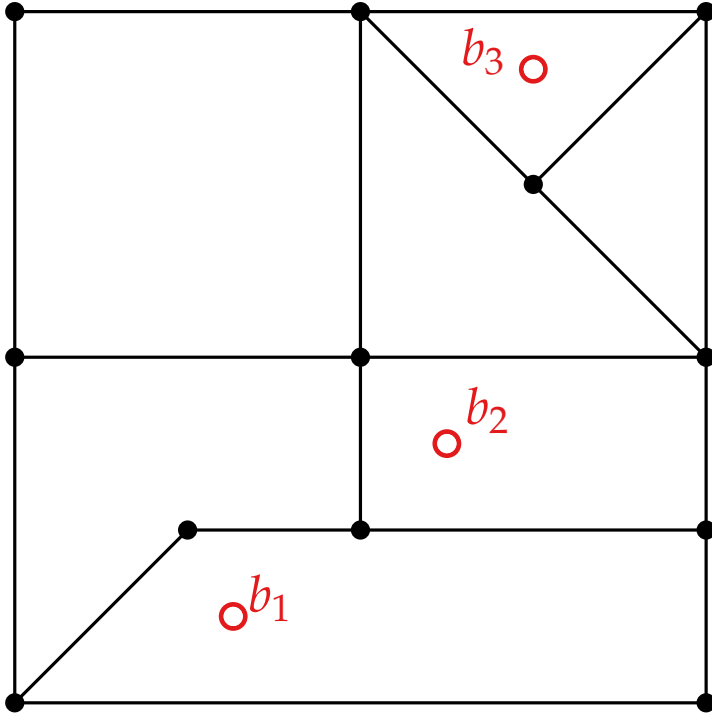
Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



Newson & Krumm (2009)



Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell

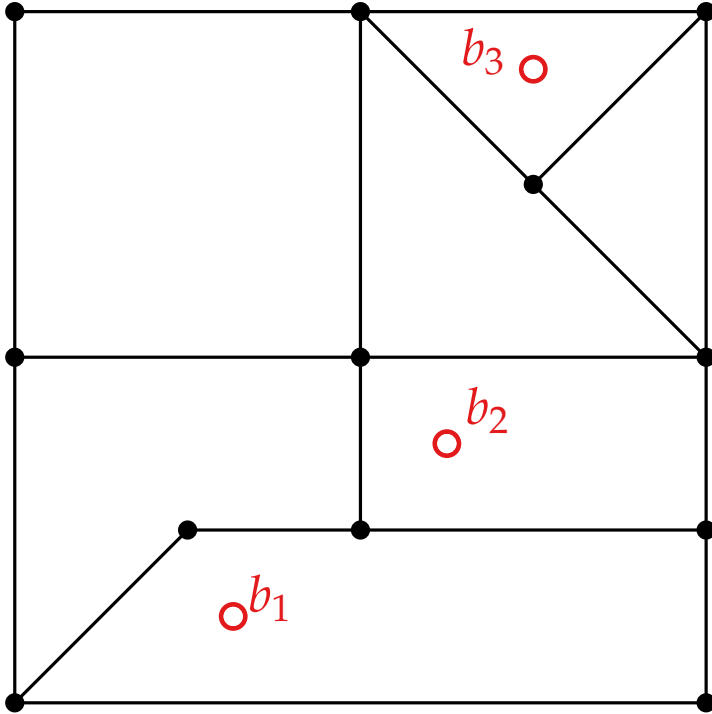


Vorgehen:

Newson & Krumm (2009)



Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell

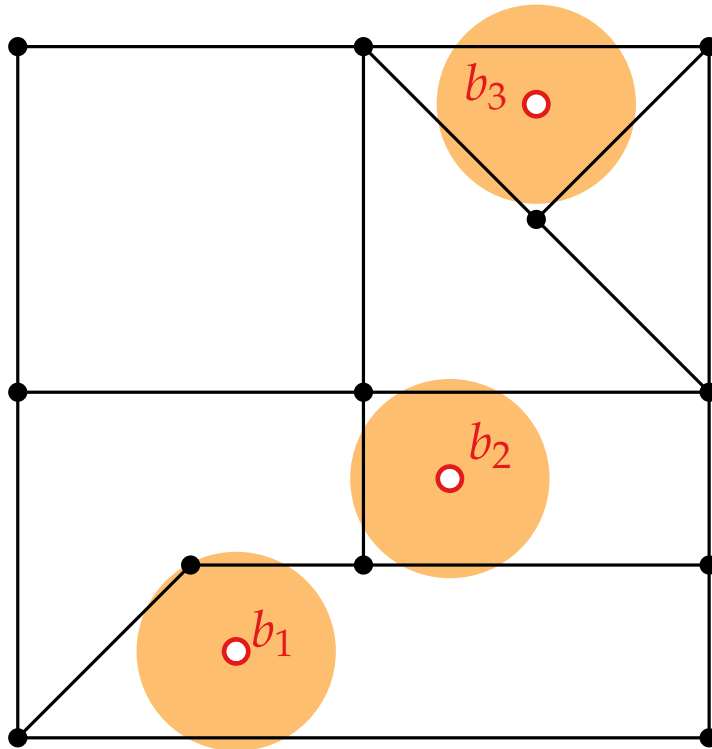


Vorgehen: ■ Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte

Newson & Krumm (2009)



Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell

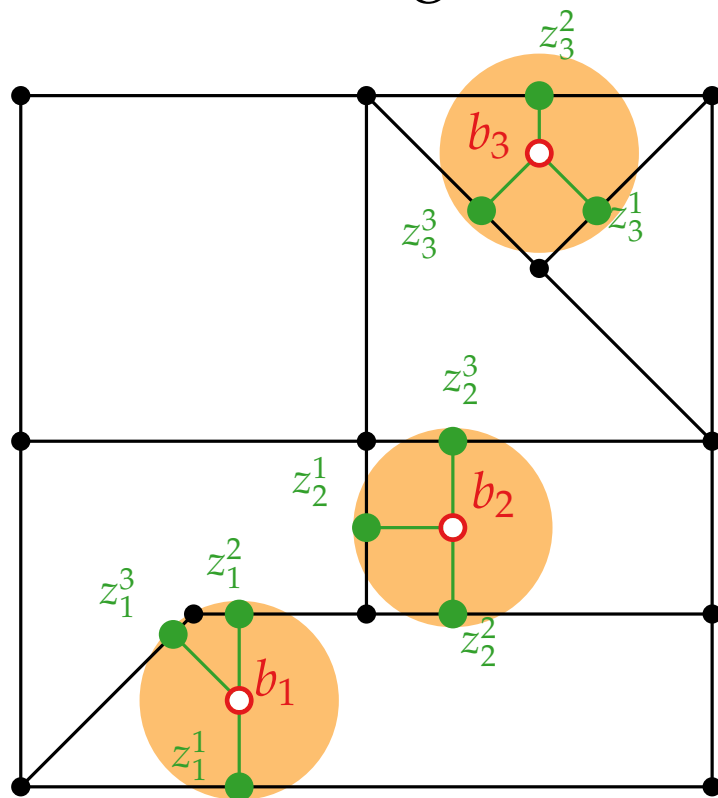


Vorgehen: ■ Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte

Newson & Krumm (2009)



Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell

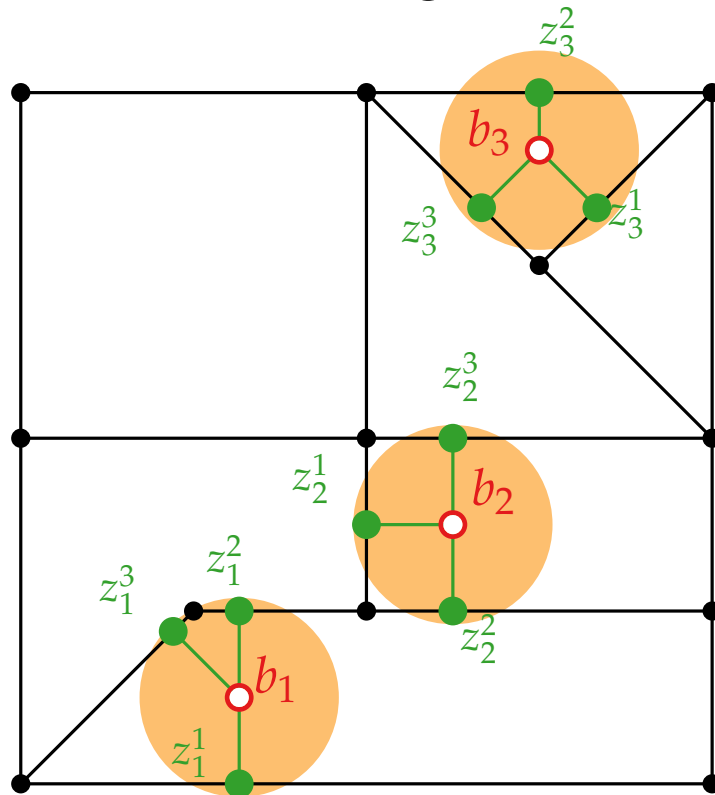


Vorgehen: ■ Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte

Newson & Krumm (2009)



Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell

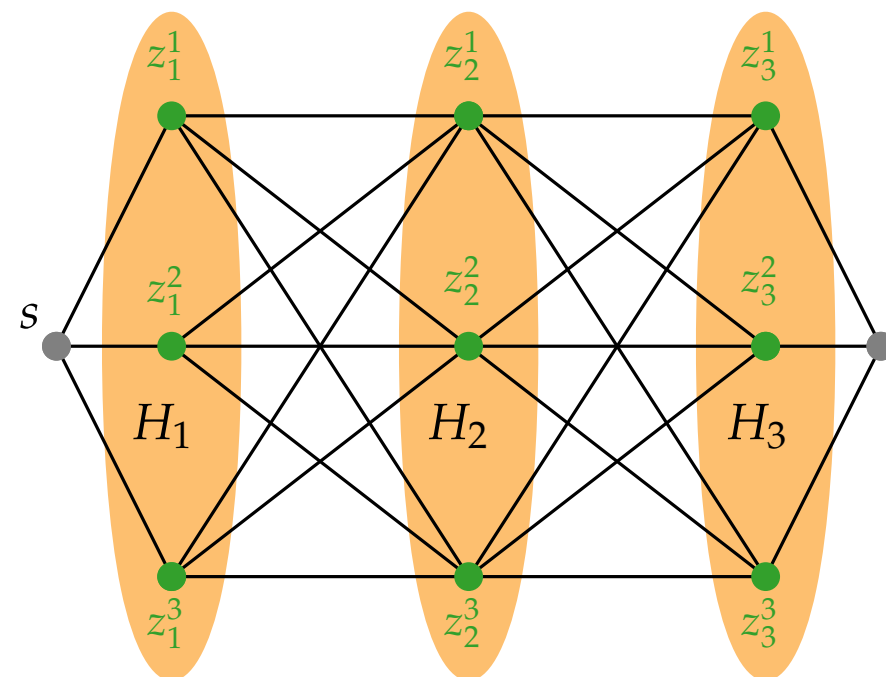
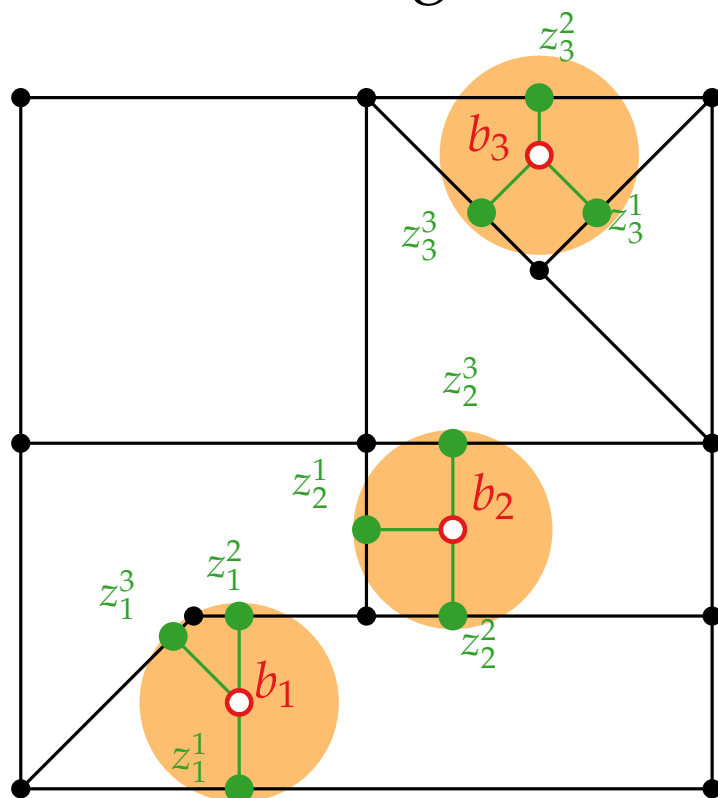


Vorgehen:

- Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte
- Berechne Trellis-Graph (Kanten entsprechen kürzesten Wegen in G , Kantengewichte basierend auf probabilistischem Modell)

Newson & Krumm (2009)

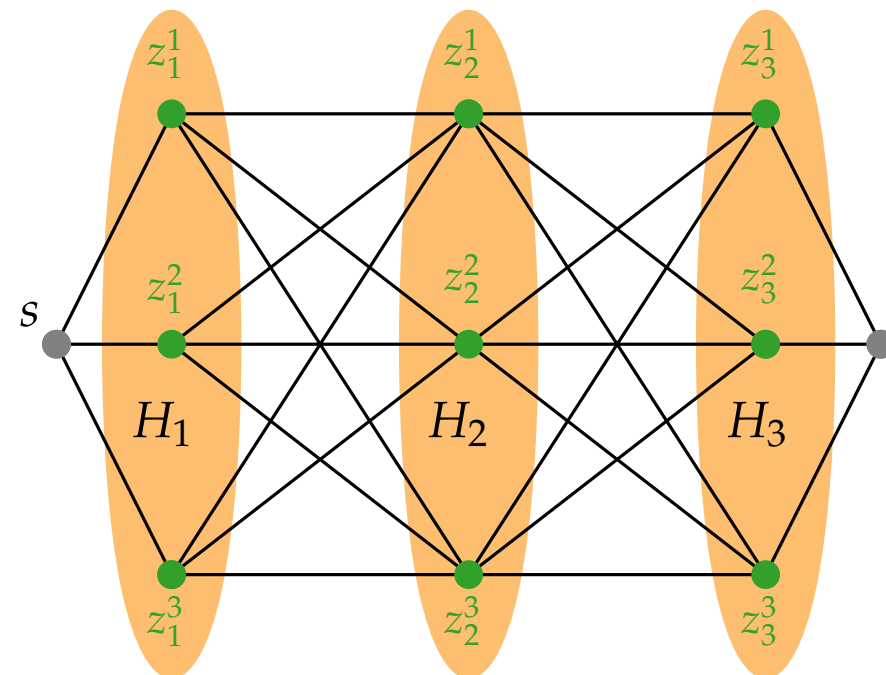
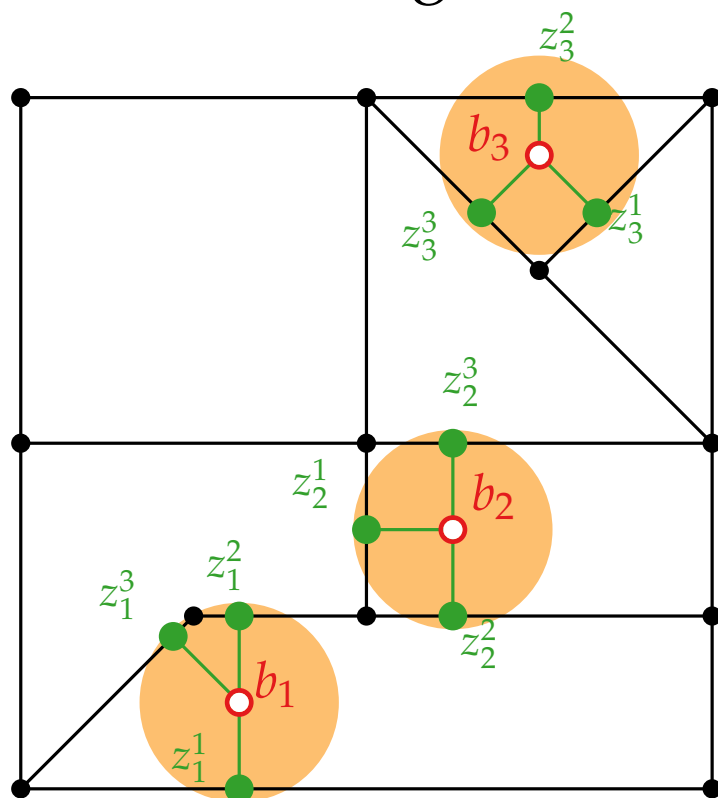
Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



- Vorgehen:**
- Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte
 - Berechne Trellis-Graph (Kanten entsprechen kürzesten Wegen in G , Kantengewichte basierend auf probabilistischem Modell)

Newson & Krumm (2009)

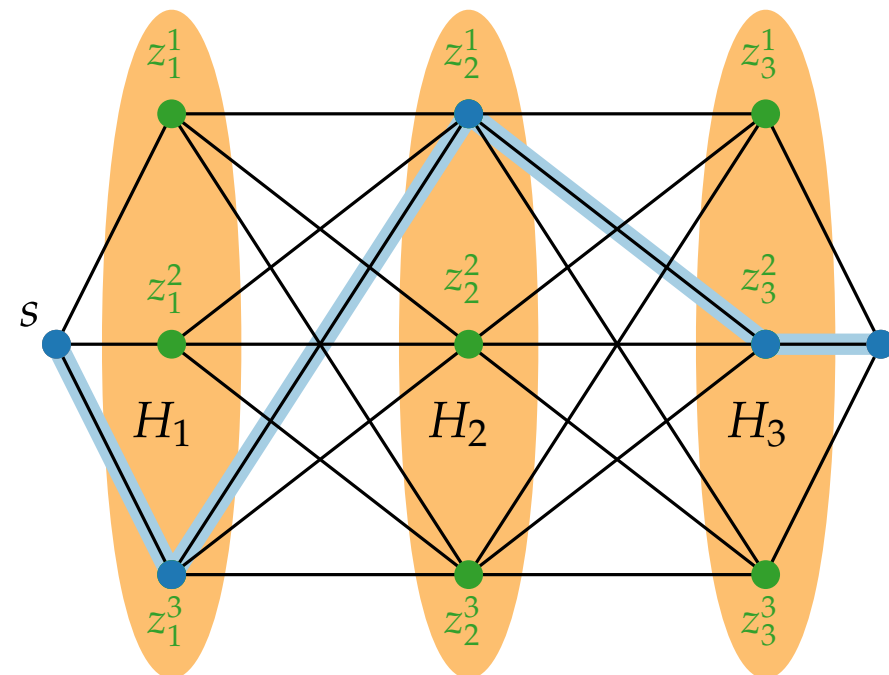
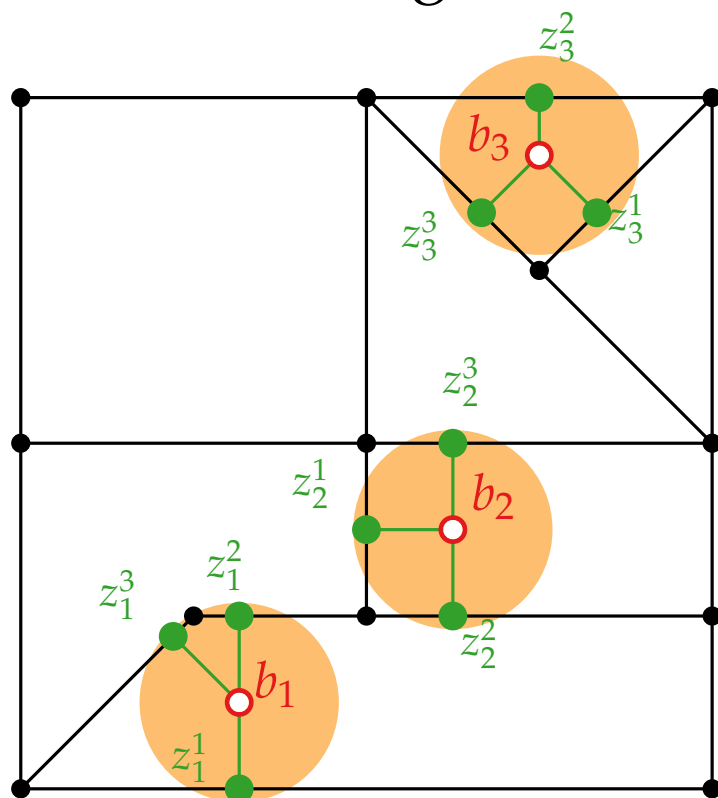
Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



- Vorgehen:**
- Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte
 - Berechne Trellis-Graph (Kanten entsprechen kürzesten Wegen in G , Kantengewichte basierend auf probabilistischem Modell)
 - Berechne $s-t$ -Pfad mit größtem Gewicht

Newson & Krumm (2009)

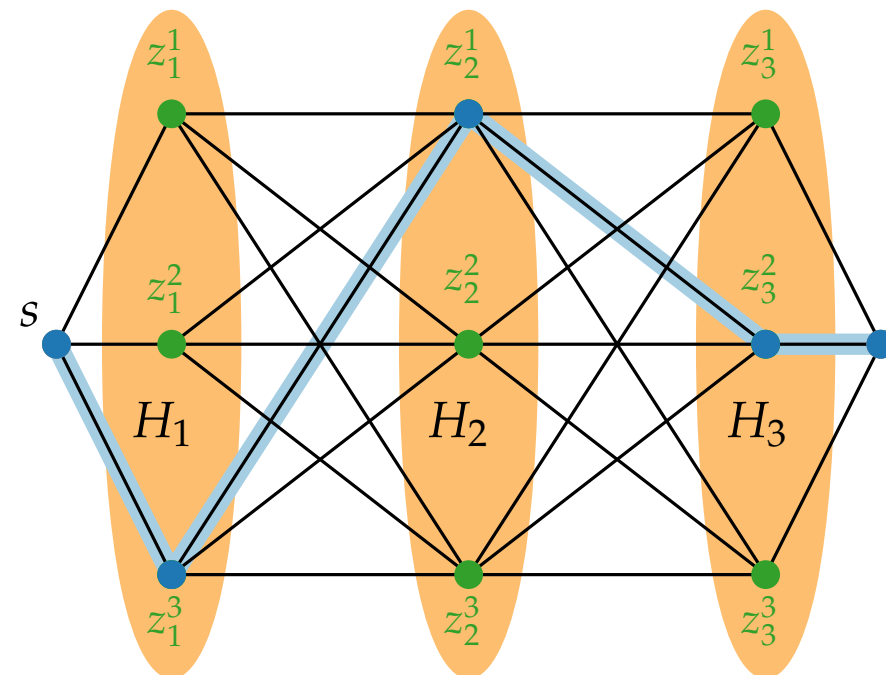
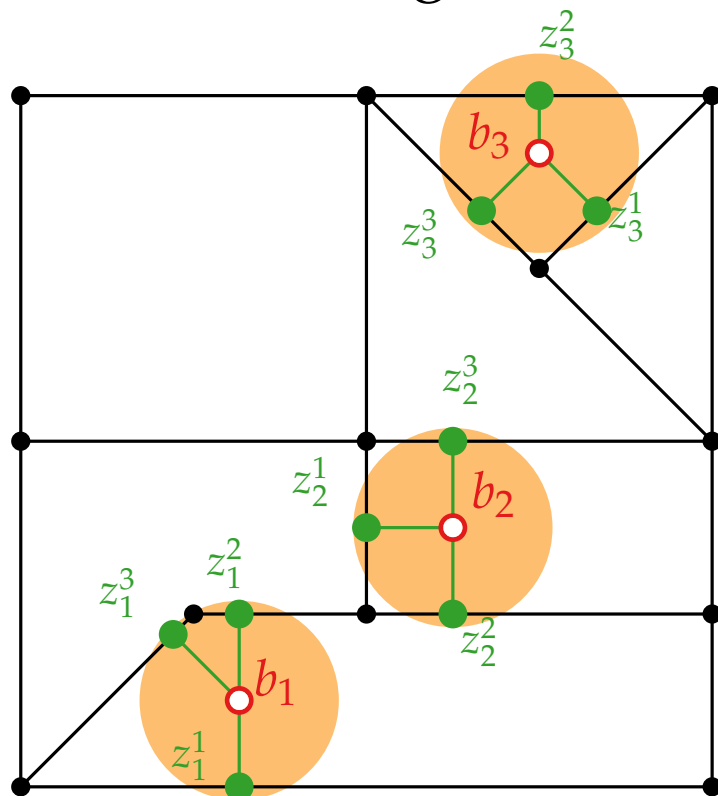
Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



- Vorgehen:**
- Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte
 - Berechne Trellis-Graph (Kanten entsprechen kürzesten Wegen in G , Kantengewichte basierend auf probabilistischem Modell)
 - Berechne s - t -Pfad mit größtem Gewicht

Newson & Krumm (2009)

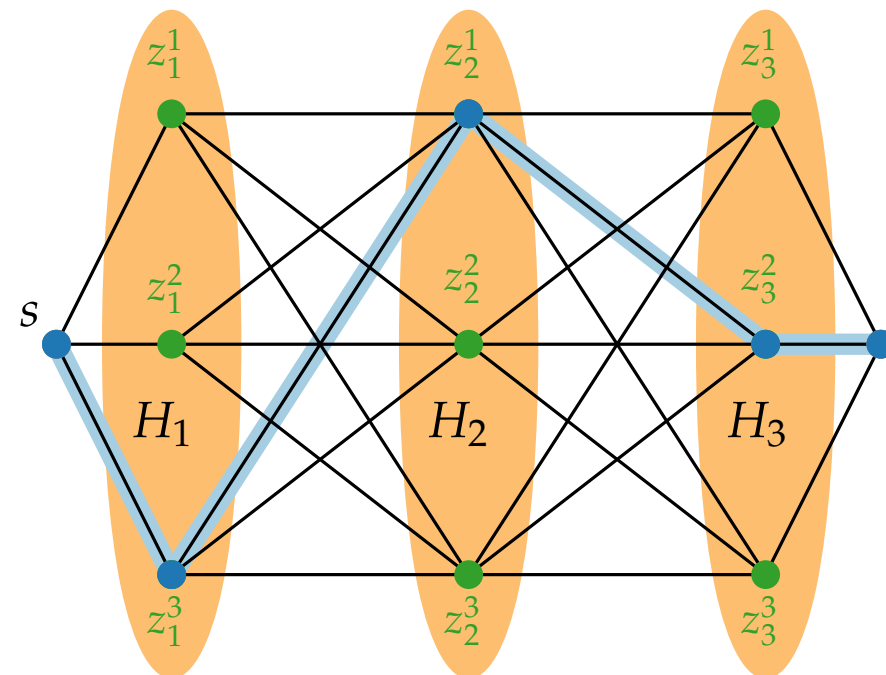
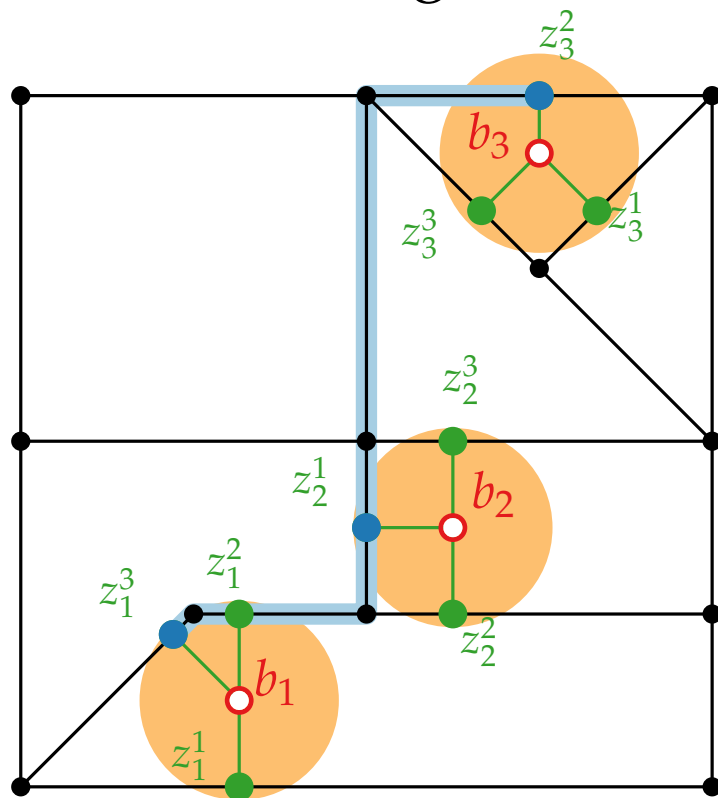
Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



- Vorgehen:**
- Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte
 - Berechne Trellis-Graph (Kanten entsprechen kürzesten Wegen in G , Kantengewichte basierend auf probabilistischem Modell)
 - Berechne s - t -Pfad mit größtem Gewicht
 - Rekonstruiere entsprechenden Graph in G

Newson & Krumm (2009)

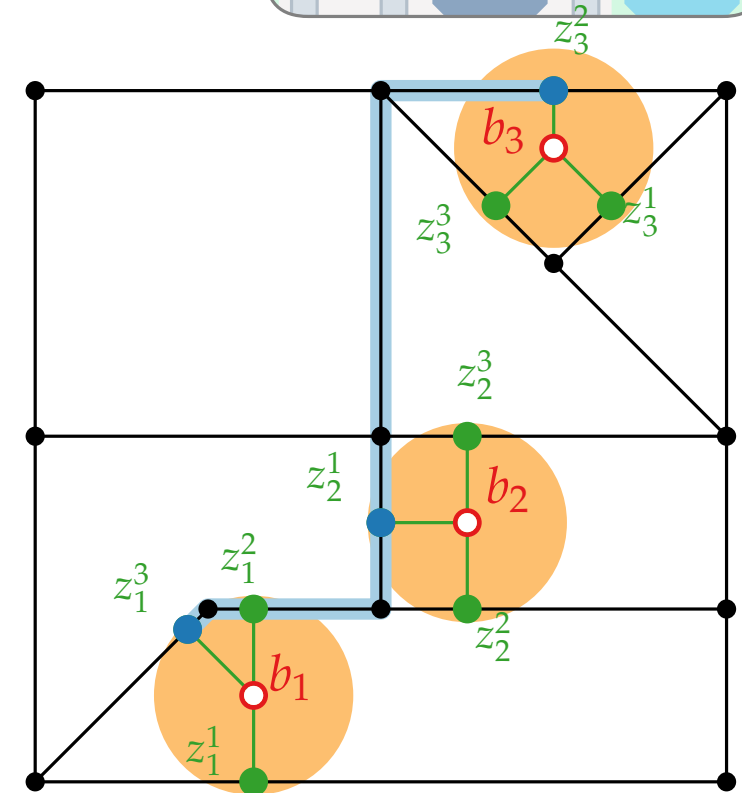
Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



- Vorgehen:**
- Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte
 - Berechne Trellis-Graph (Kanten entsprechen kürzesten Wegen in G , Kantengewichte basierend auf probabilistischem Modell)
 - Berechne s - t -Pfad mit größtem Gewicht
 - Rekonstruiere entsprechenden Graph in G

Newson & Krumm (2009)

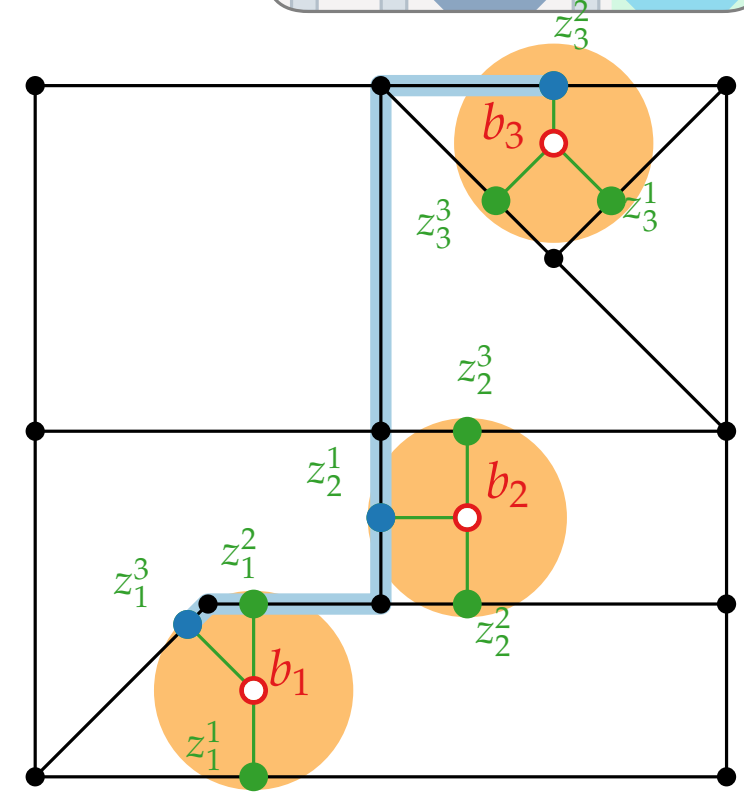
Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:



Newson & Krumm (2009)

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

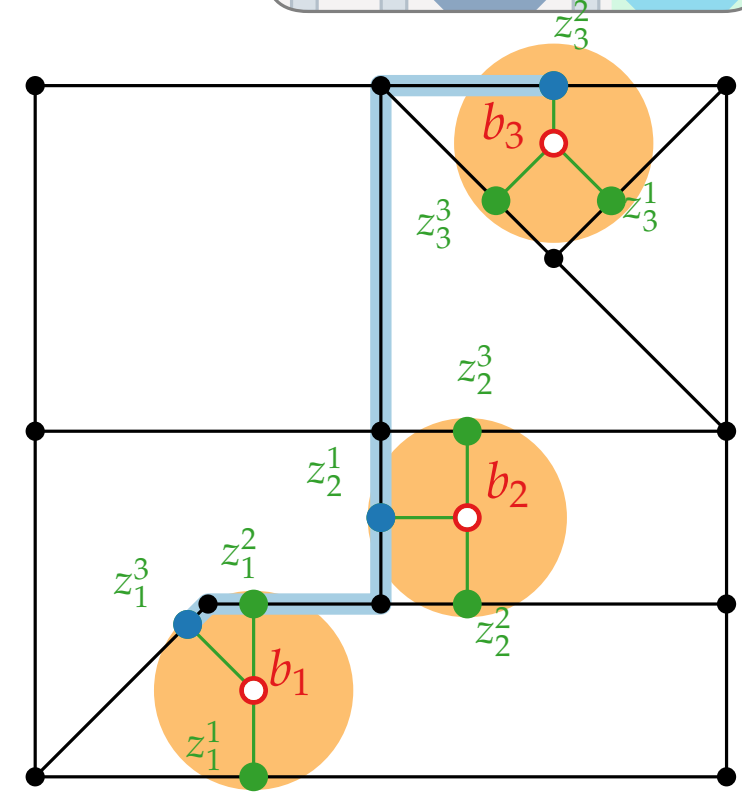
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)



Newson & Krumm (2009)

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

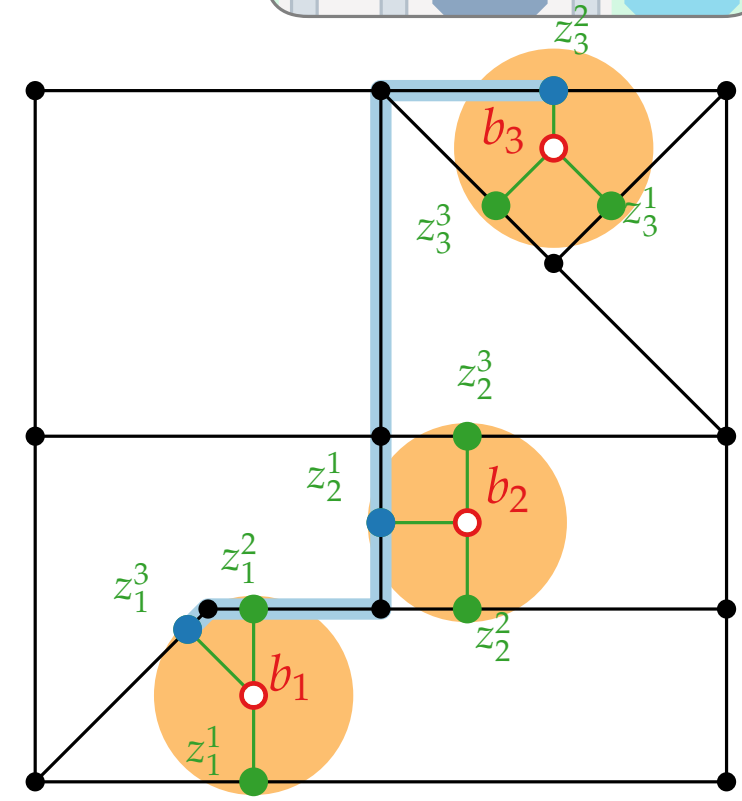
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)



Newson & Krumm (2009)

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

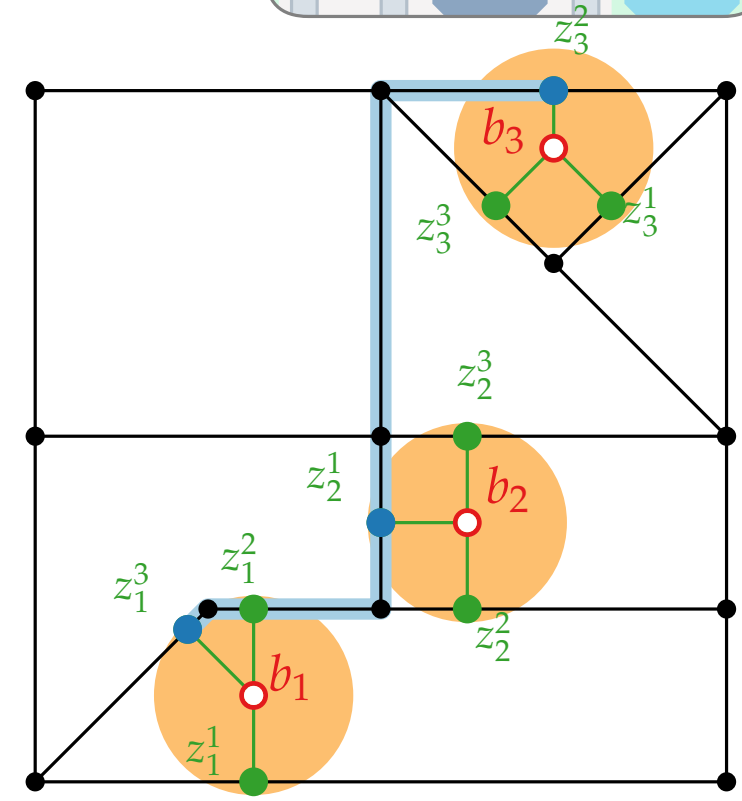
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz
(diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.



Newson & Krumm (2009)

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
 - Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
 - Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.
-
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.



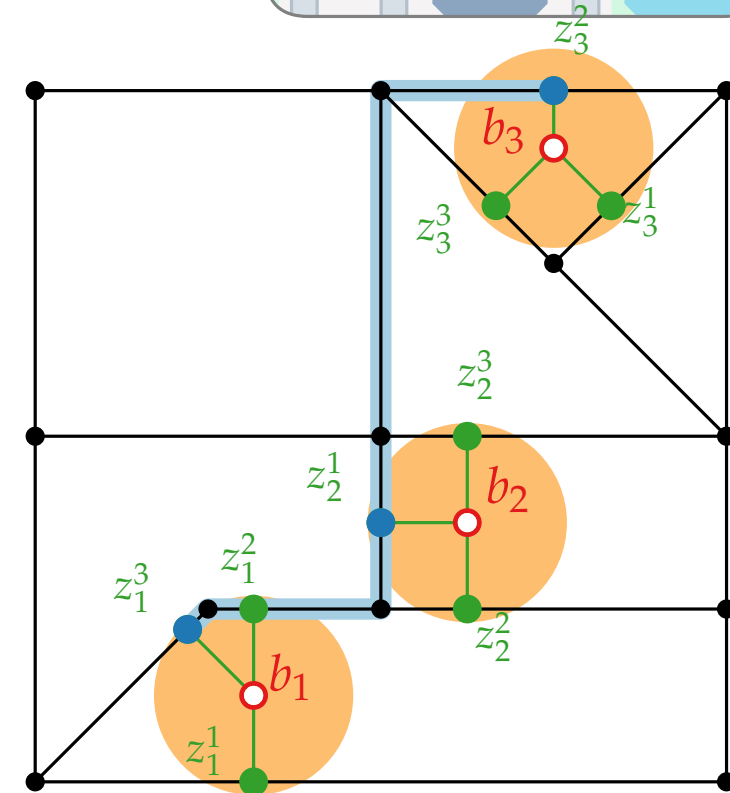
Newson & Krumm (2009)

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz, was ist die Wahrscheinlichkeit der GPS Beobachtung?

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.



Newson & Krumm (2009)

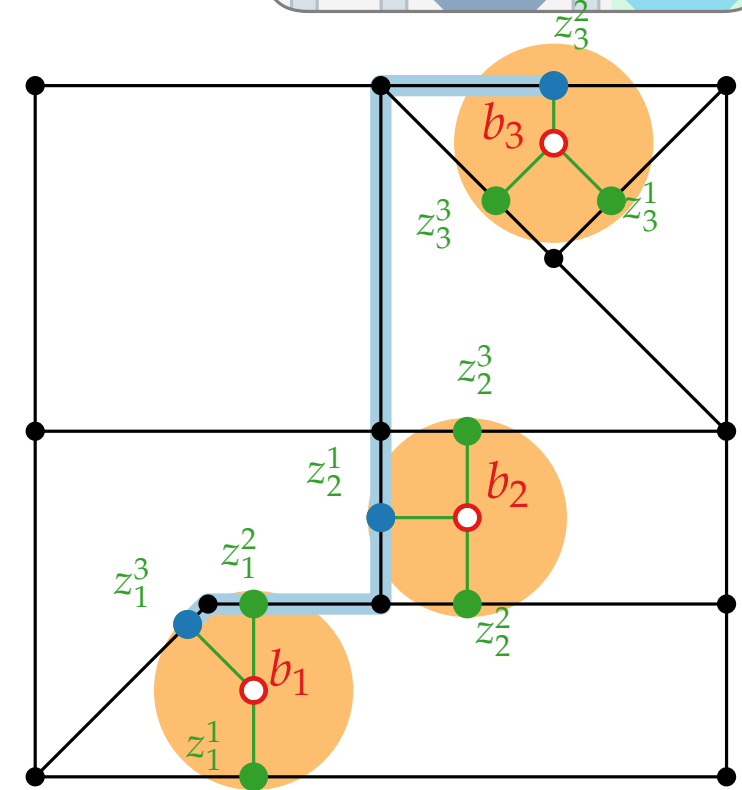
Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz, was ist die Wahrscheinlichkeit der GPS Beobachtung?

Üblicherweise wird Normalverteilung um Position im Straßennetz angenommen.

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.



Newson & Krumm (2009)

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

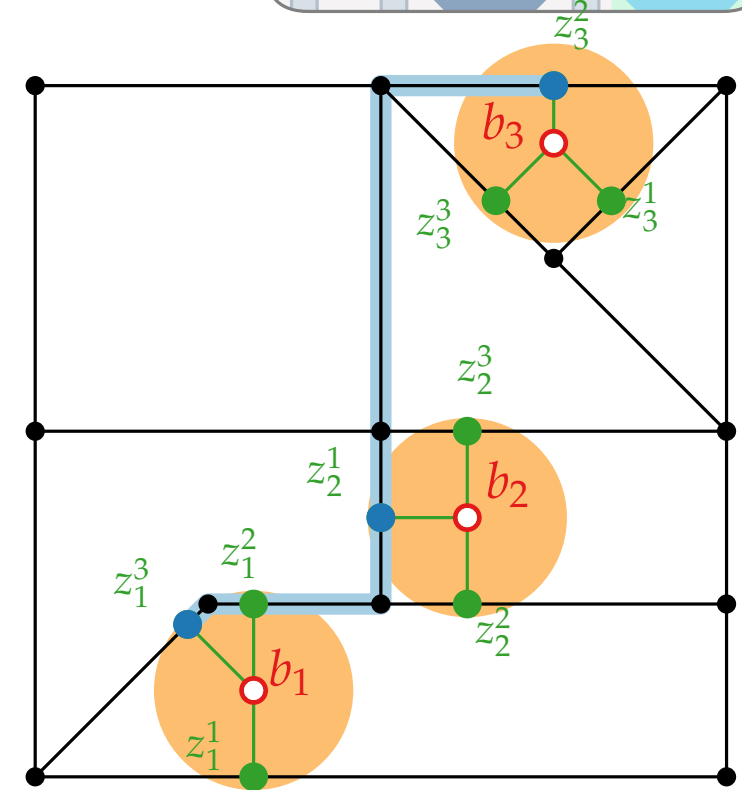
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz, was ist die Wahrscheinlichkeit der GPS Beobachtung?

Üblicherweise wird Normalverteilung um Position im Straßennetz angenommen.

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz zu Zeitpunkt $i - 1$, was ist die Wahrscheinlichkeit der Position im Straßennetz zum Zeitpunkt i ?



Newson & Krumm (2009)

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

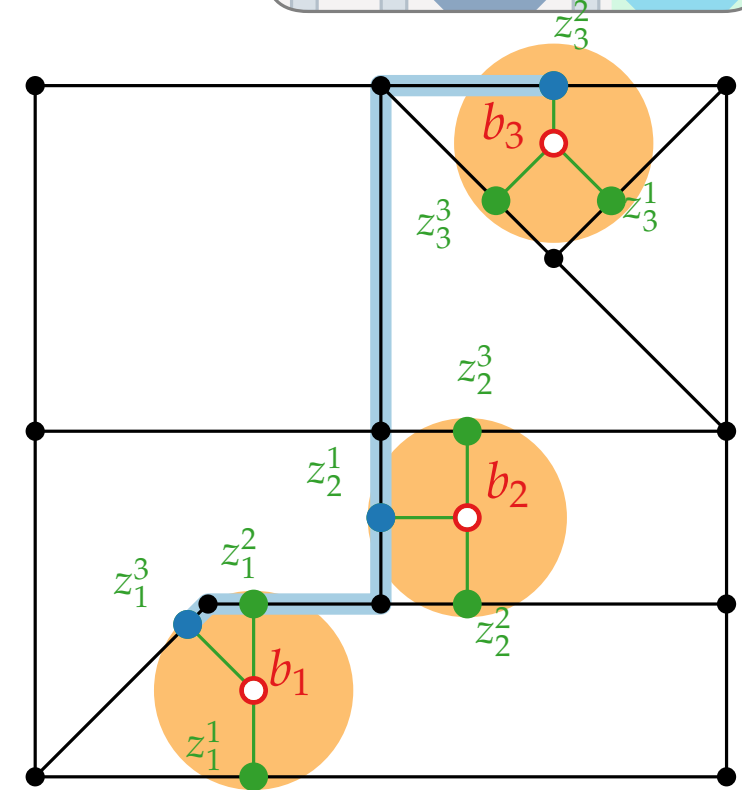
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz, was ist die Wahrscheinlichkeit der GPS Beobachtung?

Üblicherweise wird Normalverteilung um Position im Straßennetz angenommen.

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz zu Zeitpunkt $i - 1$, was ist die Wahrscheinlichkeit der Position im Straßennetz zum Zeitpunkt i ? Hängt insbesondere von Distanz zwischen den zwei Positionen im Straßennetz ab.



Newson & Krumm (2009)



Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

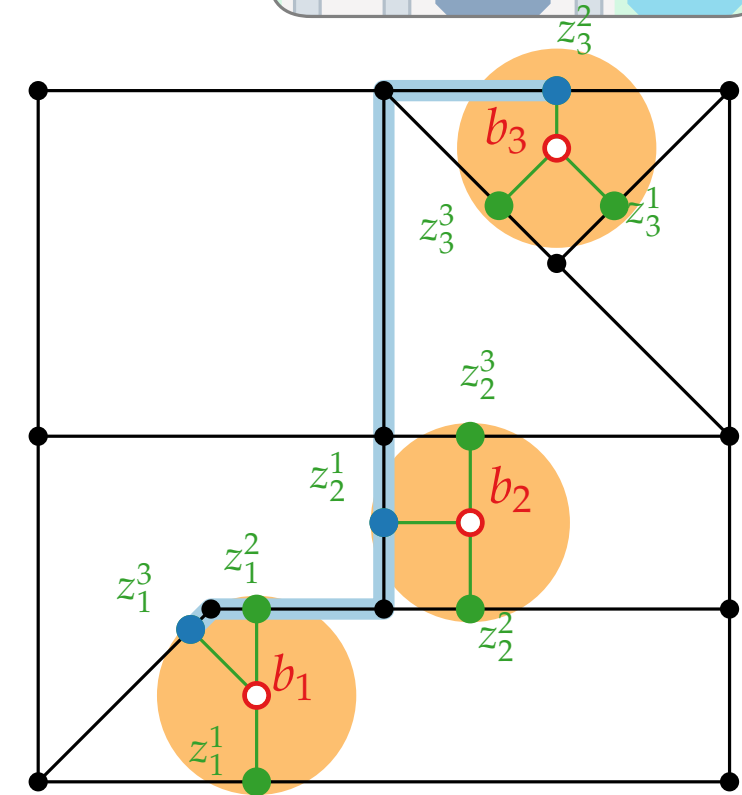
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz, was ist die Wahrscheinlichkeit der GPS Beobachtung?

Üblicherweise wird Normalverteilung um Position im Straßennetz angenommen.

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.

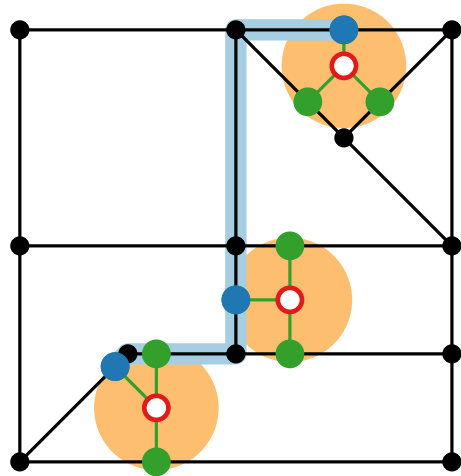
Gegeben Position im Straßennetz zu Zeitpunkt $i - 1$, was ist die Wahrscheinlichkeit der Position im Straßennetz zum Zeitpunkt i ?
Hängt insbesondere von Distanz zwischen den zwei Positionen im Straßennetz ab.



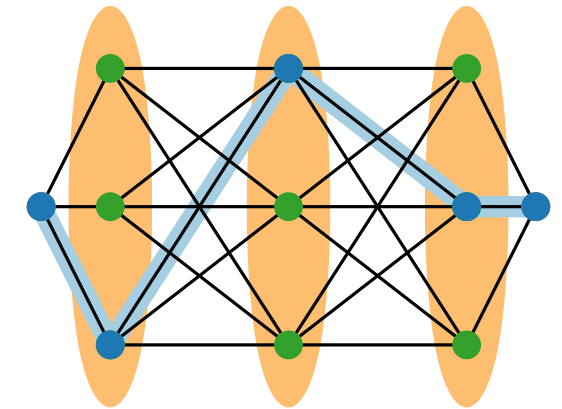
Frage: Welche Sequenz der Positionen im Straßennetzwerk ist am wahrscheinlichsten?

Algorithmen für geographische Informationssysteme

4. Vorlesung Map Matching Algorithmen



Teil III:
Methode der größten
Plausibilität



Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$

- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$
 - $P[\text{Zahl}] = 1 - p$
- Wir werfen eine Münze 3 mal.

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$
 - $P[\text{Zahl}] = 1 - p$
- Wir werfen eine Münze 3 mal.
- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$
 - $P[\text{Zahl}] = 1 - p$
- Wir werfen eine Münze 3 mal.
- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?
$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$
 - $P[\text{Zahl}] = 1 - p$
- Wir werfen eine Münze 3 mal.
- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?
$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$
- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$
 - $P[\text{Zahl}] = 1 - p$
- Wir werfen eine Münze 3 mal.
- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?
$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$
- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)
 - ➔ $P[x(K, K, Z) \mid p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$
 - $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

- Wir werfen eine Münze 3 mal.

- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?
$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)
 - ➔ $P[x(K, K, Z) \mid p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

p ist keine Zufallsvariable!

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.
 - $P[\text{Kopf}] = p$
 - $P[\text{Zahl}] = 1 - p$
- Wir werfen eine Münze 3 mal.
- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?

$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

~~$$\rightarrow P[x(K, K, Z) \mid p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$~~

p ist keine Zufallsvariable!

$$\rightarrow P[x(K, K, Z); p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$
- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

Modell

- Wir werfen eine Münze 3 mal.

- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?

$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

~~$$\rightarrow P[x(K, K, Z) \mid p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$~~

p ist keine Zufallsvariable!

$$\rightarrow P[x(K, K, Z); p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$
- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

Modell

- Wir werfen eine Münze 3 mal.

- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten?

$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

Parameter

~~$$\rightarrow P[x(K, K, Z) | p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$~~

p ist keine Zufallsvariable!

$$\rightarrow P[x(K, K, Z); p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$
- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

Modell

- Wir werfen eine Münze 3 mal.

- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten? **Ergebnis?**

$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

Parameter

~~$$\rightarrow P[x(K, K, Z) | p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$~~

p ist keine Zufallsvariable!

$$\rightarrow P[x(K, K, Z); p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. **Plausibilität**

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$
- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

Modell

- Wir werfen eine Münze 3 mal.

- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten? **Ergebnis?**

$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

Parameter

~~$$\rightarrow P[x(K, K, Z) \mid p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$~~

p ist keine Zufallsvariable!

$$\rightarrow P[x(K, K, Z); p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. **Plausibilität**

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$
- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

Modell

- Wir **haben** eine Münze 3 mal **geworfen**.

- Was ist die **Wahrscheinlichkeit**, das Ergebnis $x = (K, K, Z)$ zu erhalten? **Ergebnis?**

$$P[x(K, K, Z)] = p \cdot p \cdot (1 - p)$$

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

Parameter

~~$$\rightarrow P[x(K, K, Z) | p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$~~

p ist keine Zufallsvariable!

$$\rightarrow P[x(K, K, Z); p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. **Plausibilität**

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$
- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

Modell

- Wir **haben** eine Münze 3 mal **geworfen**.

- Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$.

Ergebnis

- Angenommen, die Münze ist fair ($p = \frac{1}{2}$)

Parameter

~~$$\rightarrow P[x(K, K, Z) | p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$~~

p ist keine Zufallsvariable!

$$\rightarrow P[x(K, K, Z); p = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Methode der größten Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. **Plausibilität**

- Wir werfen eine Münze.

- $P[\text{Kopf}] = p$
- $P[\text{Zahl}] = 1 - p$

- Wir **haben** eine Münze 3 mal **geworfen**.

- Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$.

- Was ist die ~~Wahrscheinlichkeit~~ **Plausibilität**,
dass die Münze fair ist $(p = \frac{1}{2})$?

Modell

Ergebnis

Parameter?

Plausibilitätsfunktionen



- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?

Plausibilitätsfunktionen



- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?

Plausibilitätsfunktionen



- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
- Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta \mid x)$

Plausibilitätsfunktionen



- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
- Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta \mid x) = P[x; \theta]$

Plausibilitätsfunktionen



- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
- Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta \mid x) = P[x; \theta]$
- Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
- Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta \mid x) = P[x; \theta]$
- Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$
- Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
 - Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
 - Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta \mid x) = P[x; \theta]$
 - Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$
 - Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?
- $L(p = \frac{1}{2} \mid x = (K, K, Z))$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
 - Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
 - Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta \mid x) = P[x; \theta]$
 - Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$
 - Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?
- $L(p = \frac{1}{2} \mid x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
 - Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
 - Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta \mid x) = P[x; \theta]$
 - Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$
 - Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?
- $L(p = \frac{1}{2} \mid x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?

■ Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta | x) = P[x; \theta]$

■ Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$

■ Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?

Keine Wahrscheinlichkeit!

→ $L(p = \frac{1}{2} | x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?

■ Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta | x) = P[x; \theta]$

■ Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$

■ Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?

Keine Wahrscheinlichkeit!

→ $L(p = \frac{1}{2} | x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$

→ $L(p = 0.1 | x = (K, K, Z))$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?

■ Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta | x) = P[x; \theta]$

■ Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$

■ Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?

Keine Wahrscheinlichkeit!

$$\rightarrow L(p = \frac{1}{2} | x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$$

$$\rightarrow L(p = 0.1 | x = (K, K, Z)) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9$$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?

■ Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta | x) = P[x; \theta]$

■ Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$

■ Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?

Keine Wahrscheinlichkeit!

$$\rightarrow L(p = \frac{1}{2} | x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$$

$$\rightarrow L(p = 0.1 | x = (K, K, Z)) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,009$$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?

■ Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta | x) = P[x; \theta]$

■ Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$

■ Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?

Keine Wahrscheinlichkeit!

$$\rightarrow L(p = \frac{1}{2} | x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$$

$$\rightarrow L(p = 0.1 | x = (K, K, Z)) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,009$$

$$\rightarrow L(p = \frac{2}{3} | x = (K, K, Z))$$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?

■ Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta | x) = P[x; \theta]$

■ Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$

■ Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?

Keine Wahrscheinlichkeit!

$$\rightarrow L(p = \frac{1}{2} | x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$$

$$\rightarrow L(p = 0.1 | x = (K, K, Z)) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,009$$

$$\rightarrow L(p = \frac{2}{3} | x = (K, K, Z)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$



Plausibilitätsfunktionen

- Gegeben ein Parameterwert θ , wie **wahrscheinlich** ist das Ergebnis x ?
- Gegeben ein Ergebnis x , wie **plausibel** ist ein bestimmter Parameterwert θ ?
- Definiere Plausibilitätsfunktion $L(\theta | x) = P[x; \theta]$
- Das Ergebnis war $x = (K, K, Z)$
- Wie **plausibel** ist es, dass die Münze fair ist ($p = \frac{1}{2}$)?

Keine Wahrscheinlichkeit!

$$\rightarrow L(p = \frac{1}{2} | x = (K, K, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125$$

$$\rightarrow L(p = 0.1 | x = (K, K, Z)) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,009$$

$$\rightarrow L(p = \frac{2}{3} | x = (K, K, Z)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,\overline{148}$$

Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität



Wahrscheinlichstes Ergebnis

Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$

Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)

Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}]$



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,\overline{296}$



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,\overline{296}$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}]$



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,\overline{296}$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,\overline{296}$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,\overline{148}$



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,\overline{296}$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,\overline{148}$

Größte Plausibilität



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,\overline{296}$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,\overline{148}$

Größte Plausibilität

- Gegeben Ergebnis $x = (Z, K, Z)$



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,296$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,148$

Größte Plausibilität

- Gegeben Ergebnis $x = (Z, K, Z)$
- Die größte Plausibilität ist $p = \frac{1}{3}$



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,296$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,148$

Größte Plausibilität

- Gegeben Ergebnis $x = (Z, K, Z)$
- Die größte Plausibilität ist $p = \frac{1}{3}$
 - ➔ Der Wert von p „explärt das Ergebnis am Besten“



Wahrscheinlichkeit vs. Plausibilität

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben Parameter $p = \frac{2}{3}$
- Das wahrscheinlichste Ergebnis ist (K, K, K)
 - ➔ $P[x = (K, K, K); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,296$
 - ➔ $P[x = (K, K, Z); p = \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,148$

Größte Plausibilität

- Gegeben Ergebnis $x = (Z, K, Z)$
- Die größte Plausibilität ist $p = \frac{1}{3}$
 - ➔ Der Wert von p „explärt das Ergebnis am Besten“
 - ➔ Der Wert von p macht das Ergebnis „am wenigsten überraschend“

Zurück zu Karten



Zurück zu Karten

Modell?



Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?



Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Zurück zu Karten

Wahrscheinlichstes Ergebnis

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Zurück zu Karten

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?

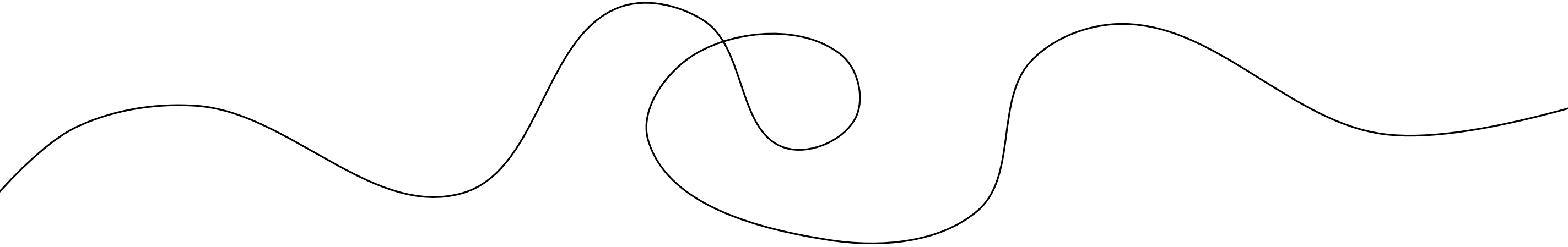
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



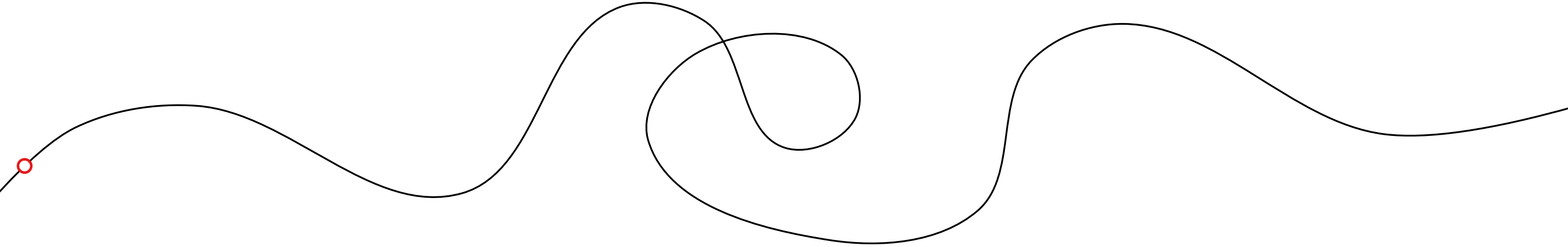


Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



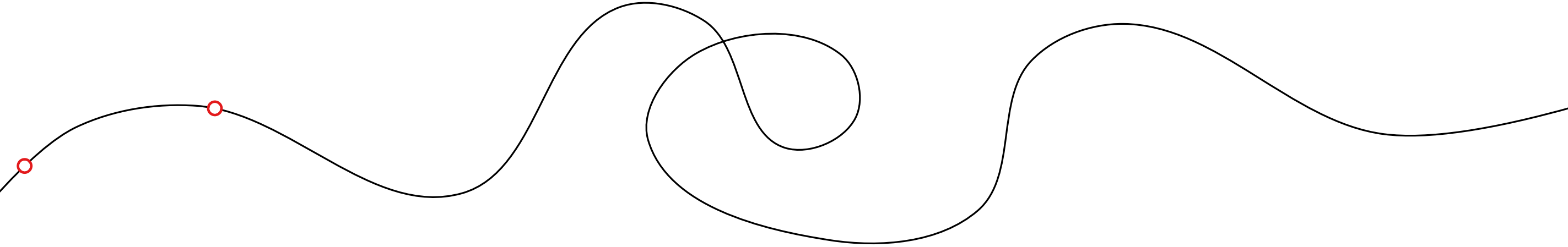
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



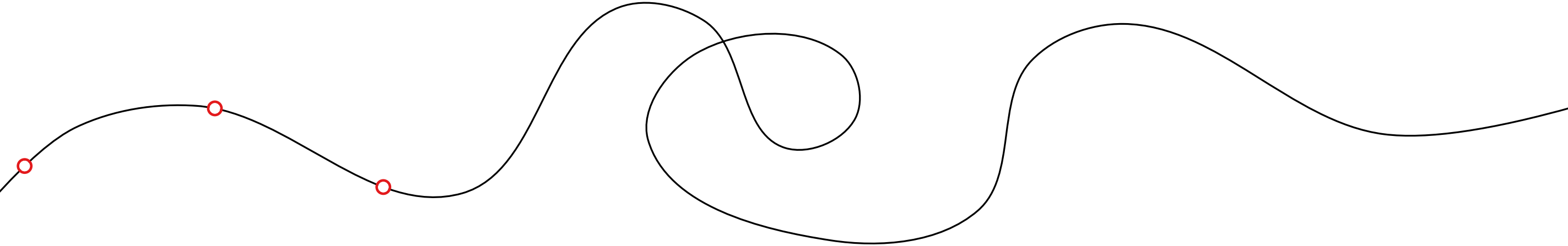
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



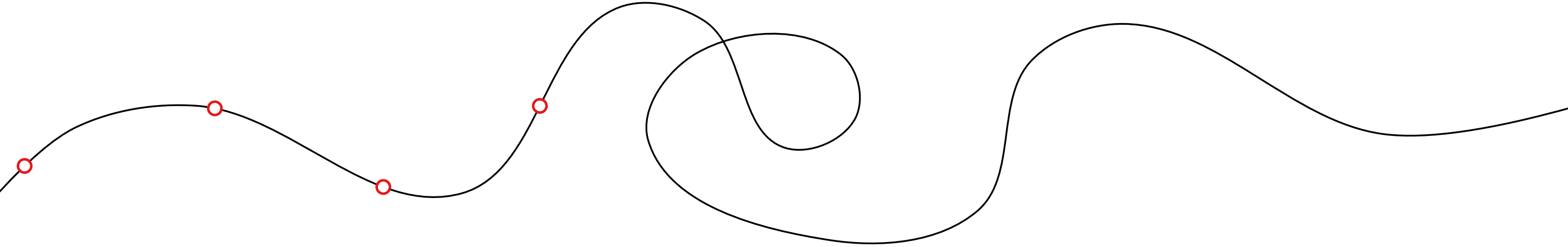
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



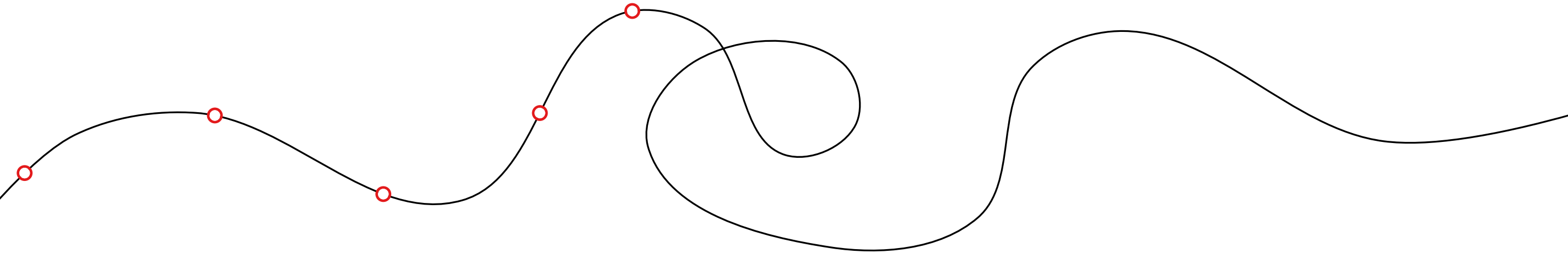
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



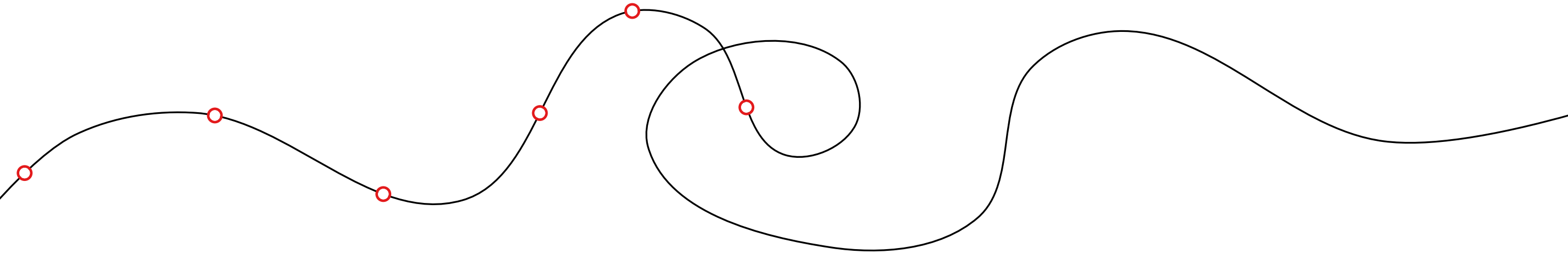
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



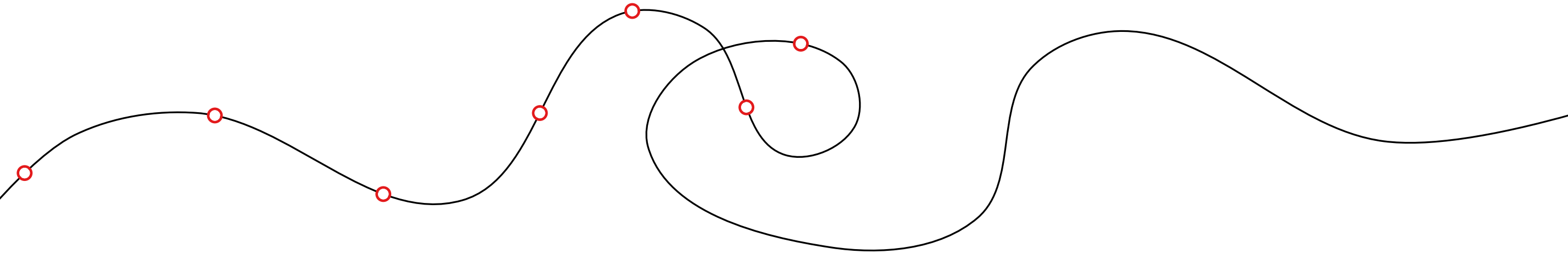
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



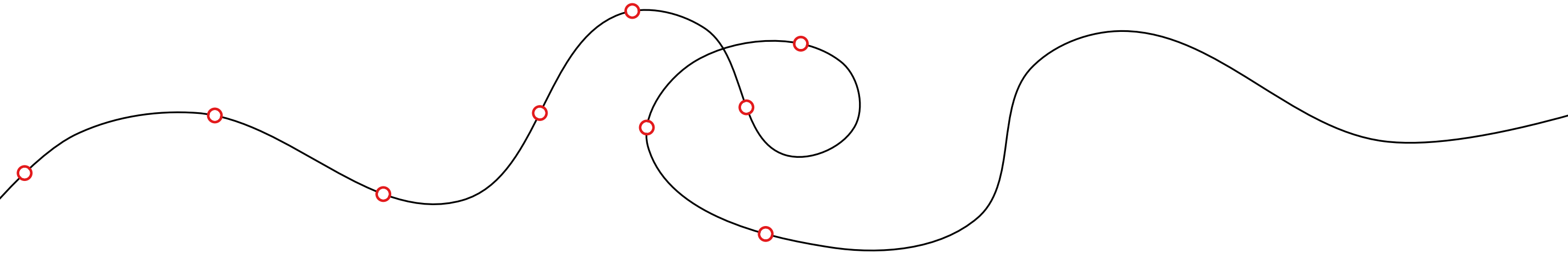
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



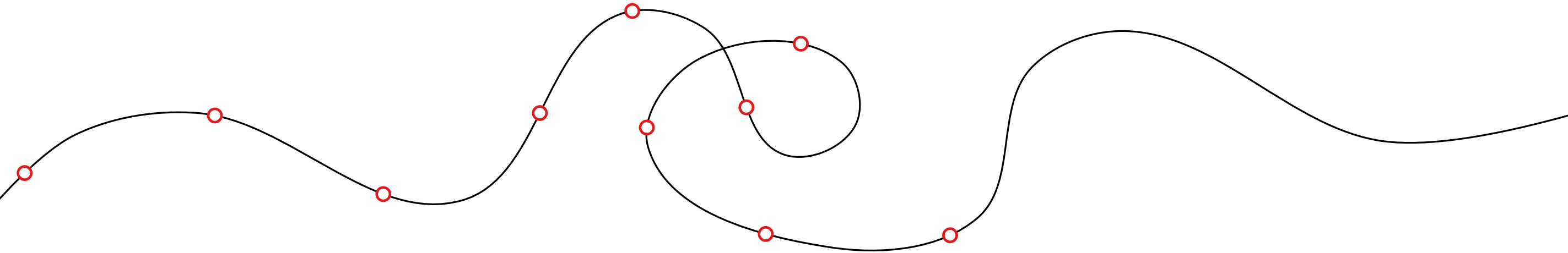
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?





Zurück zu Karten

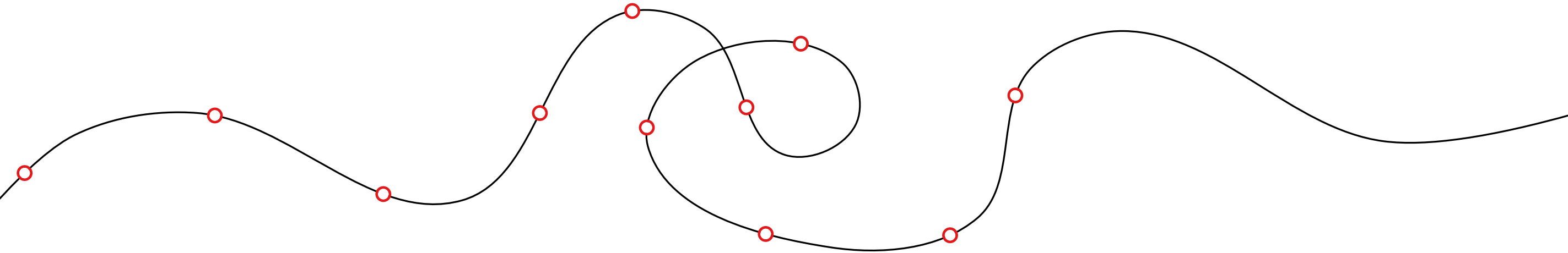
Modell?

Parameter?

Ergebnis?

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?





Zurück zu Karten

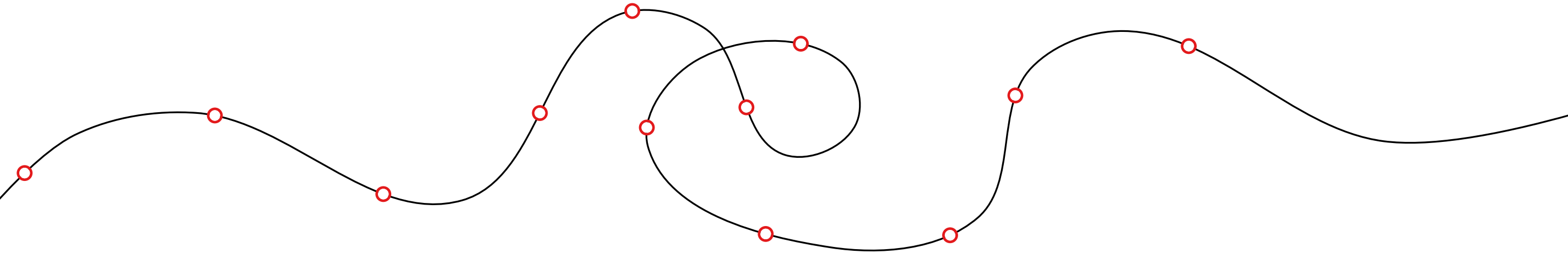
Modell?

Parameter?

Ergebnis?

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



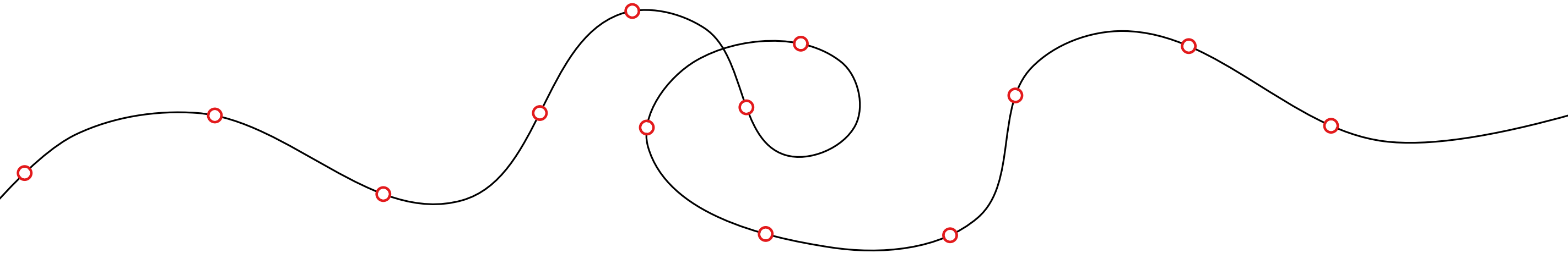
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



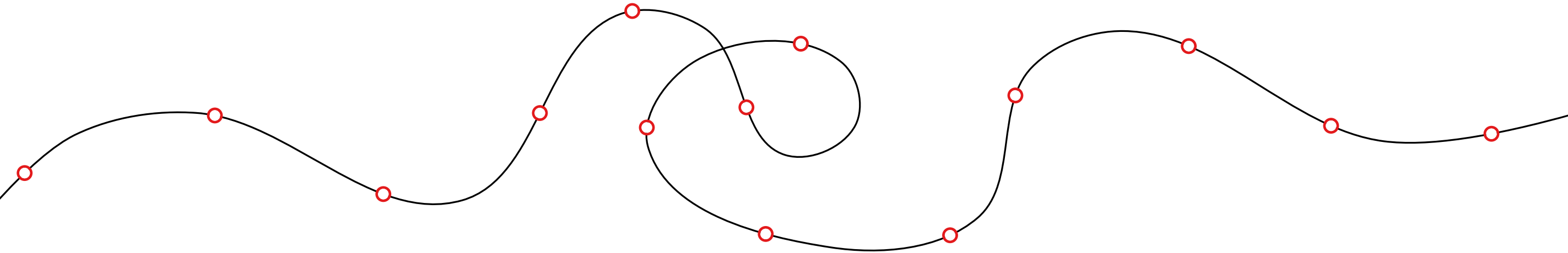
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet?



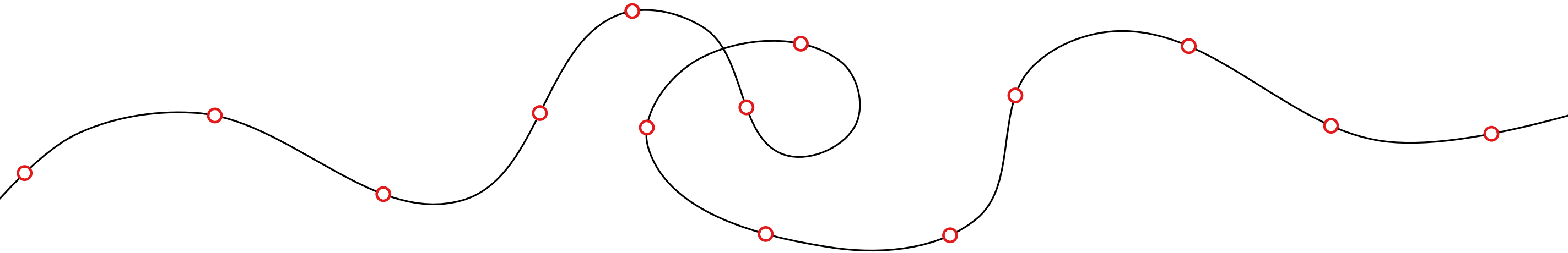
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet? (mit Ungenauigkeit?)



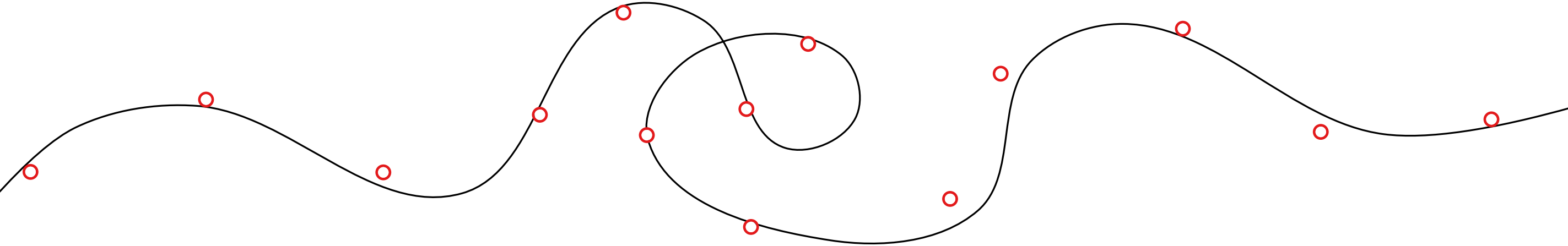
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet? (mit Ungenauigkeit?)



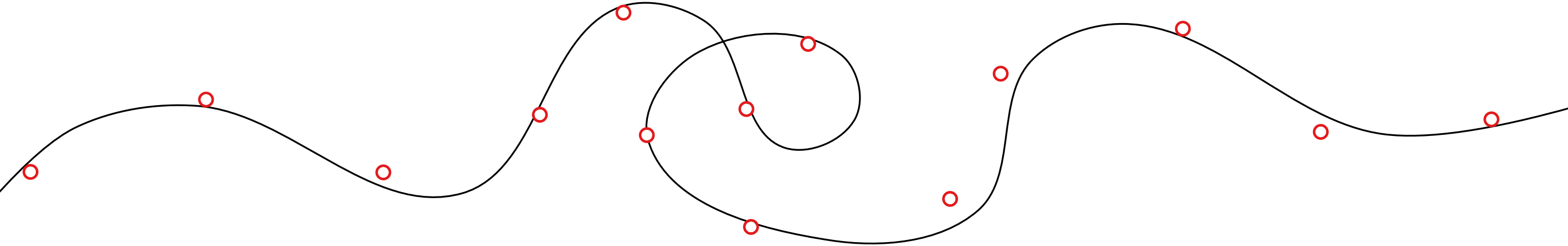
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet? (mit Ungenauigkeit?)



Größte Plausibilität

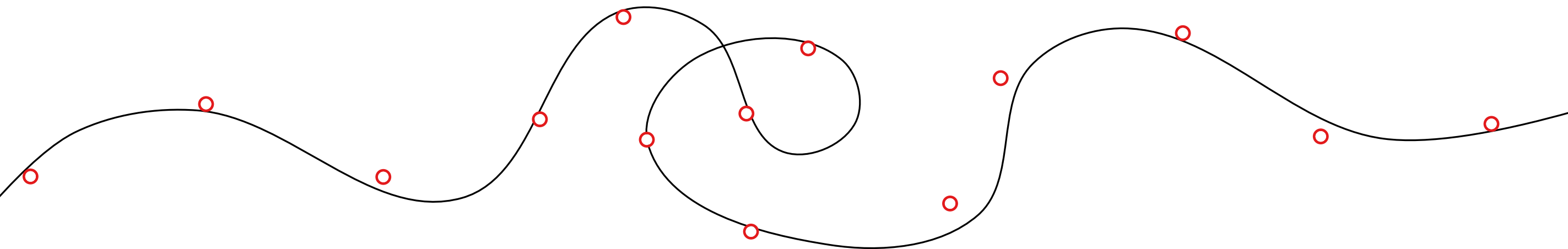


Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet? (mit Ungenauigkeit?)



Größte Plausibilität

- Gegeben eine beobachtete GPS Trajektorie



Zurück zu Karten

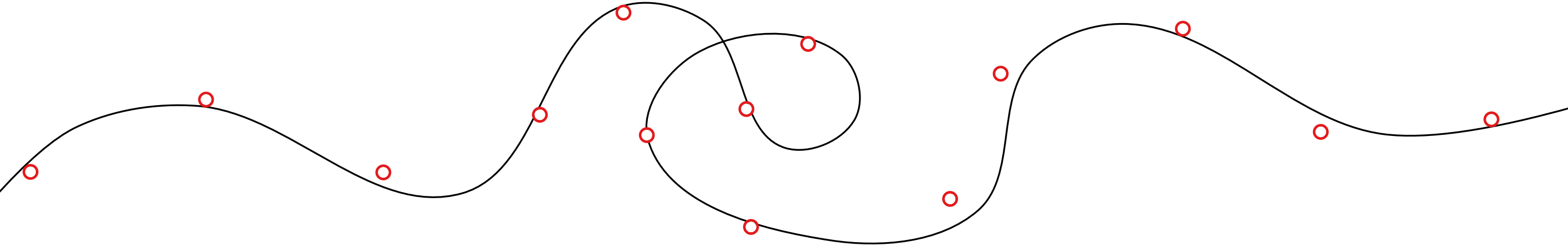
Modell?

Parameter?

Ergebnis?

Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet? (mit Ungenauigkeit?)



Größte Plausibilität

- Gegeben eine beobachtete GPS Trajektorie
- Welcher Pfad im Straßennetz ist am plausibelsten?

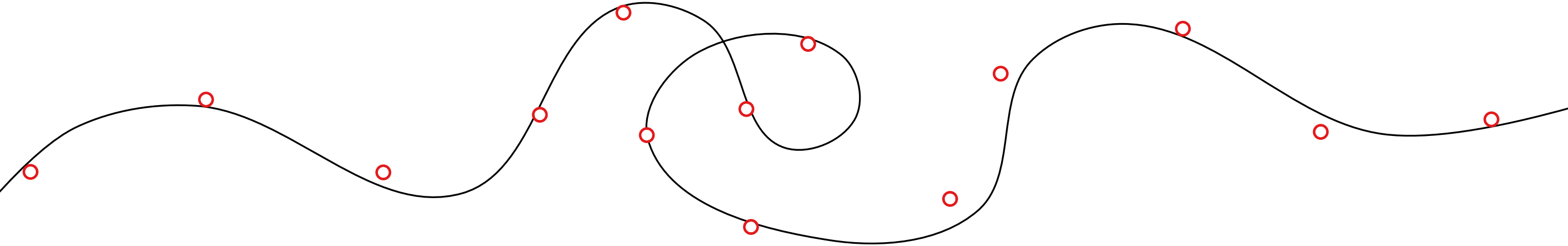
Zurück zu Karten

Modell?
Parameter?
Ergebnis?



Wahrscheinlichstes Ergebnis

- Gegeben ein Pfad im Straßennetz
- Welche GPS Trajektorie wird am wahrscheinlichsten beobachtet? (mit Ungenauigkeit?)

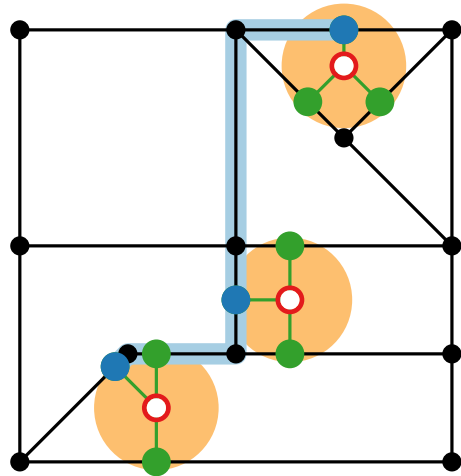


Größte Plausibilität

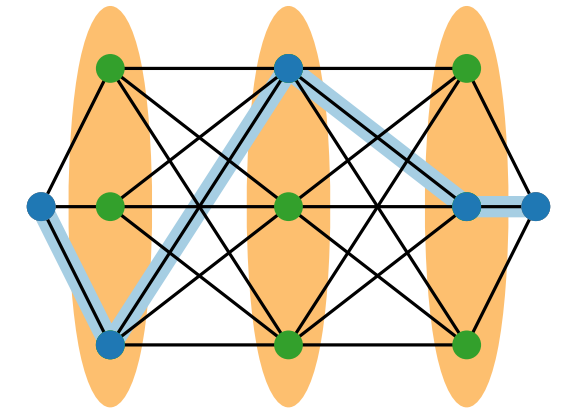
- Gegeben eine beobachtete GPS Trajektorie
- Welcher Pfad im Straßennetz ist am plausibelsten?
- „Welcher Pfad durchs Straßennetz erklärt am Besten die beobachtete Trajektorie?“

Algorithmen für geographische Informationssysteme

4. Vorlesung Map Matching Algorithmen



Teil IV:
Markow-Ketten



Markow-Ketten

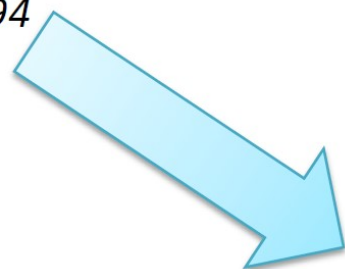


Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

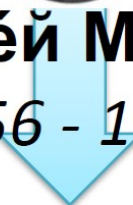
Markow-Ketten



Пафну́тий Чебышёв
1821 - 1894



Андре́й Ма́рков
1856 - 1922



Гео́ргій Воро́ний
1868 - 1908



Бори́с Делоне́
1890 - 1980



Wacław Sierpiński
1882 - 1969

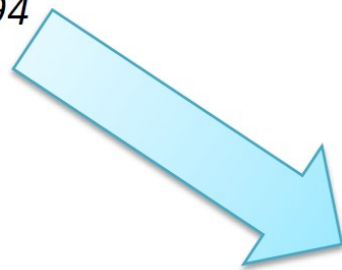


Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Chebyshev
1821 - 1894



Markov
1856 - 1922



Voronoi
1856 - 1922



Delaunay
1890 - 1980



Sierpinski
1882 - 1969



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$P[X_{n+1} \mid \quad]$$



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$P[X_{n+1} \mid X_n = x_n] \quad]$$



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$P[X_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}]$$



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$P[X_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots]$$



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$P[X_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1]$$



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} &P[X_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1] \\ &= P[X_{n+1} \mid X_n = x_n] \end{aligned}$$



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$P[X_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1] \\ = P[X_{n+1} \mid X_n = x_n]$$

„Wenn man die Gegenwart kennt, ist die Zukunft unabhängig von der Vergangenheit.“



Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten



Gegeben Sequenz von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$

Markow-Eigenschaft:

$$P[X_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1] \\ = P[X_{n+1} \mid X_n = x_n]$$

„Wenn man die Gegenwart kennt, ist die Zukunft unabhängig von der Vergangenheit.“

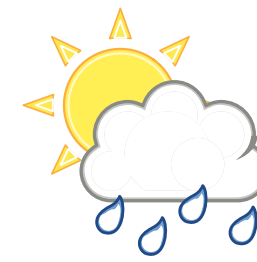
Wir schreiben $P[X_1]$, $P[X_2 \mid X_1]$, $P[X_3 \mid X_2]$, etc ...



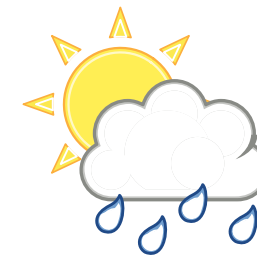
Andrei Andrejewitsch Markow
*1856, Rjasan
†1922, Petrograd

Markow-Ketten – Beispiel

Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne, Regen}\}$.



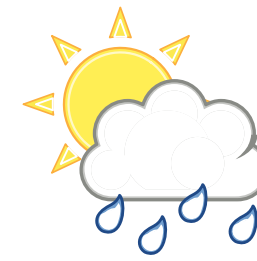
Markow-Ketten – Beispiel



Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

■ $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$

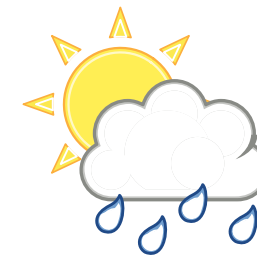
Markow-Ketten – Beispiel



Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$

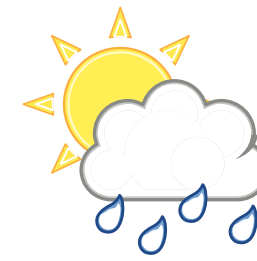
Markow-Ketten – Beispiel



Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne, Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$

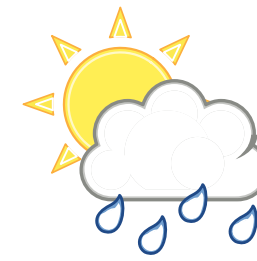
Markow-Ketten – Beispiel



Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$

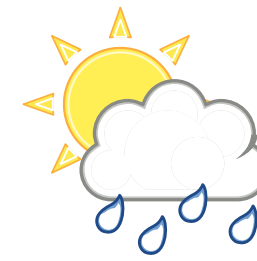
Markow-Ketten – Beispiel



Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne, Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,2$

Markow-Ketten – Beispiel

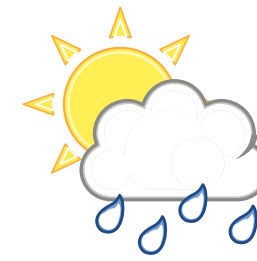


Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne, Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$

- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,2$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,8$

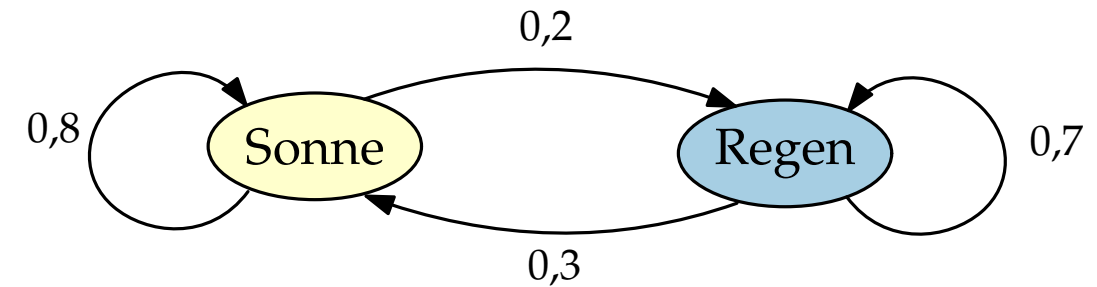
Markow-Ketten – Beispiel



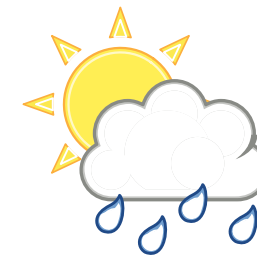
Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$

- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,2$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,8$



Markow-Ketten – Beispiel

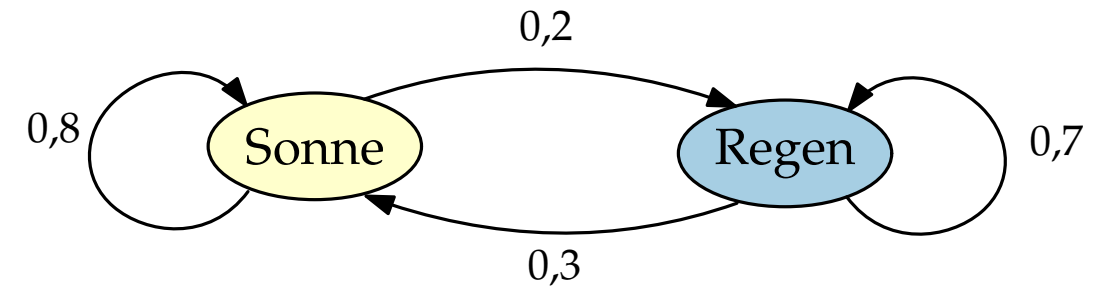


Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

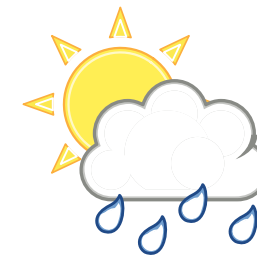
- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$

- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,2$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,8$

- $P[X_2 = \text{Regen}] = 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,21 + 0,14 = 0,35$



Markow-Ketten – Beispiel

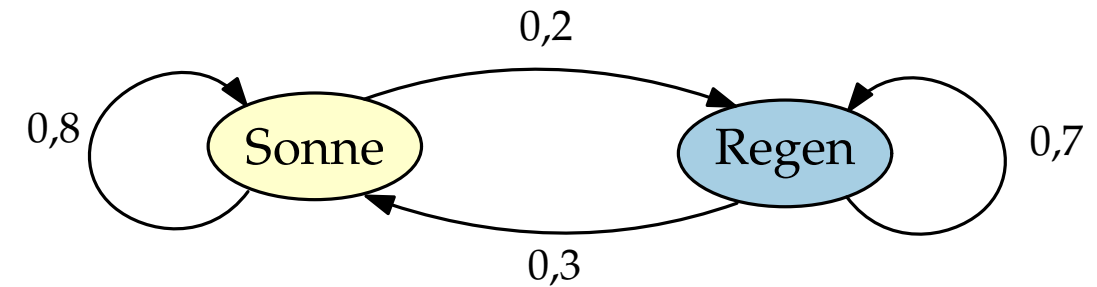


Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

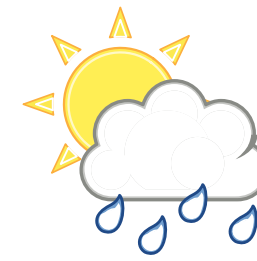
- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$

- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,2$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,8$

- $P[X_2 = \text{Regen}] = 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,21 + 0,14 = 0,35$
- $P[X_2 = \text{Sonne}] = 0,65$



Markow-Ketten – Beispiel



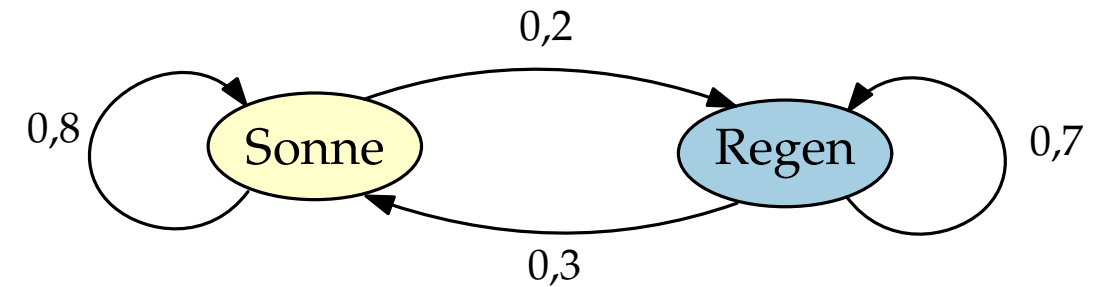
Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$

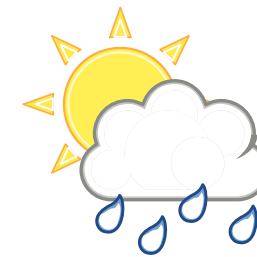
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$
- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,2$
- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,8$

- $P[X_2 = \text{Regen}] = 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,21 + 0,14 = 0,35$
- $P[X_2 = \text{Sonne}] = 0,65$

- $P[X_3 = \text{Regen}] = 0,375$



Markow-Ketten – Beispiel



Zwei mögliche Zustände: $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$.

- $P[X_1 = \text{Regen}] = 0,3$

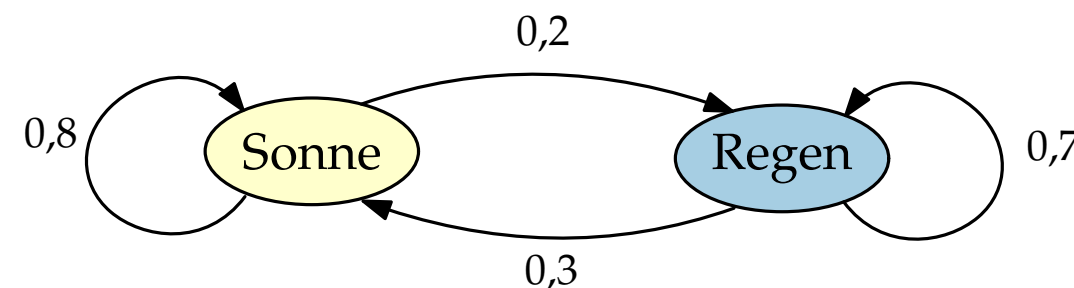
- $P[X_1 = \text{Sonne}] = 0,7$

- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,7$

- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Regen}] = 0,3$

- $P[X_{n+1} = \text{Regen} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,2$

- $P[X_{n+1} = \text{Sonne} \mid X_n = \text{Sonne}] = 0,8$



- $P[X_2 = \text{Regen}] = 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,21 + 0,14 = 0,35$

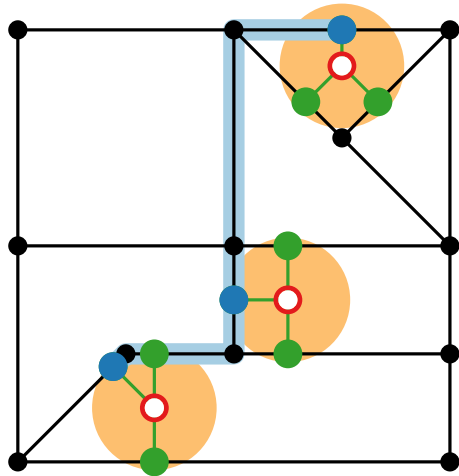
- $P[X_2 = \text{Sonne}] = 0,65$

- $P[X_3 = \text{Regen}] = 0,375$

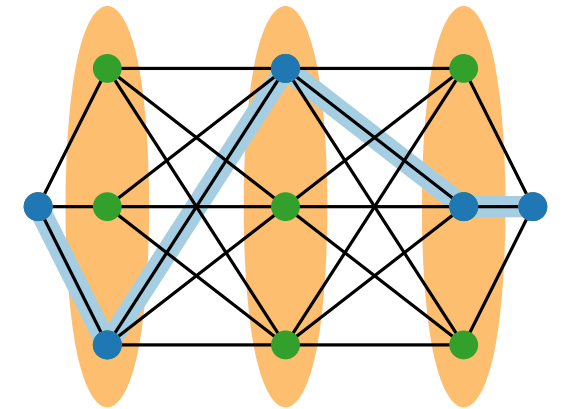
- $P[X_3 = \text{Sonne}] = 0,625$

Algorithmen für geographische Informationssysteme

4. Vorlesung Map Matching Algorithmen



Teil V:
Verdecktes Markow-Modell



Verdecktes Markow-Modell



Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

Verdecktes Markow-Modell



Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

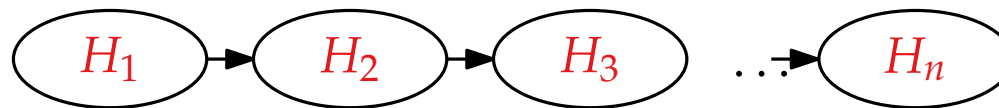
- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**



Zustände

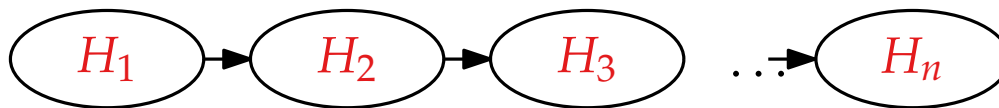


Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!



Zustände

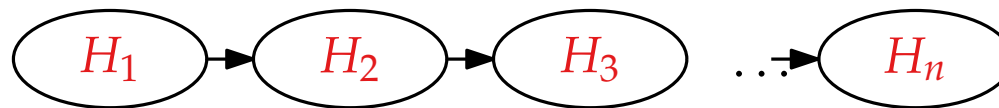


Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!



Verdeckte Variablen (Zustände)



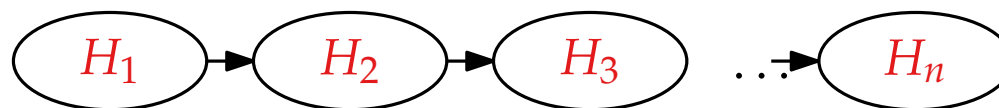
Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.



Verdeckte Variablen (Zustände)



Verdecktes Markow-Modell

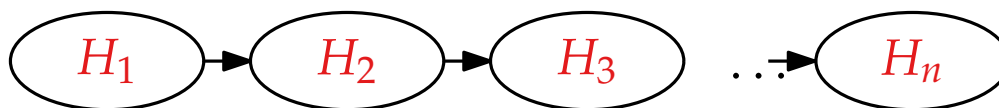
Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**



Verdeckte Variablen (Zustände)



Verdecktes Markow-Modell

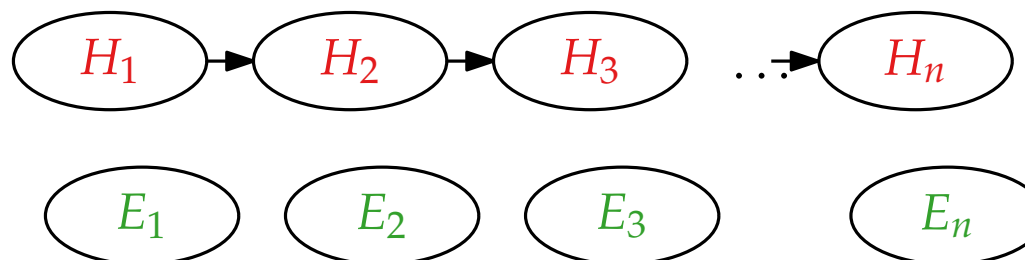
Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**



Verdeckte Variablen (Zustände)

Emissionen



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

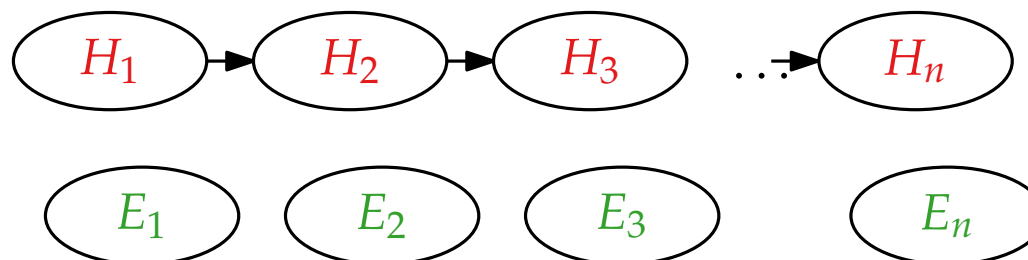
- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**

- Beobachtbare Ausgabesymbole



Verdeckte Variablen (Zustände)

Emissionen



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

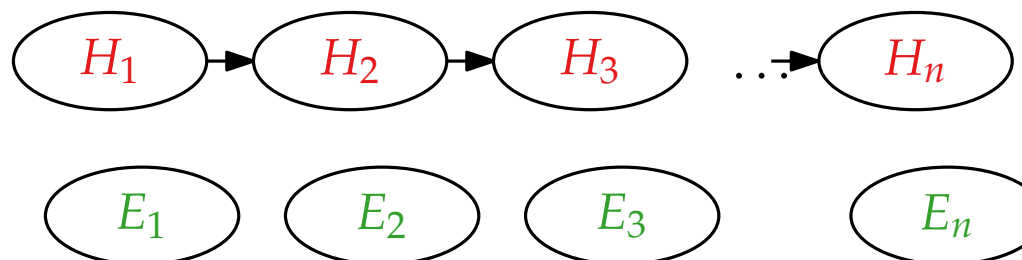
- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**

- Beobachtbare Ausgabesymbole



Verdeckte Variablen (Zustände)

Beobachtete Variablen (Emissionen)



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

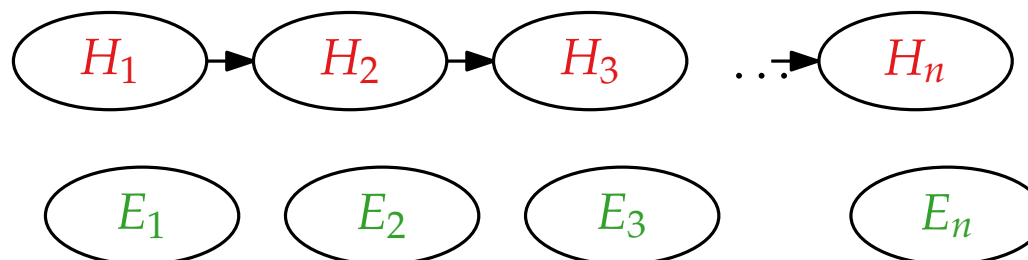
- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**

- Beobachtbare Ausgabesymbole
- Eine Emission pro Zeitpunkt



Verdeckte Variablen (Zustände)

Beobachtete Variablen (Emissionen)



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

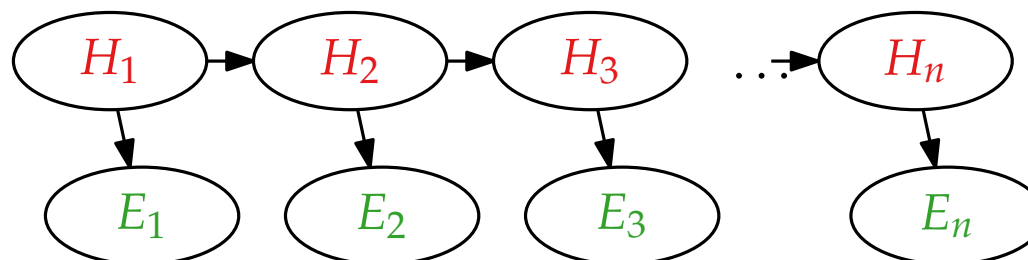
- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**

- Beobachtbare Ausgabesymbole
- Eine Emission pro Zeitpunkt



Verdeckte Variablen (Zustände)

Beobachtete Variablen (Emissionen)



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

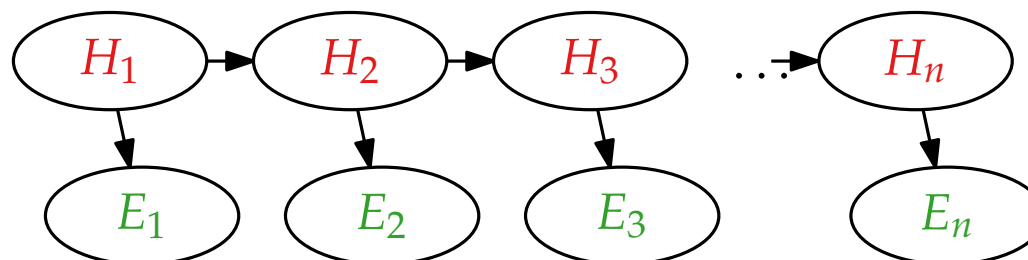
- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**

- Beobachtbare Ausgabesymbole
- Eine Emission pro Zeitpunkt
- Je nach Zustand unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten



Verdeckte Variablen (Zustände)

Beobachtete Variablen (Emissionen)



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

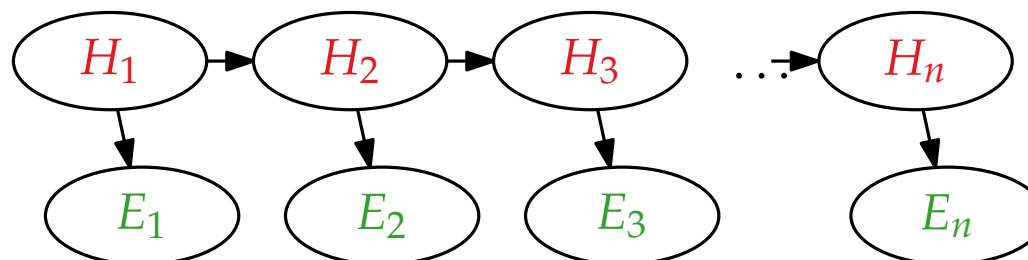
- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**

- Beobachtbare Ausgabesymbole
- Eine Emission pro Zeitpunkt
- Je nach Zustand unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten
- Emissionen in jedem Schritt unabhängig



Verdeckte Variablen (Zustände)

Beobachtete Variablen (Emissionen)



Verdecktes Markow-Modell

Modelliert ein System durch eine Markow-Kette

- Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten **Zustand**

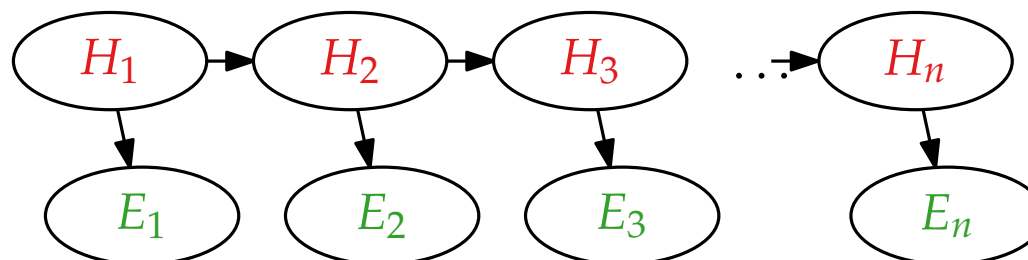
Aber: der Zustand ist **verdeckt**!

- Wir können den Zustand nicht beobachten.

Wir bekommen nur **Emissionen**

- Beobachtbare Ausgabesymbole
- Eine Emission pro Zeitpunkt
- Je nach Zustand unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten
- Emissionen in jedem Schritt unabhängig

Ziel ist es, aus den Emissionen auf die plausibelsten verdeckten Zustände zu schließen.



Verdeckte Variablen (Zustände)

Beobachtete Variablen (Emissionen)

Verdecktes Markow-Modell



Gegeben:

Verdecktes Markow-Modell



Gegeben: ■ Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt

Verdecktes Markow-Modell



- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z

Verdecktes Markow-Modell



- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$

dass b bei Zustand z beobachtet wird



Verdecktes Markow-Modell

Gegeben:

- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
- Mögliche Systemzustände Z
- Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$

Falls diskreter Zustandsraum

dass b bei Zustand z beobachtet wird



Verdecktes Markow-Modell

Gegeben:

- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
- Mögliche Systemzustände Z
- Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$,dass b bei Zustand z beobachtet wird

Falls diskreter Zustandsraum

Falls kontinuierlicher Zustandsraum



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraumdass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)



Verdecktes Markow-Modell

Gegeben:

- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
- Mögliche Systemzustände Z
- Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraumdass b bei Zustand z beobachtet wird
- Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
- Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$



Verdecktes Markow-Modell

Gegeben:

- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
- Mögliche Systemzustände Z
- Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraumdass b bei Zustand z beobachtet wird
- Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
- Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$

Gesucht:



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraum
 dass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
 - Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$
- Gesucht:** Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraumdass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
 - Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$
- Gesucht:** Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, die sich am Besten mit den gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $P[Z \mid B]$ maximiert.



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraum
 dass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
 - Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$
- Gesucht:** Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, die sich am Besten mit den gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $P[Z \mid B]$ maximiert.

$$P[Z \mid B]$$



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraum

dass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
 - Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, die sich am Besten mit den gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $P[Z \mid B]$ maximiert.

Satz von Bayes

$$P[Z \mid B] = P[B \mid Z] \cdot P[Z] / P[B]$$



Thomas Bayes
 *1701, London
 †1761, Tunbridge Wells



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraum
 - dass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
 - Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, die sich am Besten mit den gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $P[Z \mid B]$ maximiert.

Satz von Bayes

$$P[Z \mid B] = P[B \mid Z] \cdot P[Z] / P[B]$$

$P[B \mid Z] = P[b_1 \mid z_1] \cdot \dots \cdot P[b_n \mid z_n]$



Thomas Bayes
*1701, London
†1761, Tunbridge Wells



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b \mid z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b \mid z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraum
 - dass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 \mid z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
 - Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, die sich am Besten mit den gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $P[Z \mid B]$ maximiert.

Satz von Bayes

$$P[Z \mid B] = P[B \mid Z] \cdot P[Z] / P[B]$$

$$P[B \mid Z] = P[b_1 \mid z_1] \cdot \dots \cdot P[b_n \mid z_n]$$

$$P[Z] = P[z_1] \cdot P[z_2 \mid z_1] \cdot \dots \cdot P[z_n \mid z_{n-1}]$$



Thomas Bayes
*1701, London
†1761, Tunbridge Wells



Verdecktes Markow-Modell

- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (b_1, \dots, b_n)$, je eine pro Zeitpunkt
 - Mögliche Systemzustände Z
 - Für jeden Systemzustand $z \in Z$ und jede Beobachtung o
 - die Wahrscheinlichkeit $P[b | z]$ oder Falls diskreter Zustandsraum
 - die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f[b | z]$, Falls kontinuierlicher Zustandsraum

dass b bei Zustand z beobachtet wird
 - Für jedes Paar von Zuständen $z_1, z_2 \in Z$ die Wahrscheinlichkeit $P[z_2 | z_1]$ (**Übergangswahrscheinlichkeit**)
 - Für jeden Zustand $z \in Z$ die (a-priori-)Wahrscheinlichkeit $P[z]$

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, die sich am Besten mit den gegebenen Beobachtungen erklären lässt, also $P[Z | B]$ maximiert.

Satz von Bayes

konstant

$$P[Z | B] = P[B | Z] \cdot P[Z] / P[B]$$

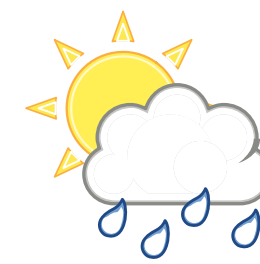
$$P[B | Z] = P[b_1 | z_1] \cdot \dots \cdot P[b_n | z_n]$$

$$P[Z] = P[z_1] \cdot P[z_2 | z_1] \cdot \dots \cdot P[z_n | z_{n-1}]$$



Thomas Bayes
*1701, London
†1761, Tunbridge Wells

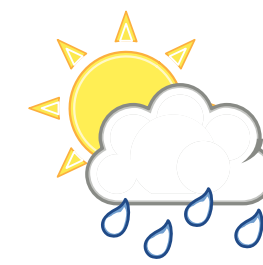
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel



- Gegeben:**
- Beobachtungen $B =$
 - Mögliche Systemzustände $Z =$
 - Beobachtungswahrscheinlichkeiten: ■ Übergangswahrscheinlichkeiten:
 - A-priori-Wahrscheinlichkeiten:

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, so dass $P[Z \mid B]$ maximal ist.

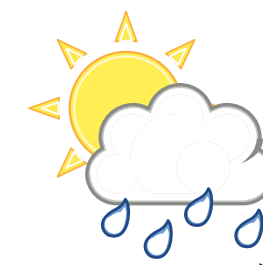
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel



- Gegeben:**
- Beobachtungen $B =$
 - Mögliche Systemzustände $Z = \{\text{Sonne, Regen}\}$
 - Beobachtungswahrscheinlichkeiten: ■ Übergangswahrscheinlichkeiten:
 - A-priori-Wahrscheinlichkeiten:

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, so dass $P[Z \mid B]$ maximal ist.

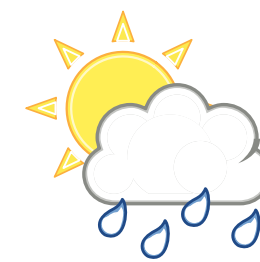
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel



- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$
 - Mögliche Systemzustände $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$
 - Beobachtungswahrscheinlichkeiten: ■ Übergangswahrscheinlichkeiten:
 - A-priori-Wahrscheinlichkeiten:

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, so dass $P[Z \mid B]$ maximal ist.

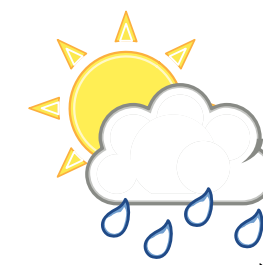
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel



- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$
 - Mögliche Systemzustände $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$
 - Beobachtungswahrscheinlichkeiten: ■ Übergangswahrscheinlichkeiten:
 - $P[\text{nass} \mid \text{Sonne}] = 0,1$
 - $P[\text{trocken} \mid \text{Sonne}] = 0,9$
 - $P[\text{nass} \mid \text{Regen}] = 0,95$
 - $P[\text{trocken} \mid \text{Regen}] = 0,05$
 - A-priori-Wahrscheinlichkeiten:

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, so dass $P[Z \mid B]$ maximal ist.

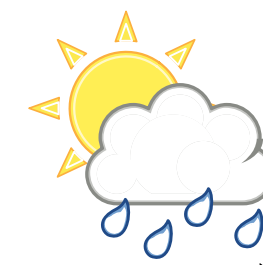
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel



- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$
 - Mögliche Systemzustände $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$
 - Beobachtungswahrscheinlichkeiten:
 - $P[\text{nass} \mid \text{Sonne}] = 0,1$
 - $P[\text{trocken} \mid \text{Sonne}] = 0,9$
 - $P[\text{nass} \mid \text{Regen}] = 0,95$
 - $P[\text{trocken} \mid \text{Regen}] = 0,05$
 - Übergangswahrscheinlichkeiten:
 - $P[\text{Sonne} \mid \text{Sonne}] = 0,8$
 - $P[\text{Regen} \mid \text{Sonne}] = 0,2$
 - $P[\text{Sonne} \mid \text{Regen}] = 0,3$
 - $P[\text{Regen} \mid \text{Regen}] = 0,7$
 - A-priori-Wahrscheinlichkeiten:

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, so dass $P[Z \mid B]$ maximal ist.

Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

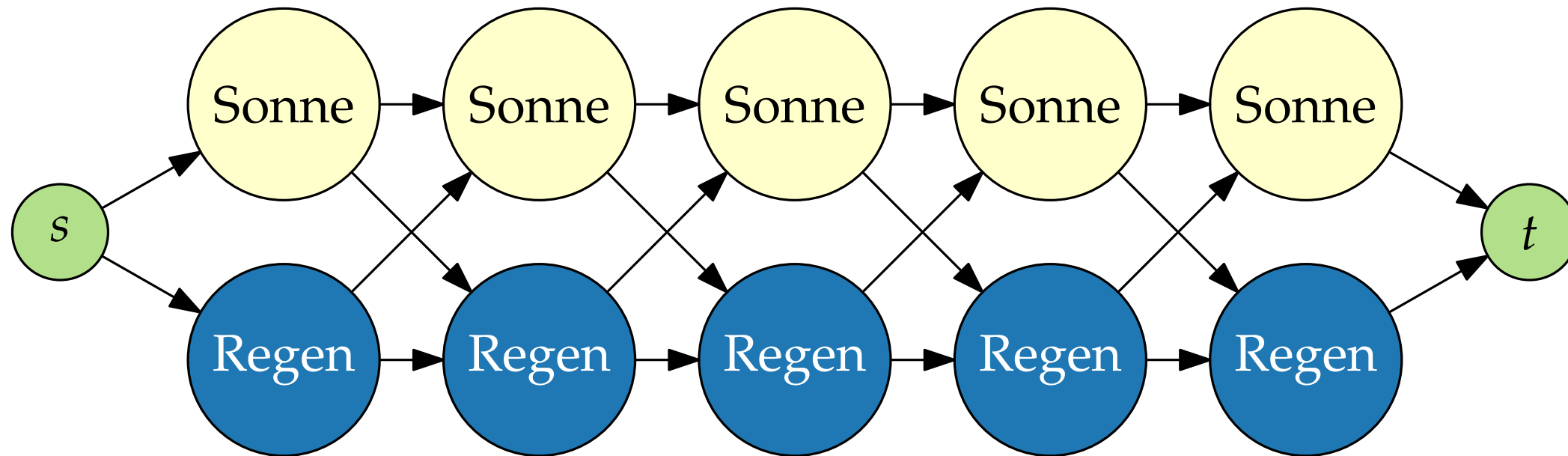


- Gegeben:**
- Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$
 - Mögliche Systemzustände $Z = \{\text{Sonne}, \text{Regen}\}$
 - Beobachtungswahrscheinlichkeiten:
 - $P[\text{nass} \mid \text{Sonne}] = 0,1$
 - $P[\text{trocken} \mid \text{Sonne}] = 0,9$
 - $P[\text{nass} \mid \text{Regen}] = 0,95$
 - $P[\text{trocken} \mid \text{Regen}] = 0,05$
 - Übergangswahrscheinlichkeiten:
 - $P[\text{Sonne} \mid \text{Sonne}] = 0,8$
 - $P[\text{Regen} \mid \text{Sonne}] = 0,2$
 - $P[\text{Sonne} \mid \text{Regen}] = 0,3$
 - $P[\text{Regen} \mid \text{Regen}] = 0,7$
 - A-priori-Wahrscheinlichkeiten:
 - $P[\text{Sonne}] = 0,7$
 - $P[\text{Regen}] = 0,3$

Gesucht: Folge $Z = (z_1, \dots, z_n)$ von Zuständen, so dass $P[Z \mid B]$ maximal ist.

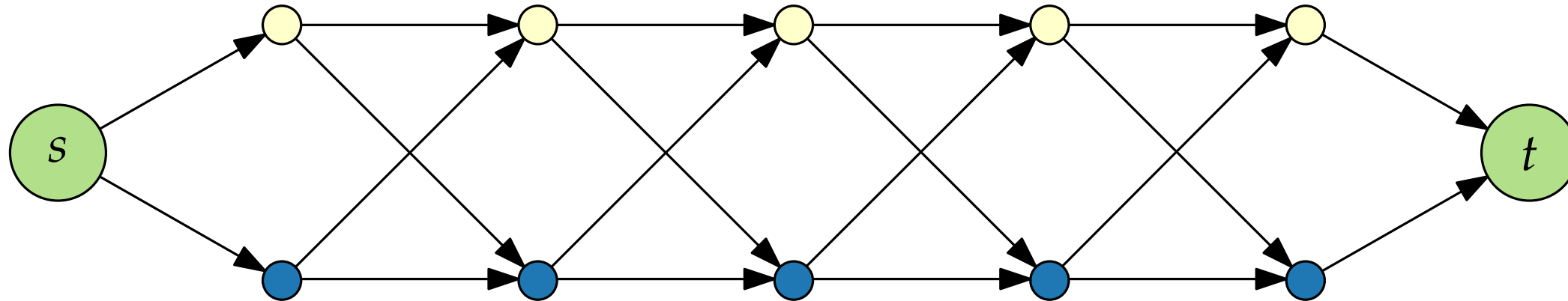
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



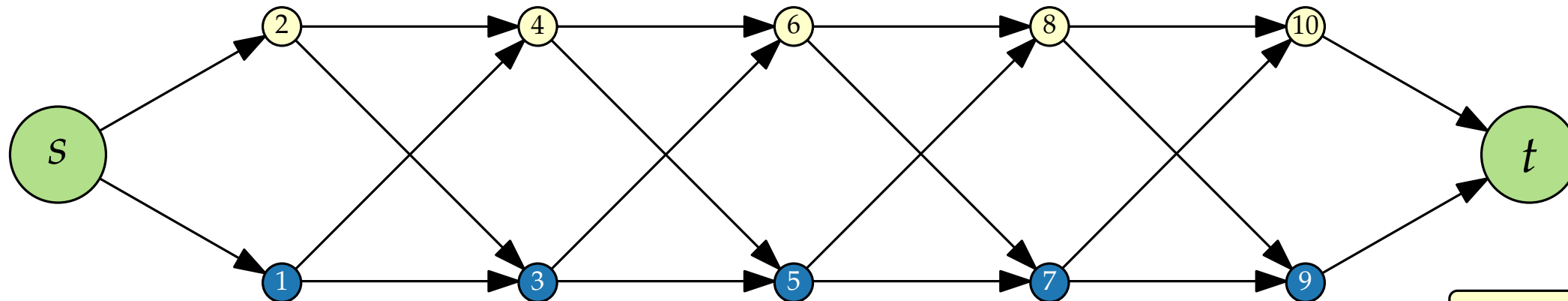
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

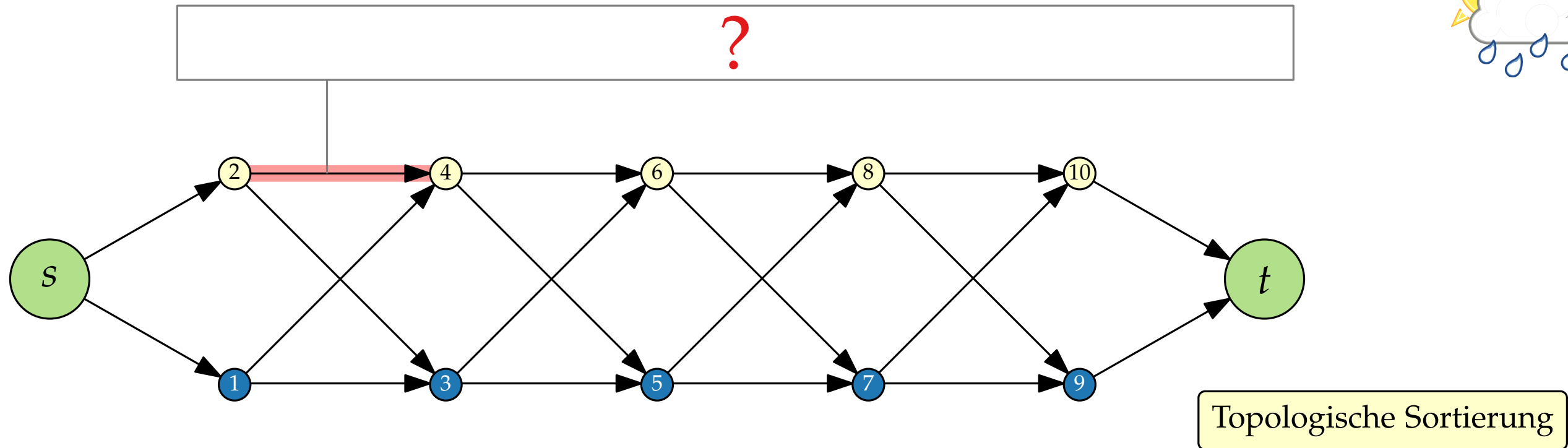
■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



Topologische Sortierung

Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

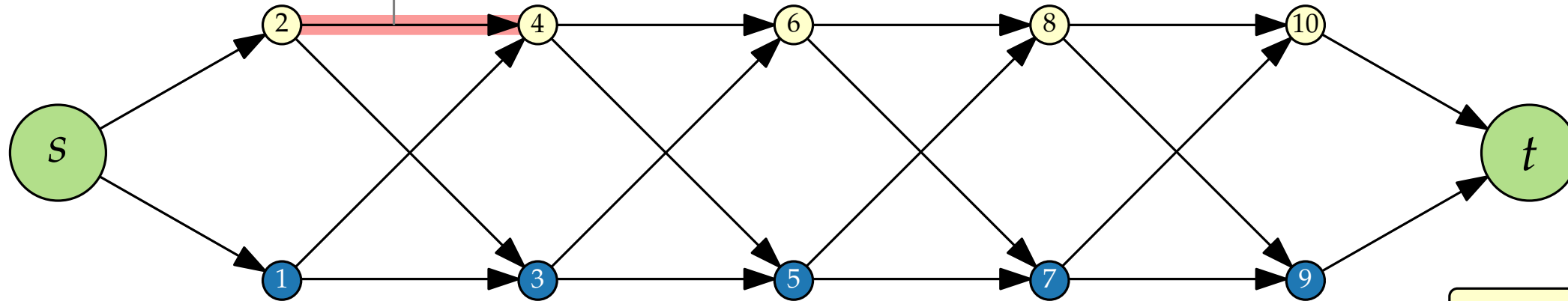


Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

- Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



$$P[b_1 \mid Z_1 = \text{Sonne}] \cdot P[Z_2 = \text{Sonne} \mid Z_1 = \text{Sonne}]$$



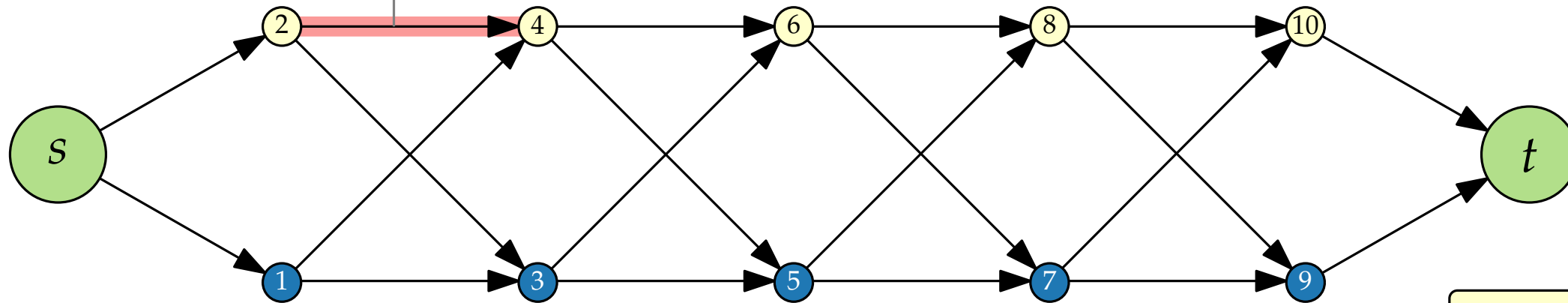
Topologische Sortierung



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

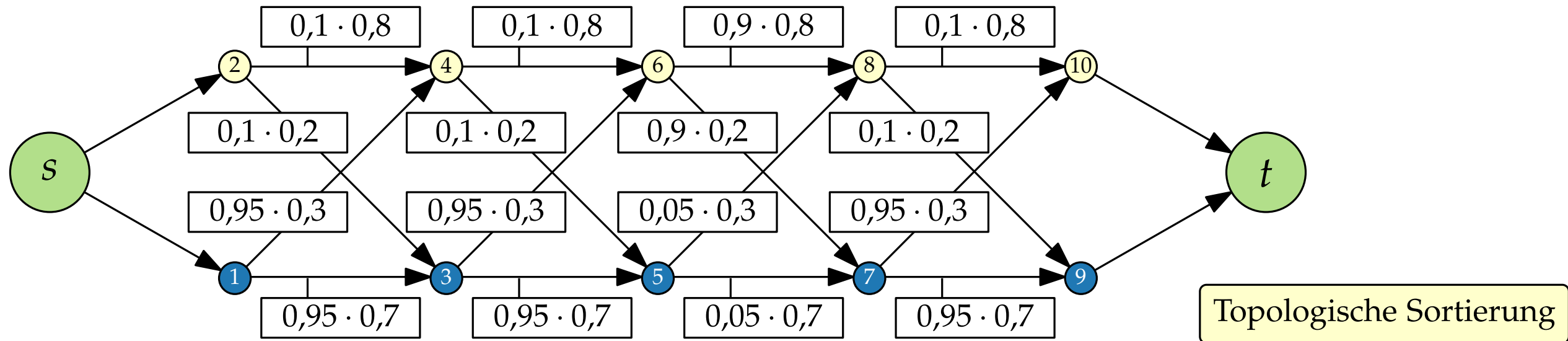
$$P[B_1 = \text{nass} \mid Z_1 = \text{Sonne}] \cdot P[Z_2 = \text{Sonne} \mid Z_1 = \text{Sonne}]$$



Topologische Sortierung

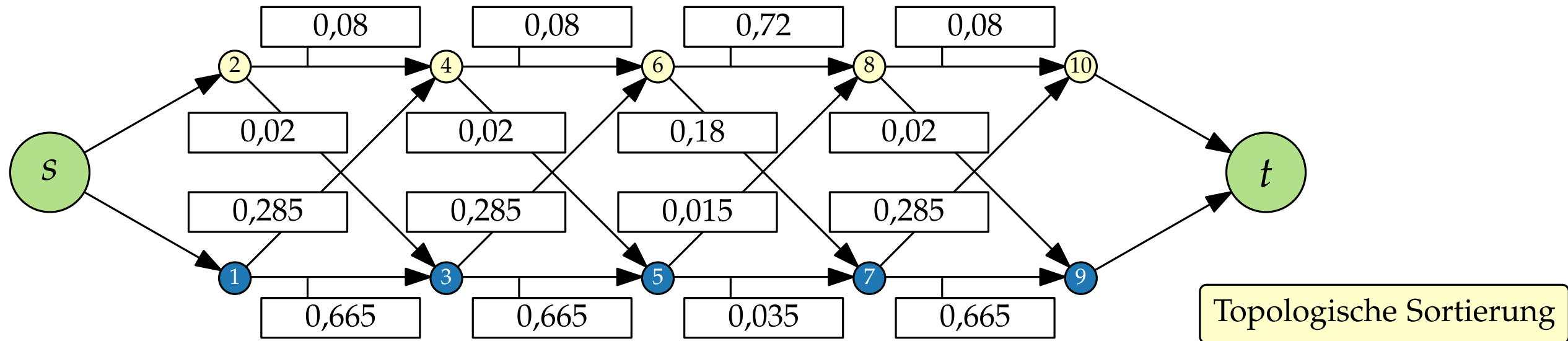
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



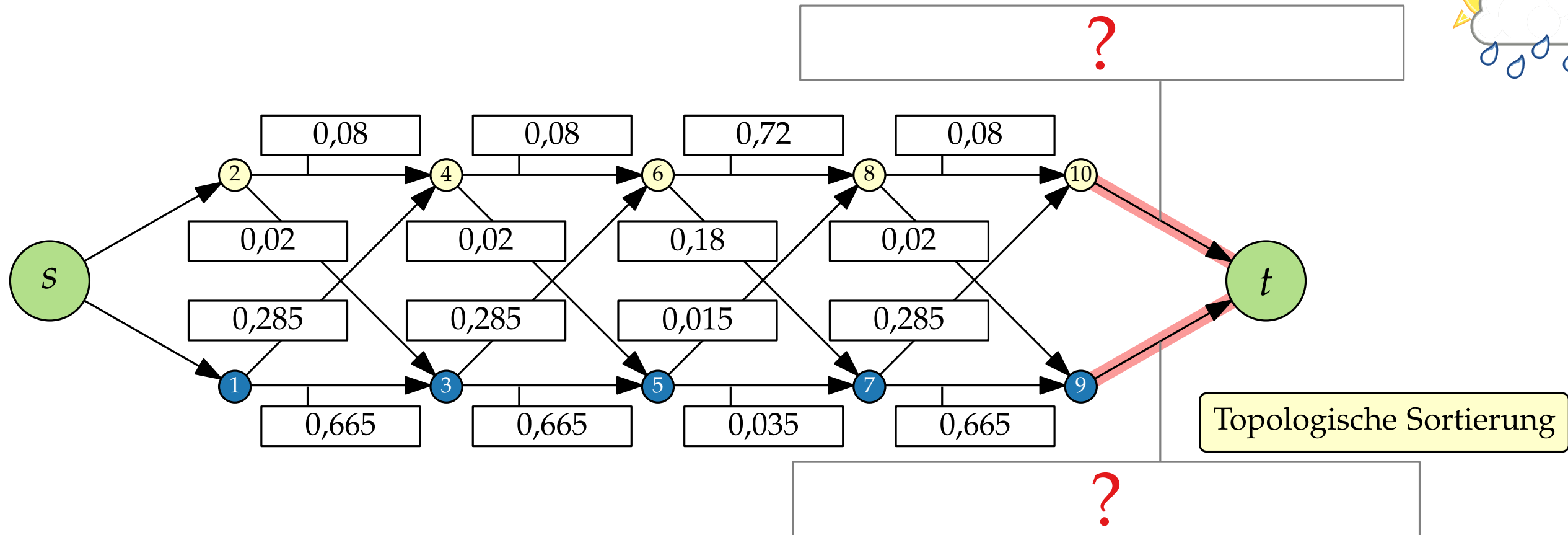
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

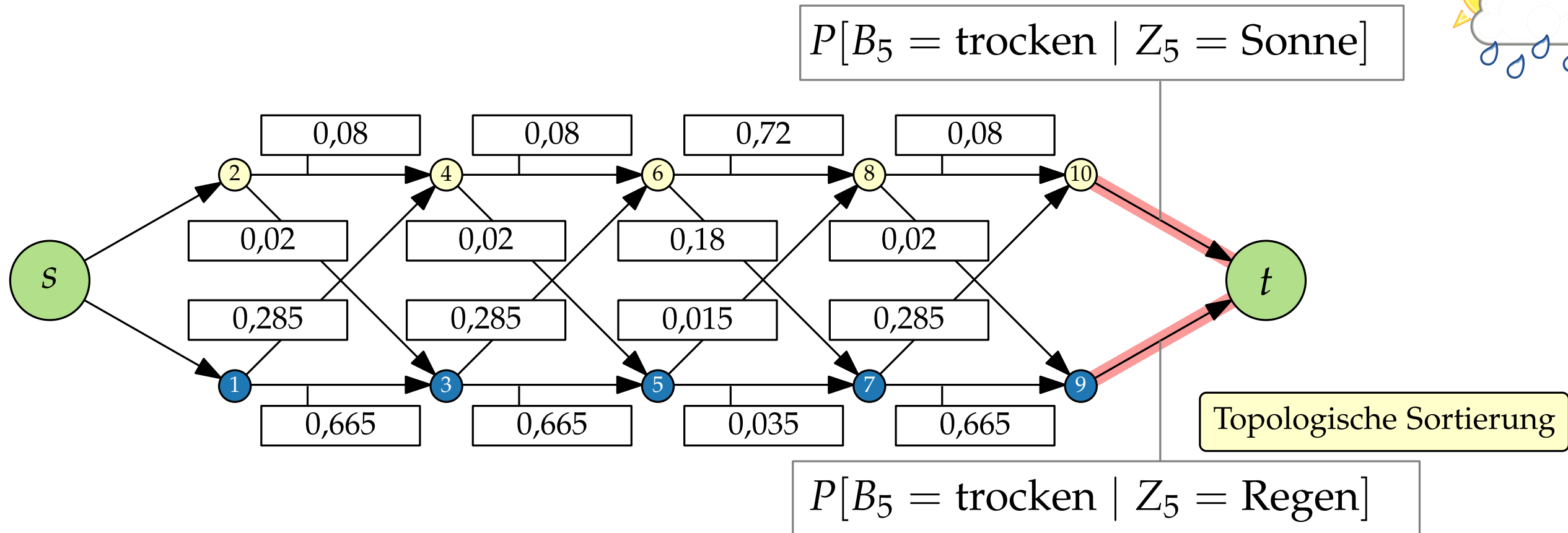
■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

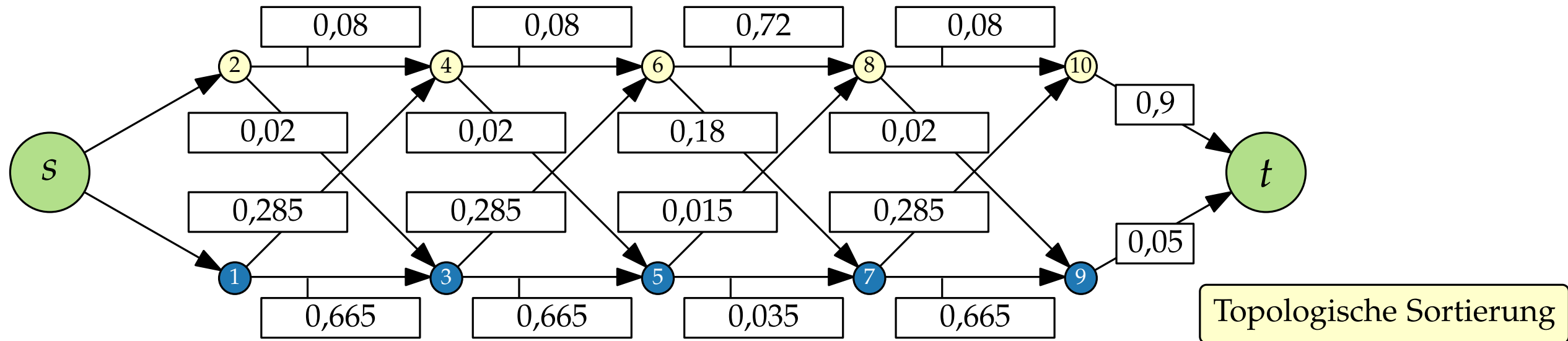


■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



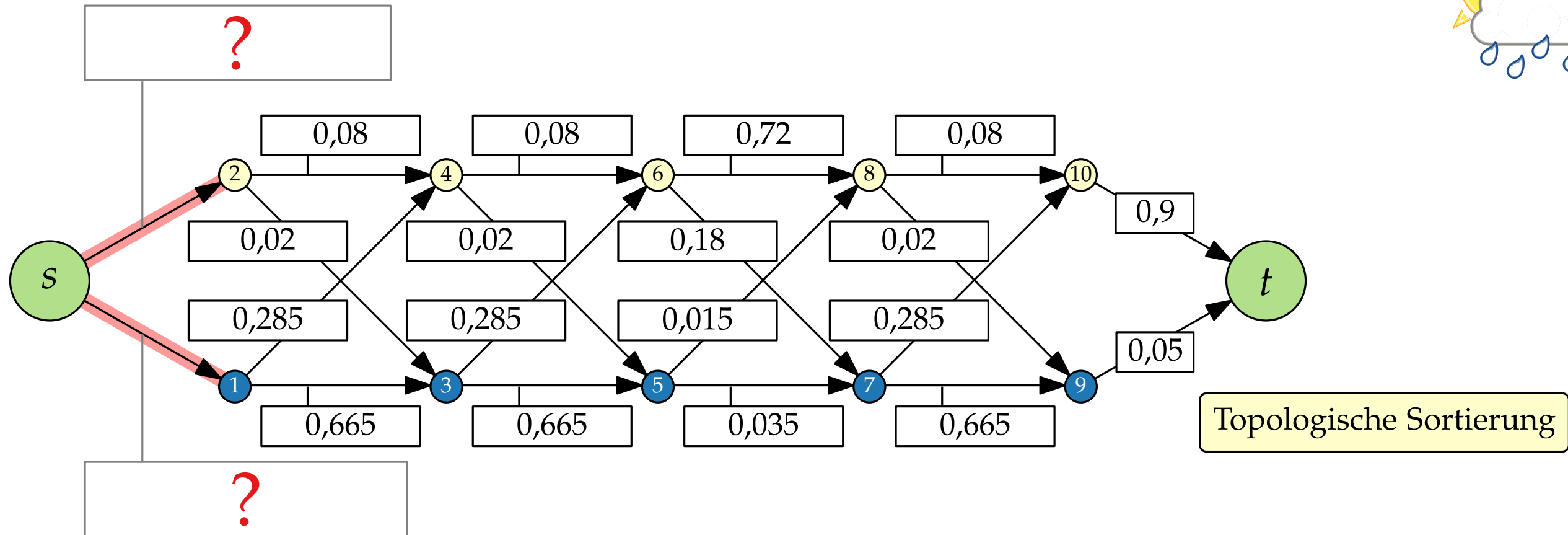
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



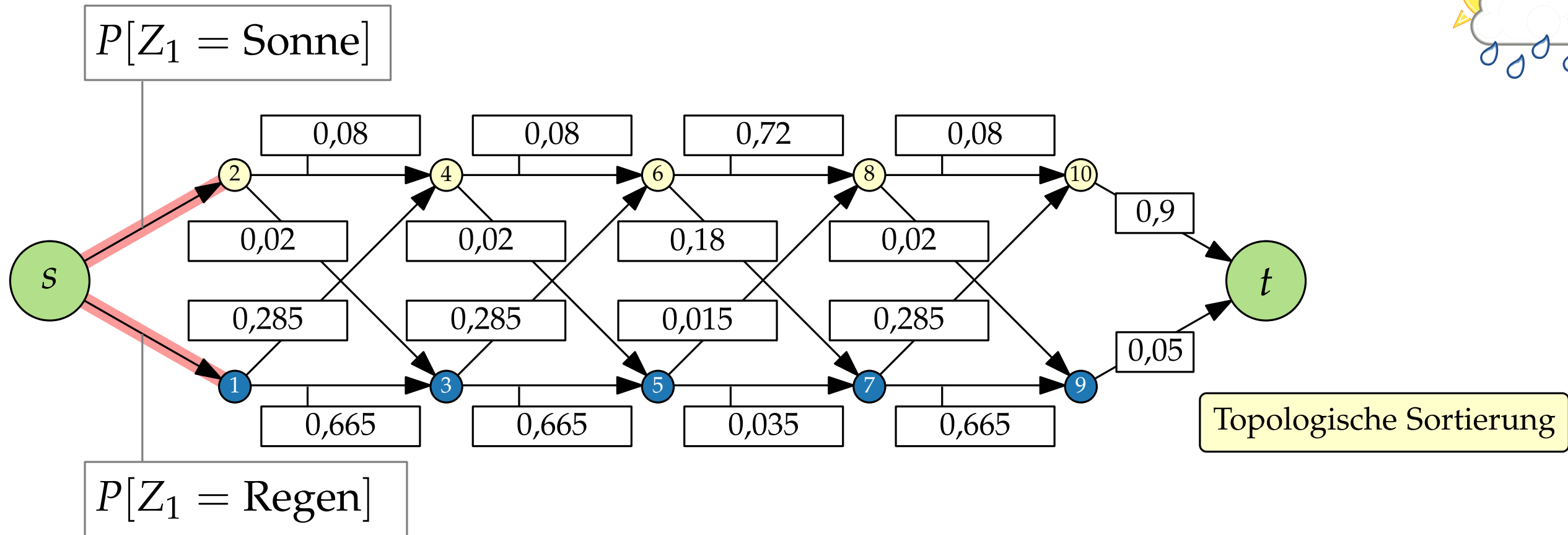
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



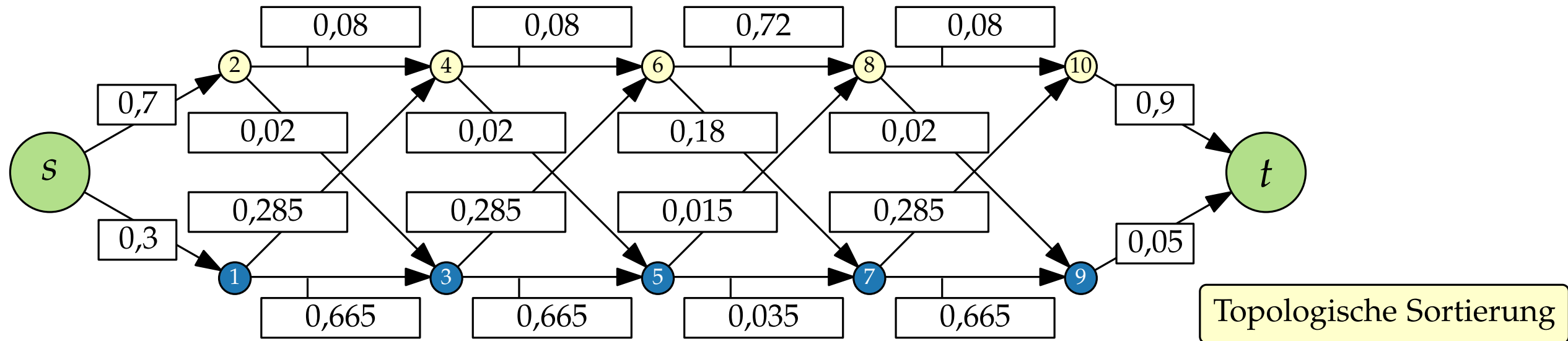
Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

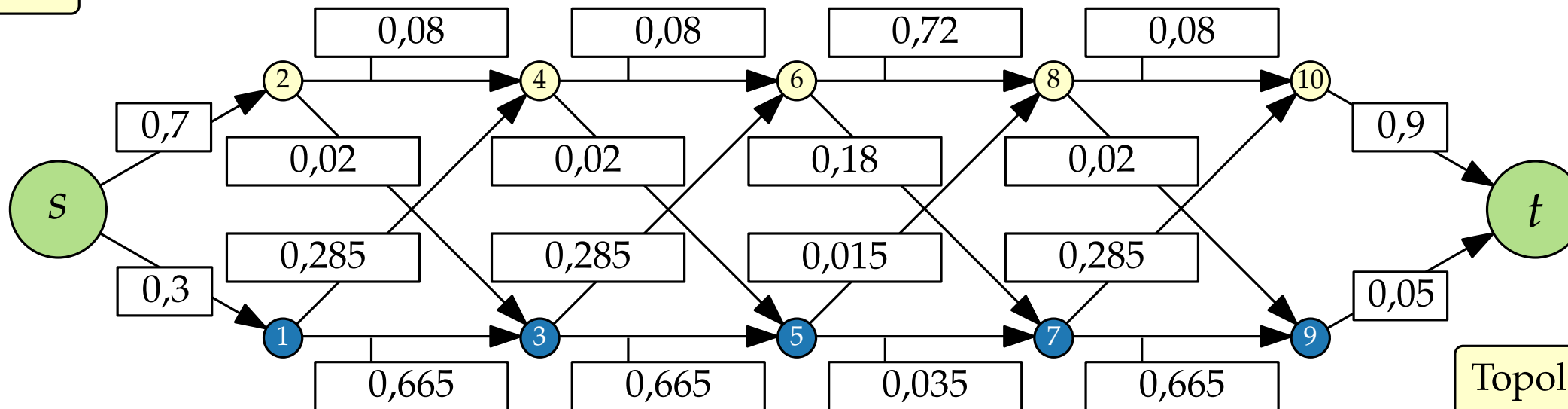


Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



$\log_2$



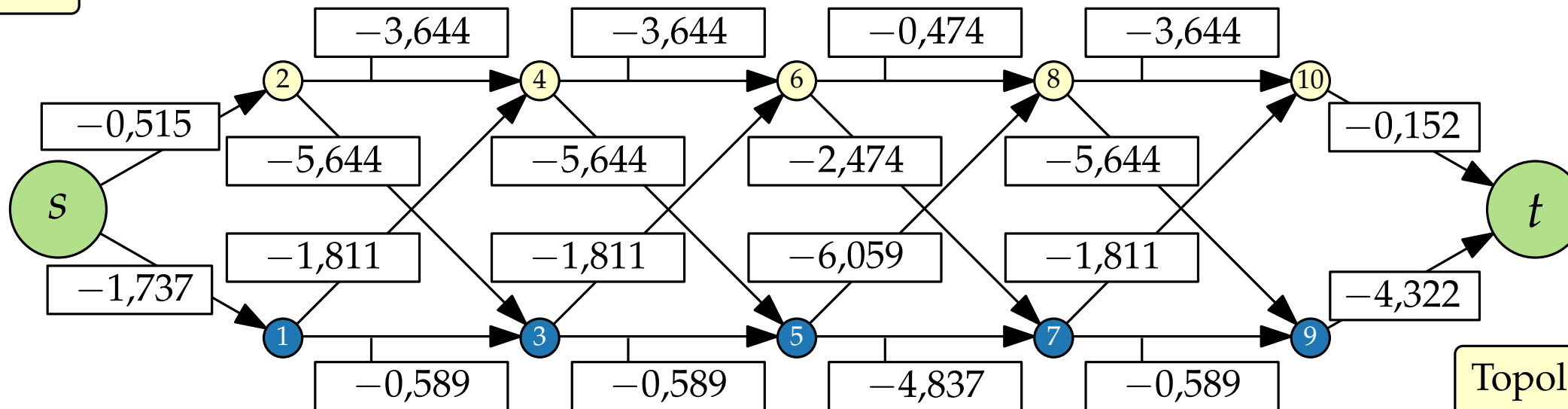
Topologische Sortierung

Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



$\log_2$



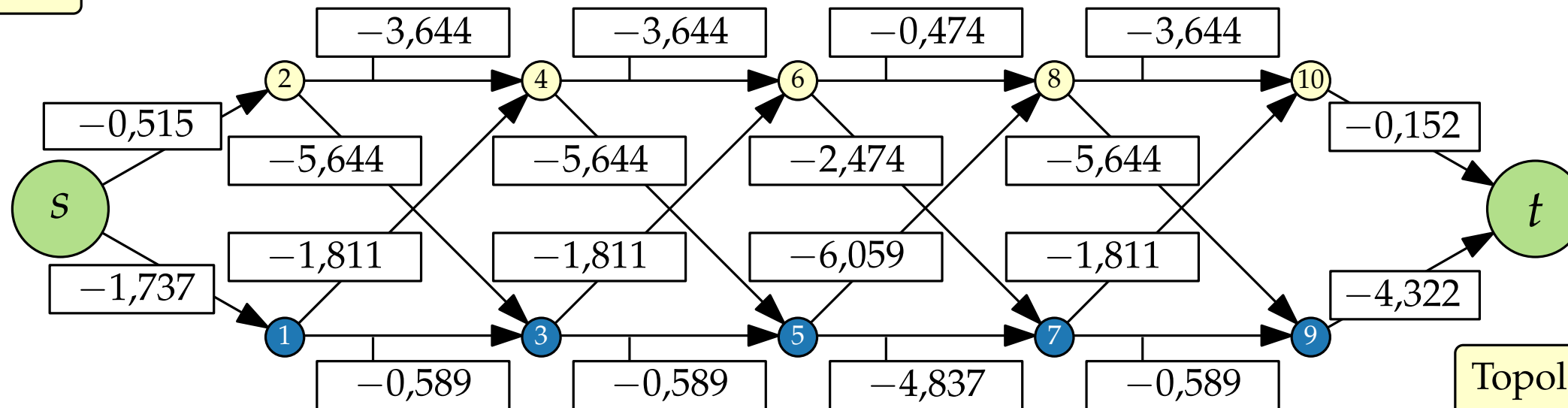
Topologische Sortierung



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Topologische Sortierung

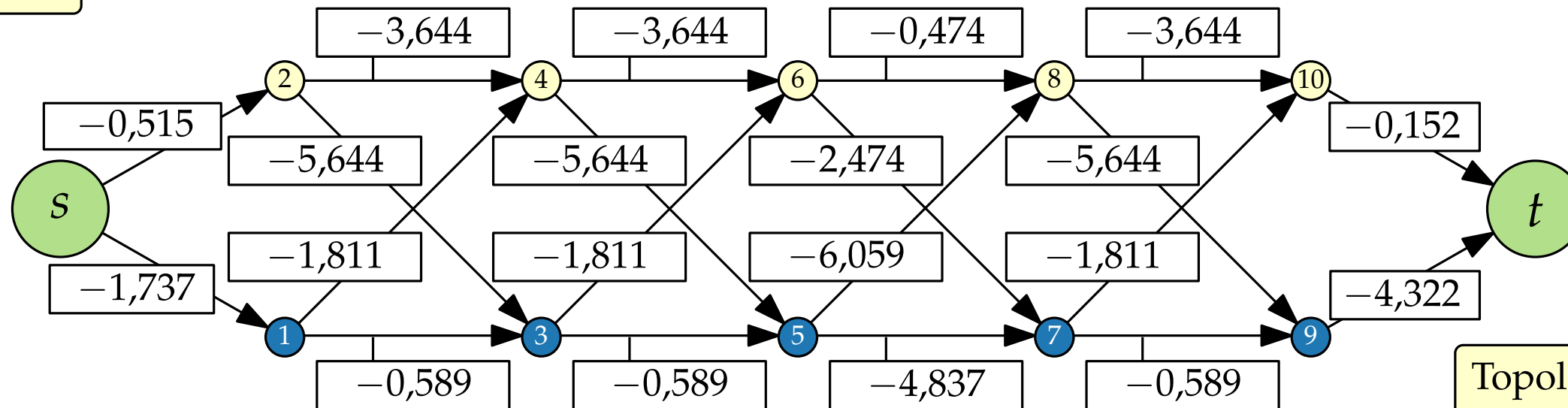
Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Topologische Sortierung

Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

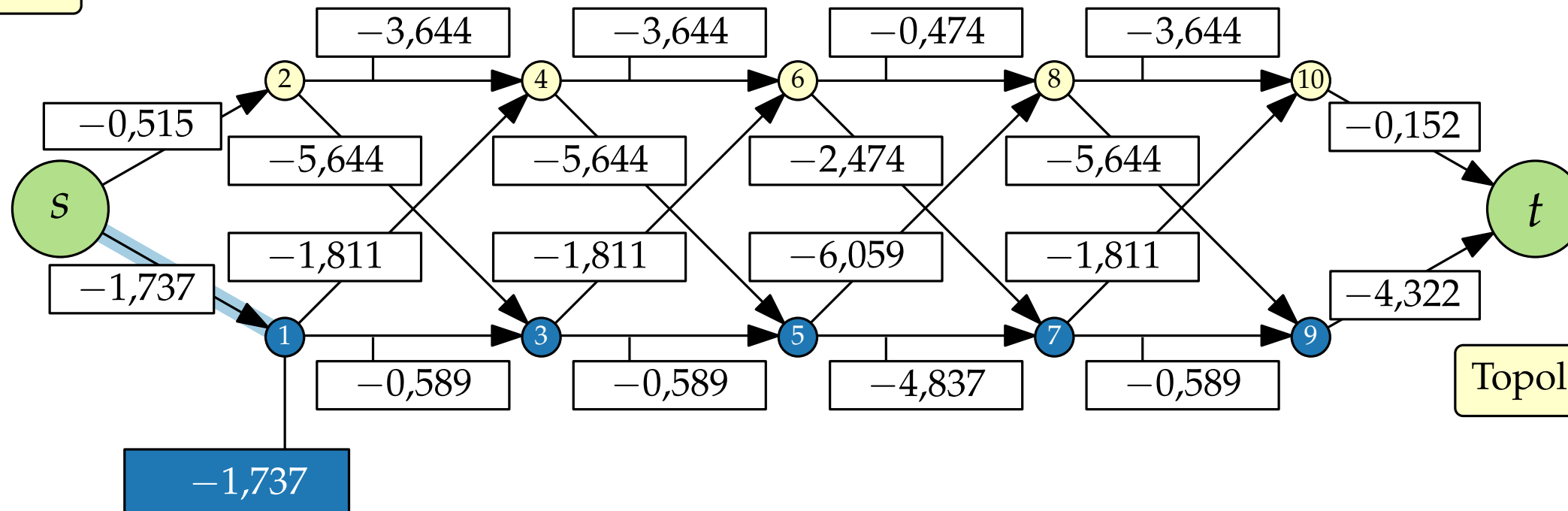
└ Berechne schwersten s - i -Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

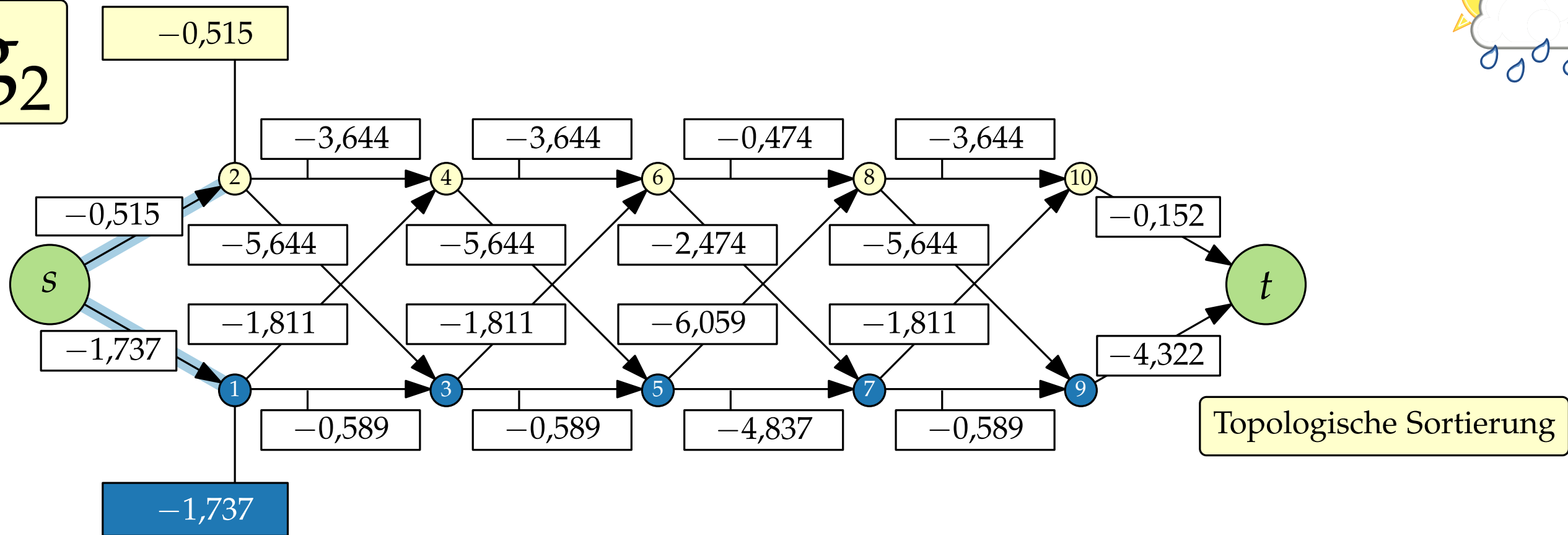
└ Berechne schwersten $s-i$ -Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

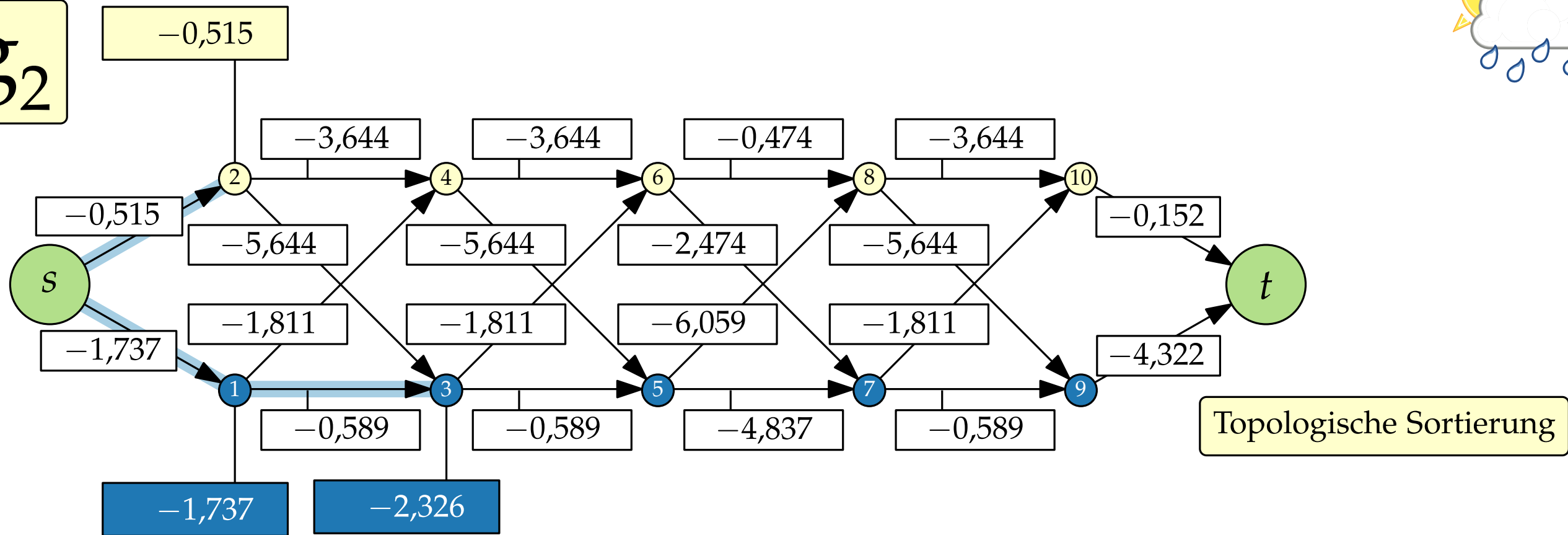
└ Berechne schwersten s – i –Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

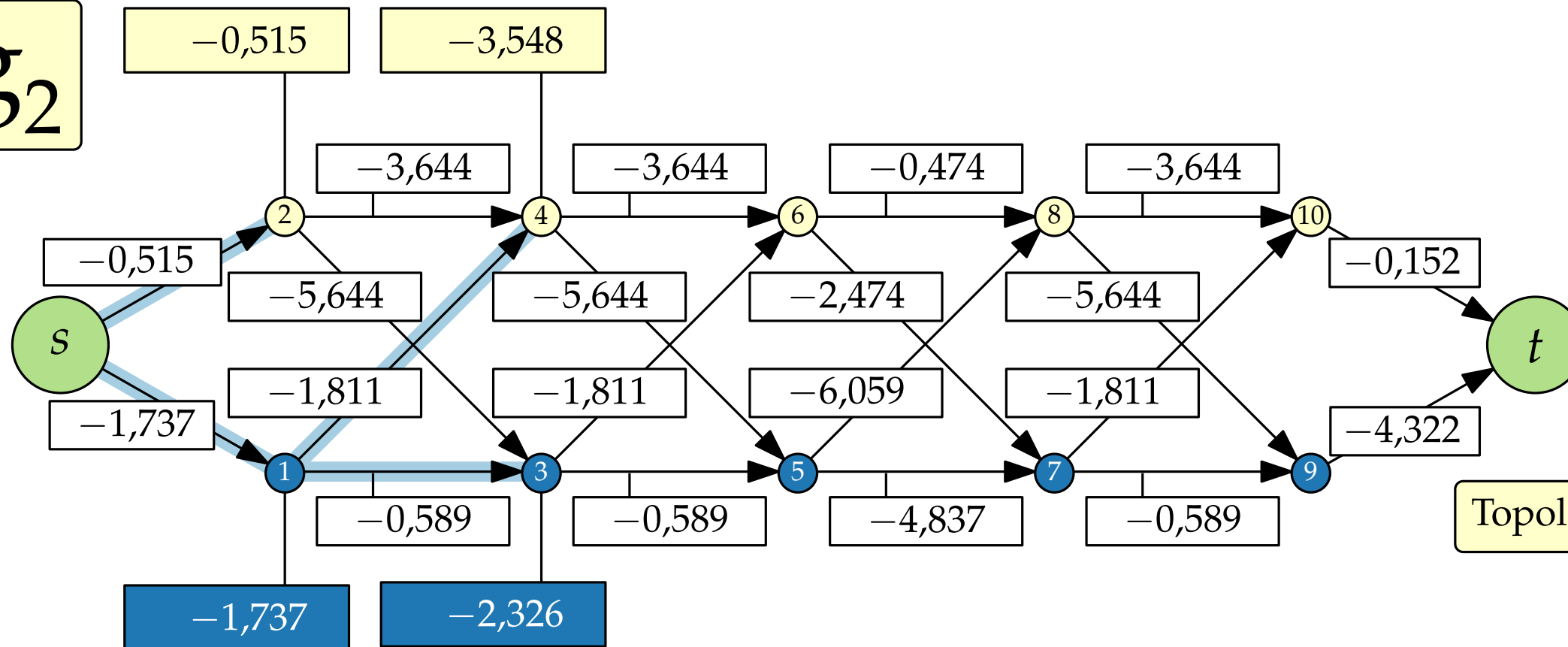
└ Berechne schwersten s – i –Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Topologische Sortierung

Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

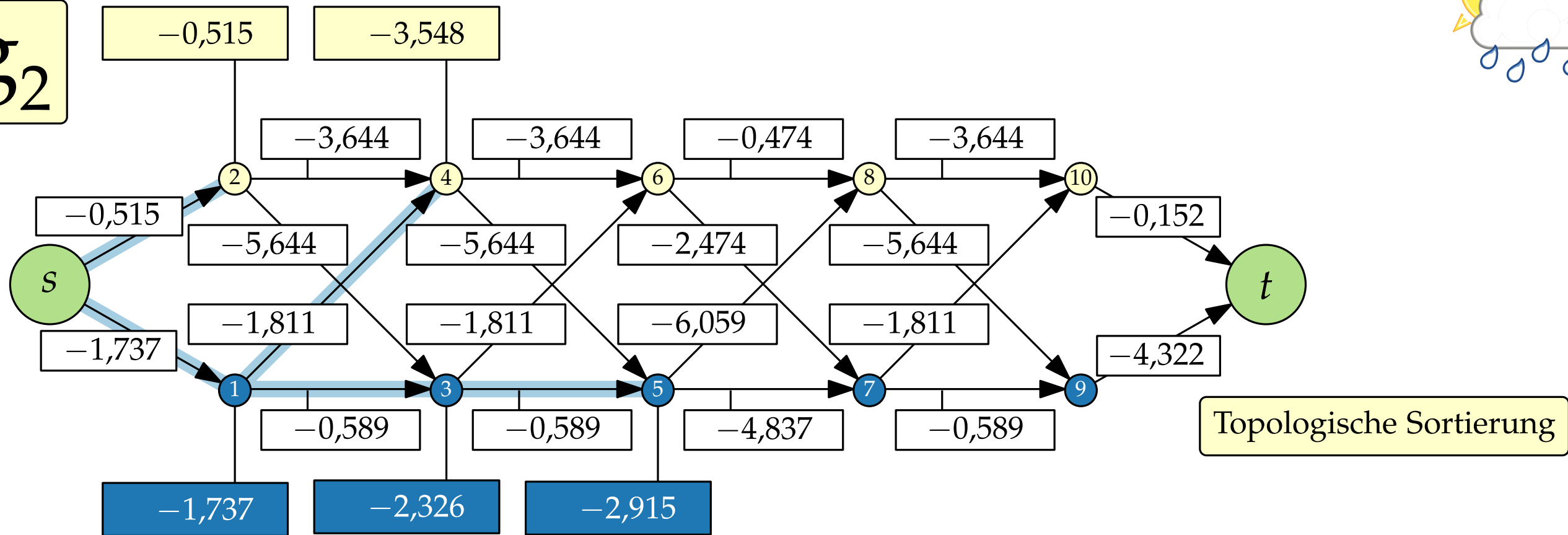
└ Berechne schwersten s - i -Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

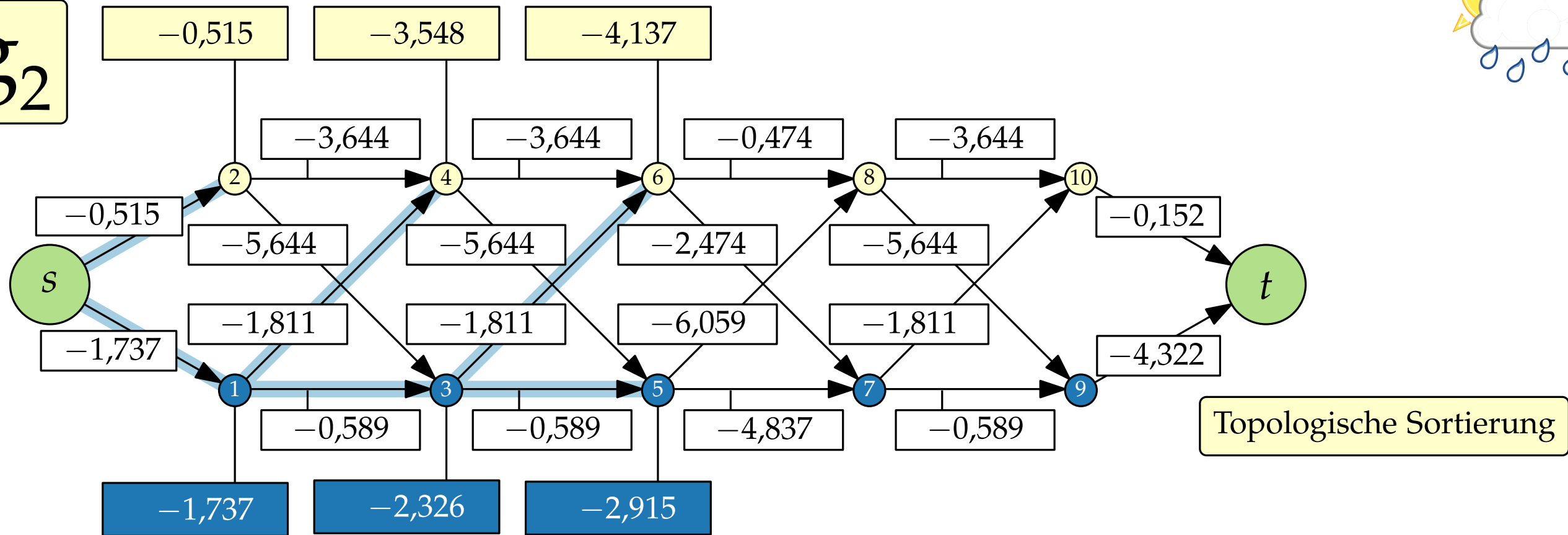
└ Berechne schwersten s - i -Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

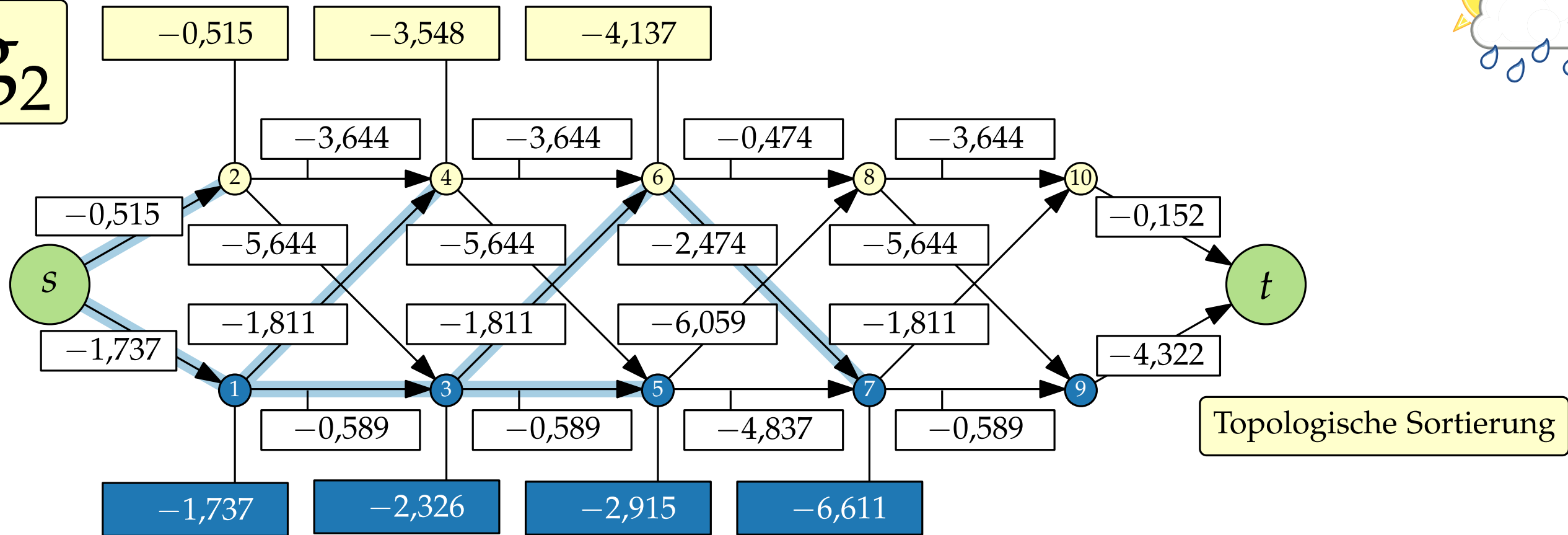
└ Berechne schwersten $s-i$ -Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

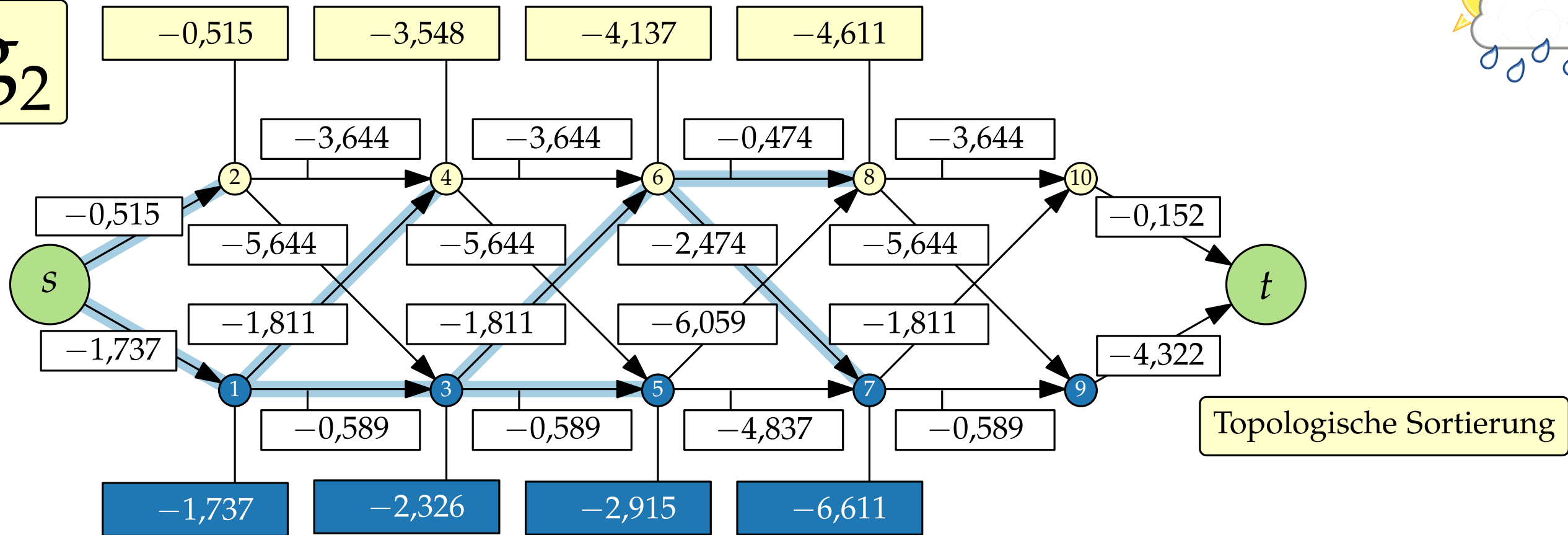
└ Berechne schwersten $s-i$ -Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

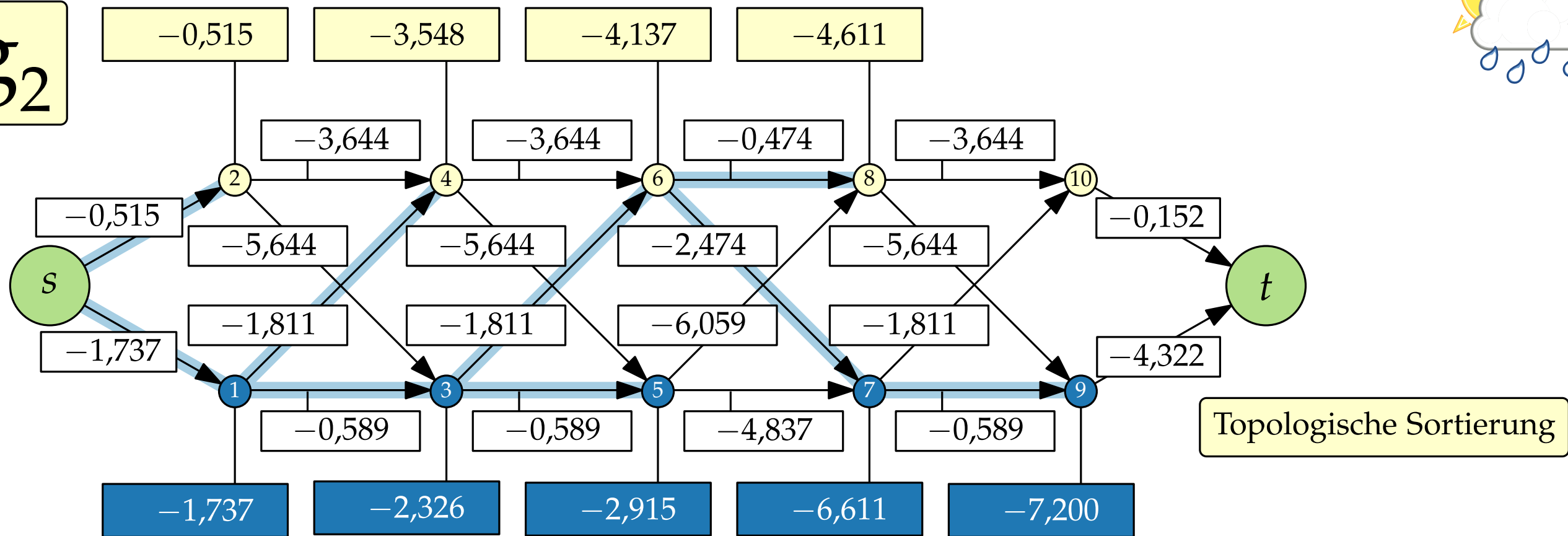
└ Berechne schwersten s - i -Pfad.



Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

$\log_2$



Topologische Sortierung

Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

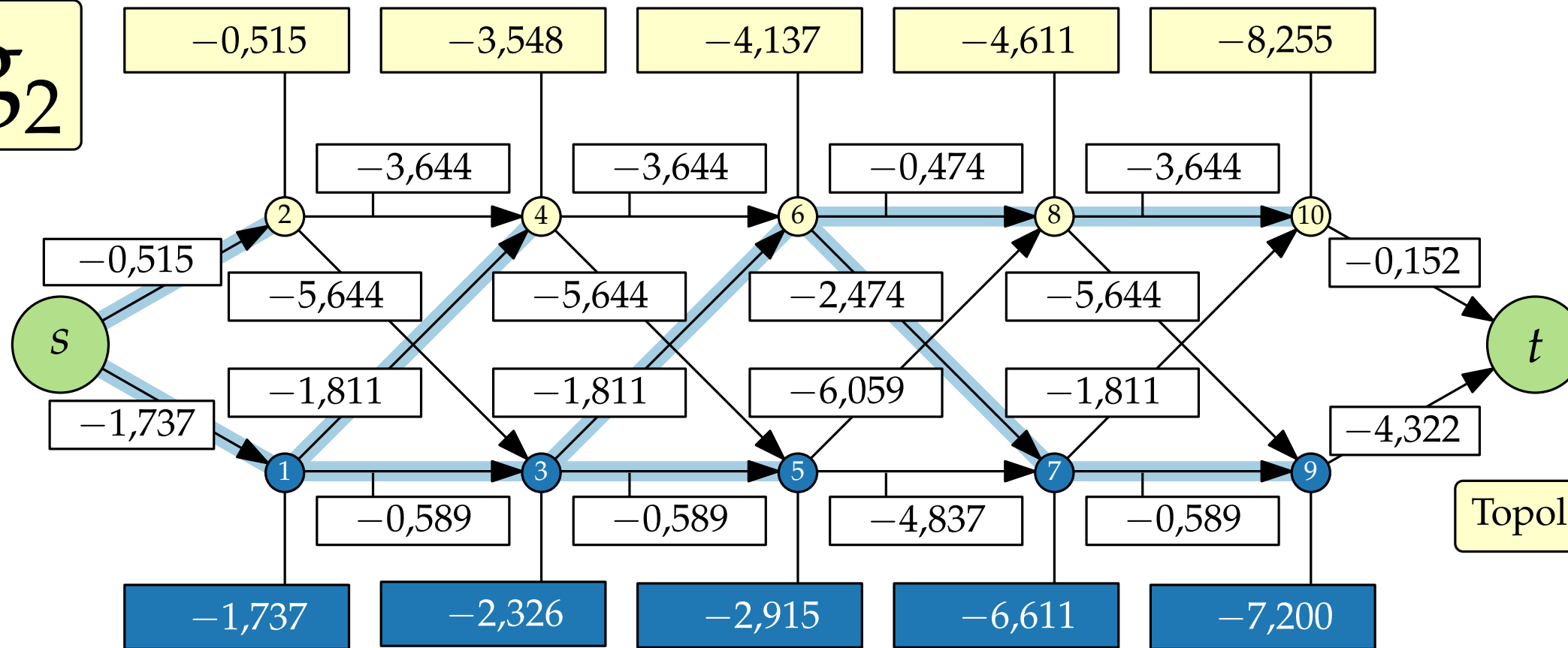
└ Berechne schwersten $s-i$ -Pfad.

Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

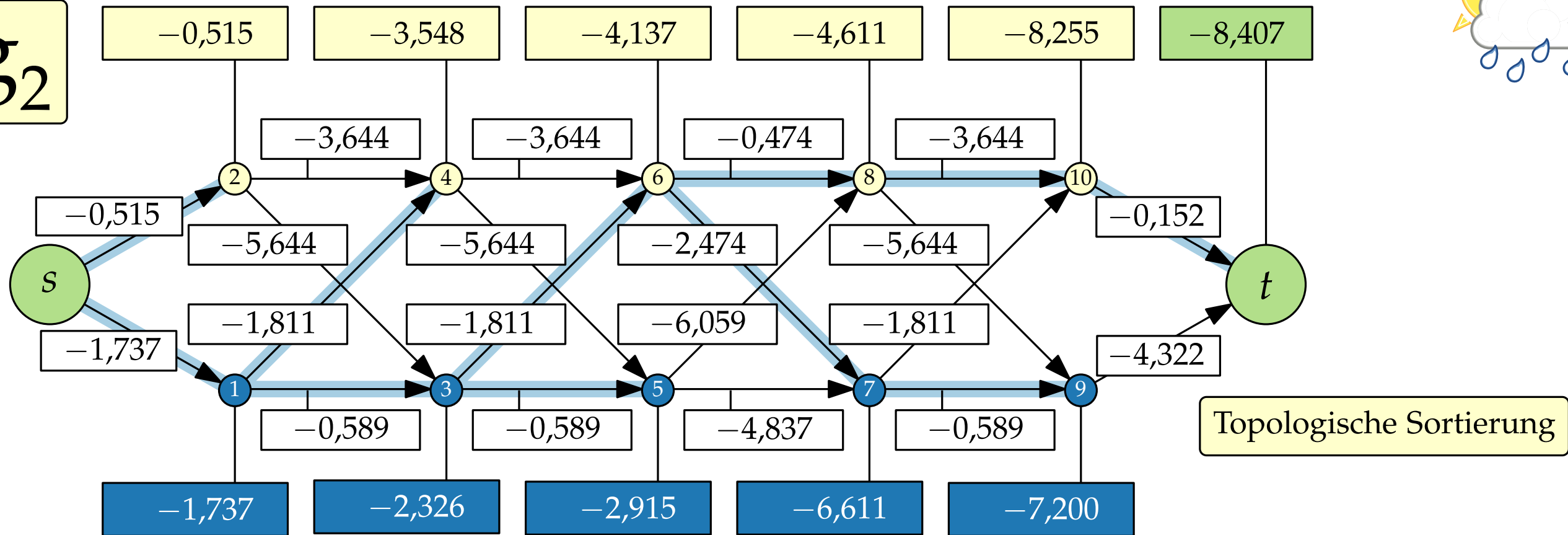
└ Berechne schwersten $s-i$ -Pfad.

Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$



$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

└ Berechne schwersten $s-i$ -Pfad.

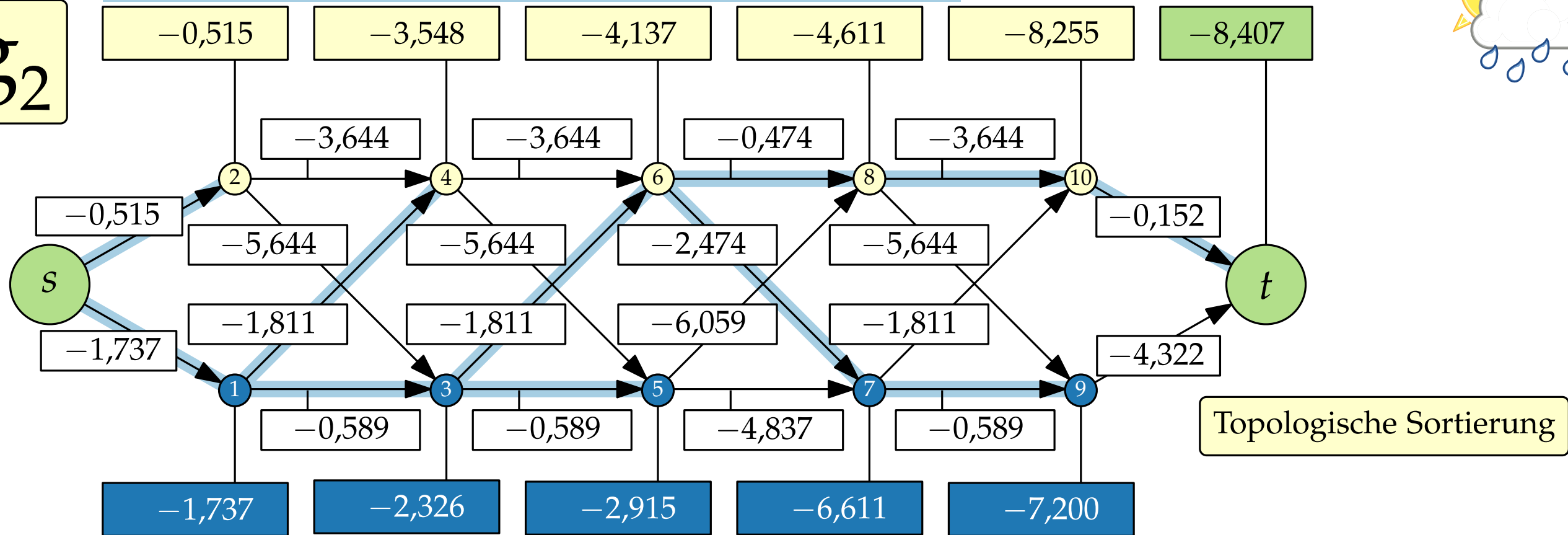


Verdecktes Markow-Modell – Beispiel

■ Beobachtungen $B = (\text{nass}, \text{nass}, \text{trocken}, \text{nass}, \text{trocken})$

➔ $Z = (\text{Regen}, \text{Regen}, \text{Sonne}, \text{Sonne}, \text{Sonne})$

$\log_2$



Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ ist maximal genau dann wenn $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_k$ maximal ist.

LONGESTPATH()

for $i = 1$ **to** n **do**

└ Berechne schwersten $s-i$ -Pfad.

Algorithmus



LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Algorithmus

LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$

Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$



Algorithmus

LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$

Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$



Algorithmus

LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$

Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen?

Algorithmus



LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

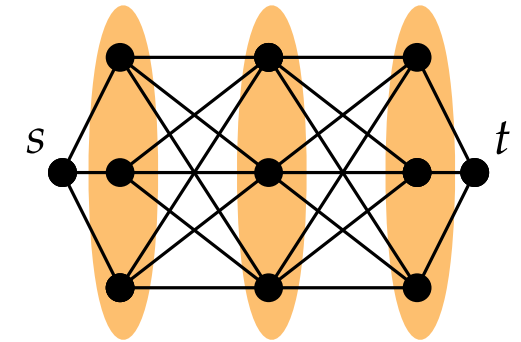
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen?

Algorithmus



LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

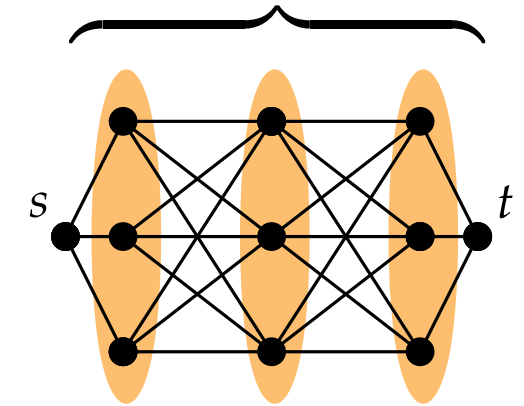
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen?



Algorithmus

LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

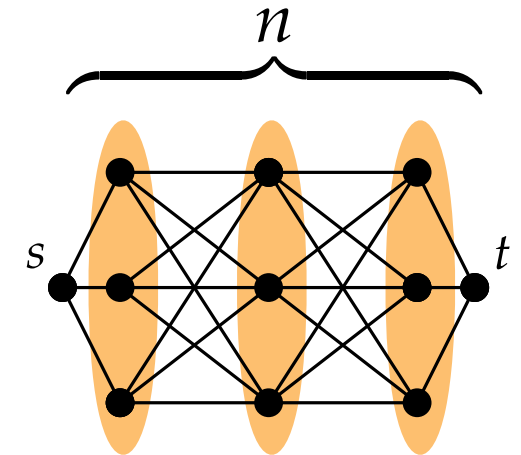
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen?

Algorithmus



LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

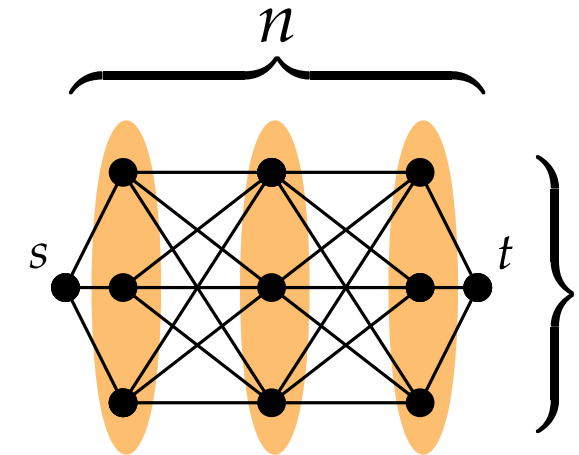
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen?



Algorithmus

LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

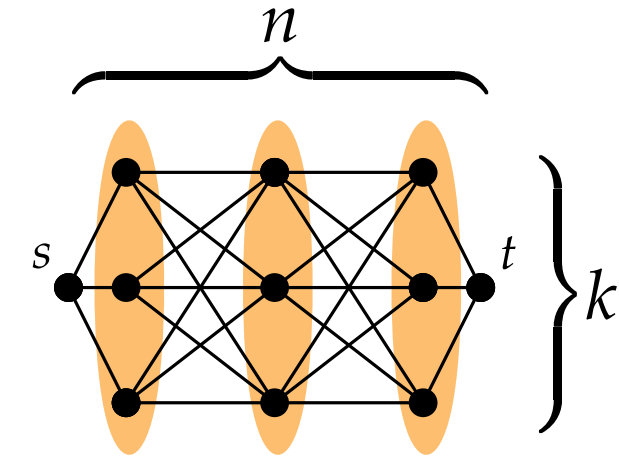
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen?

Algorithmus



LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

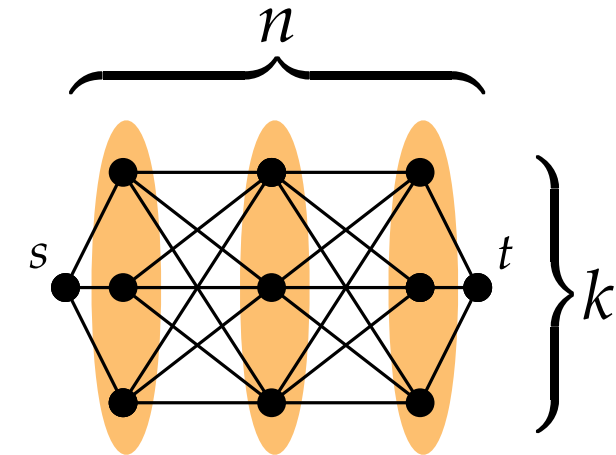
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen? $nk + 2$ Knoten,



Algorithmus

LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

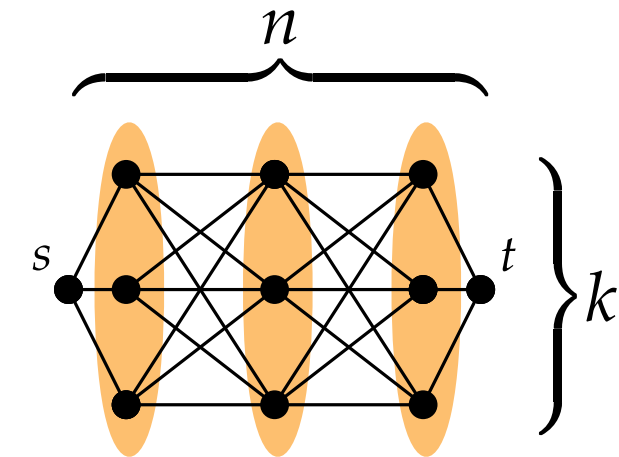
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen? $nk + 2$ Knoten, $(n - 1)k^2 + 2k$ Kanten



Algorithmus

LONGESTPATH(Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, E)$)

Berechne topologische Sortierung von $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$

$v_1.d = 0$

$v_1.\pi = \text{nil}$

for $j = 2$ **to** n **do**

$v_j.d = -\infty$

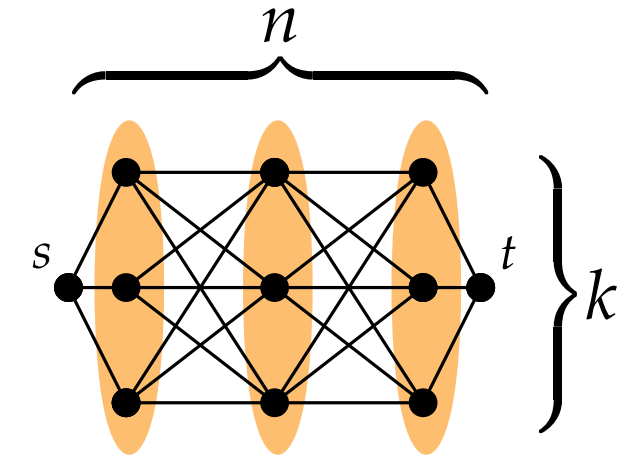
$v_j.\pi = \text{nil}$

for $v_i v_j \in E$ **do**

if $v_i.d + w(v_i v_j) > v_j.d$ **then**

$v_j.d = v_i.d + w(v_i v_j)$

$v_j.\pi = v_i$



Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

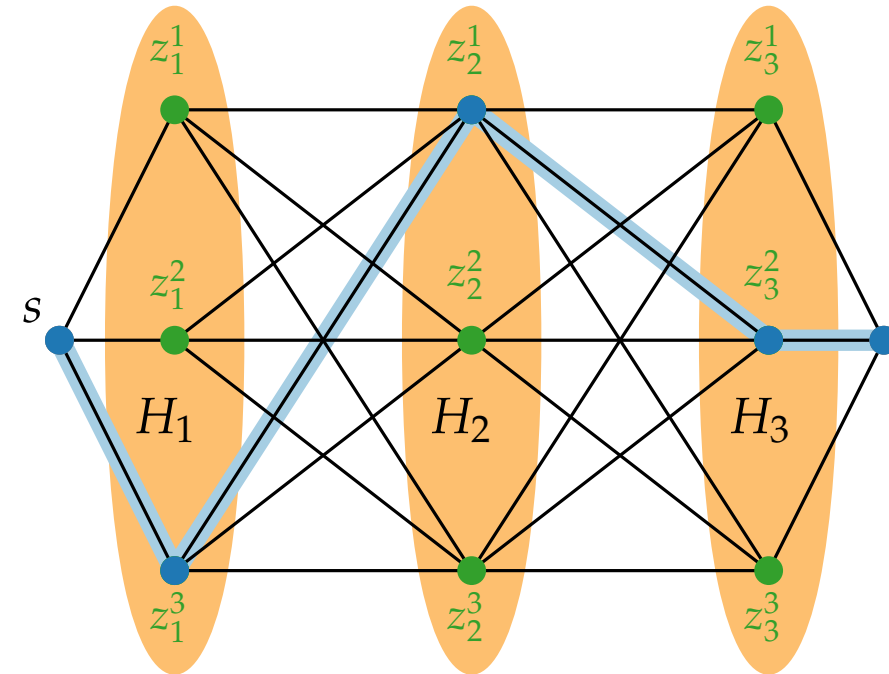
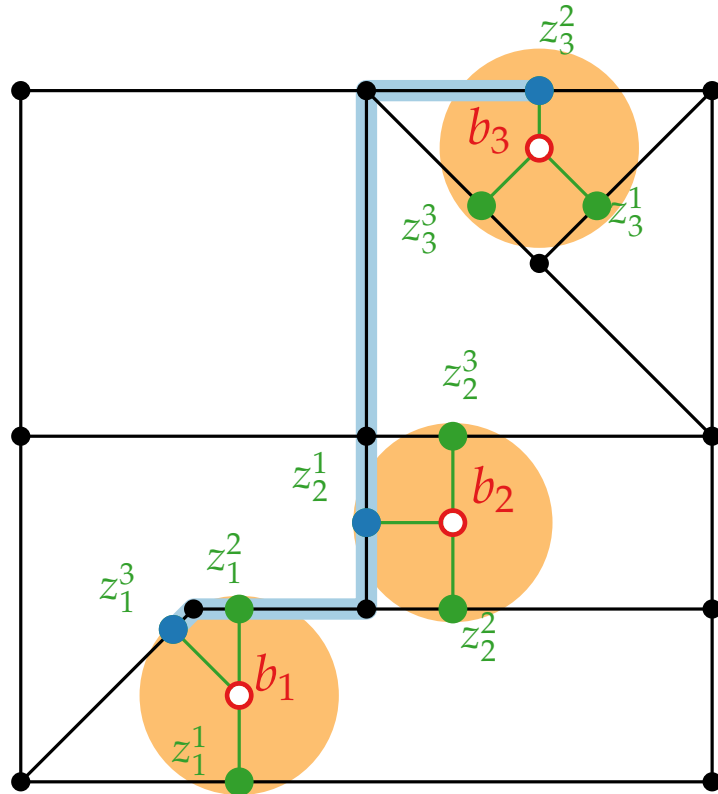
DIJKSTRA: $\mathcal{O}(n \log n + m)$

Laufzeit bei n Messungen und k Zuständen? $nk + 2$ Knoten, $(n - 1)k^2 + 2k$ Kanten

➔ $\mathcal{O}(nk^2)$.

Newson & Krumm (2009) – letzte Details

Idee: Methode der größten Plausibilität + Markow-Kette + Verdecktes Markowmodell



Vorgehen:

- Berechne Kandidatenmenge für GPS Punkte
- Berechne Trellis-Graph (Kanten entsprechen kürzesten Wegen in G , Kantengewichte basierend auf probabilistischem Modell)
- Berechne s - t -Pfad mit größtem Gewicht
- Rekonstruiere entsprechenden Graph in G



Newson & Krumm (2009) – letzte Details

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

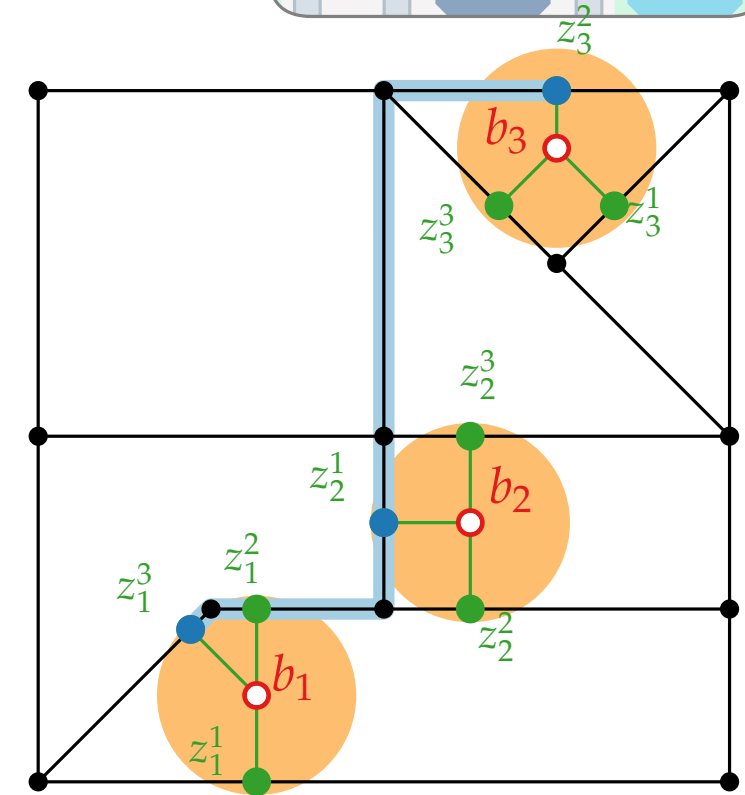
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz, was ist die Wahrscheinlichkeit der GPS Beobachtung?

Üblicherweise wird Normalverteilung um Position im Straßennetz angenommen.

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz zu Zeitpunkt $i - 1$, was ist die Wahrscheinlichkeit der Position im Straßennetz zum Zeitpunkt i ?
Hängt insbesondere von Distanz zwischen den zwei Positionen im Straßennetz ab.



Frage: Welche Sequenz der Positionen im Straßennetzwerk ist am wahrscheinlichsten?



Newson & Krumm (2009) – letzte Details

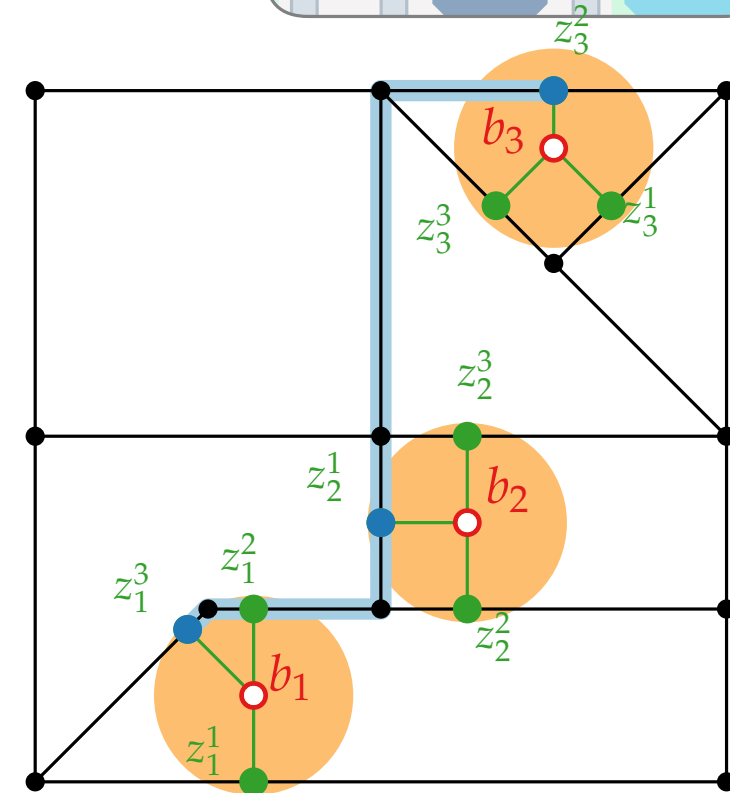
Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i | Z_i]$ ist bekannt.

$$P[B_i = b_i | Z_i = z_i^j] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{d_{\text{Eudlid}}(b_i, z_i^j)^2}{2\varepsilon^2}}$$

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i | Z_{i-1}]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz zu Zeitpunkt $i - 1$, was ist die Wahrscheinlichkeit der Position im Straßennetz zum Zeitpunkt i ?
Hängt insbesondere von Distanz zwischen den zwei Positionen im Straßennetz ab.



Frage: Welche Sequenz der Positionen im Straßennetzwerk ist am wahrscheinlichsten?



Newson & Krumm (2009) – letzte Details

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

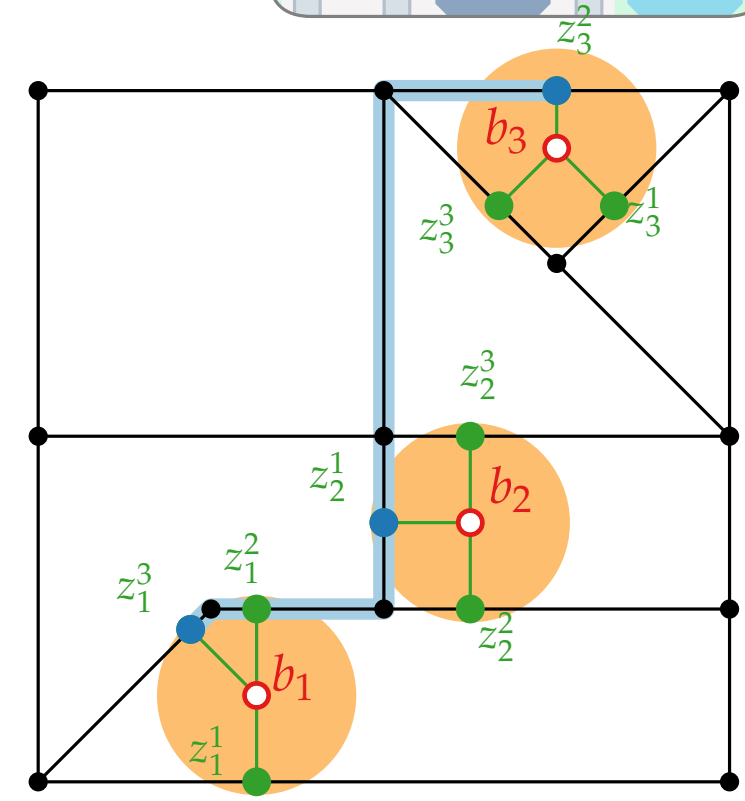
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i | Z_i]$ ist bekannt.

$$P[B_i = b_i | Z_i = z_i^j] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{d_{\text{Eudlid}}(b_i, z_i^j)^2}{2\epsilon^2}}$$

(Normalverteilung um z_i^j)

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i | Z_{i-1}]$ ist bekannt.

Gegeben Position im Straßennetz zu Zeitpunkt $i - 1$, was ist die Wahrscheinlichkeit der Position im Straßennetz zum Zeitpunkt i ? Hängt insbesondere von Distanz zwischen den zwei Positionen im Straßennetz ab.



Frage: Welche Sequenz der Positionen im Straßennetzwerk ist am wahrscheinlichsten?



Newson & Krumm (2009) – letzte Details

Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

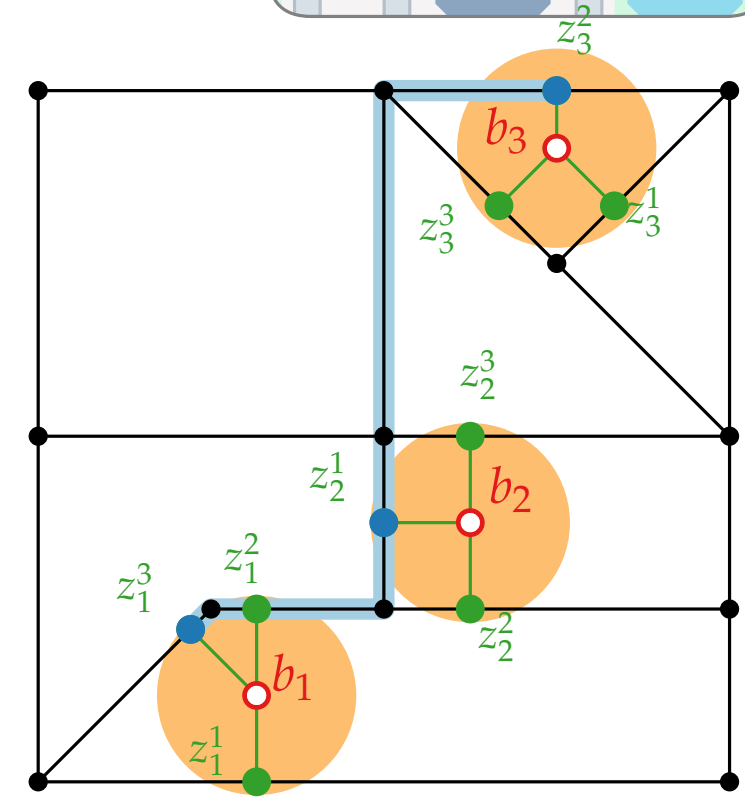
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i \mid Z_i]$ ist bekannt.

$$P[B_i = b_i \mid Z_i = z_i^j] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{d_{\text{Eudlid}}(b_i, z_i^j)^2}{2\epsilon^2}}$$

(Normalverteilung um z_i^j)

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i \mid Z_{i-1}]$ ist bekannt.

$$P[Z_i = z_i^r \mid Z_{i-1} = z_{i-1}^s] = \frac{d_{\text{Euklid}}(b_i, b_{i-1})}{d_{\text{Graph}}(z_i^r, z_{i-1}^s)}$$



Frage: Welche Sequenz der Positionen im Straßennetzwerk ist am wahrscheinlichsten?

Newson & Krumm (2009) – letzte Details



Für jeden Punkt der Trajektorie gibt es zwei Zufallsvariablen:

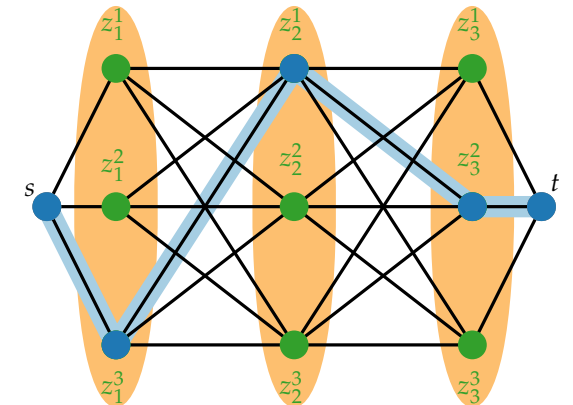
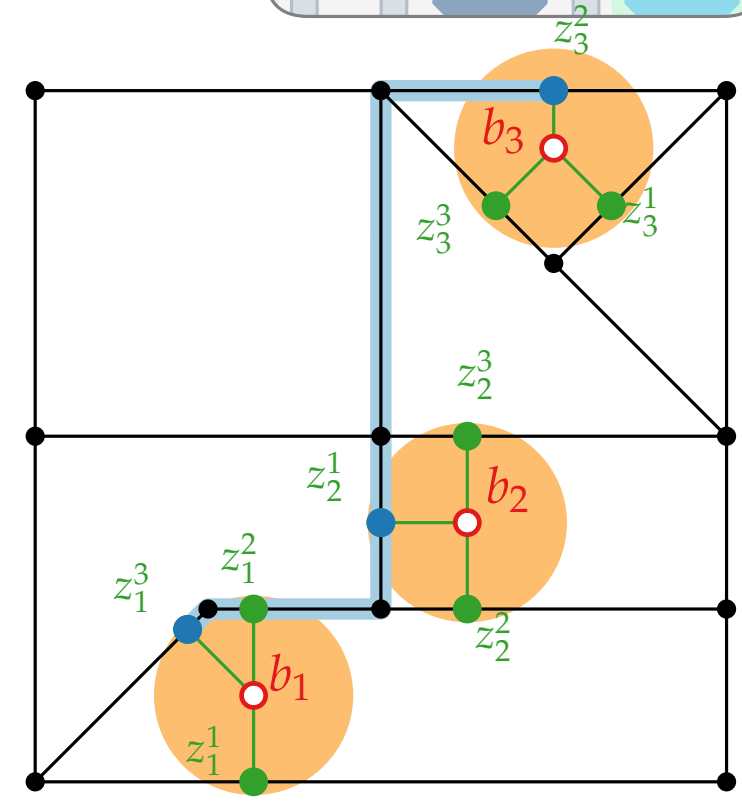
- B_i ist die beobachtete GPS Koordinate (Domäne $\mathbb{R}^2$)
- Z_i ist die Position im Straßennetz (diskrete Domäne $\{z_i^1, \dots, z_i^k\}$)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[B_i | Z_i]$ ist bekannt.

$$P[B_i = b_i | Z_i = z_i^j] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{d_{\text{Eudlid}}(b_i, z_i^j)^2}{2\varepsilon^2}}$$

(Normalverteilung um z_i^j)

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[Z_i | Z_{i-1}]$ ist bekannt.

$$P[Z_i = z_i^r | Z_{i-1} = z_{i-1}^s] = \frac{d_{\text{Euklid}}(b_i, b_{i-1})}{d_{\text{Graph}}(z_i^r, z_{i-1}^s)}$$



Frage: Welche Sequenz der Positionen im Straßennetzwerk ist am wahrscheinlichsten?