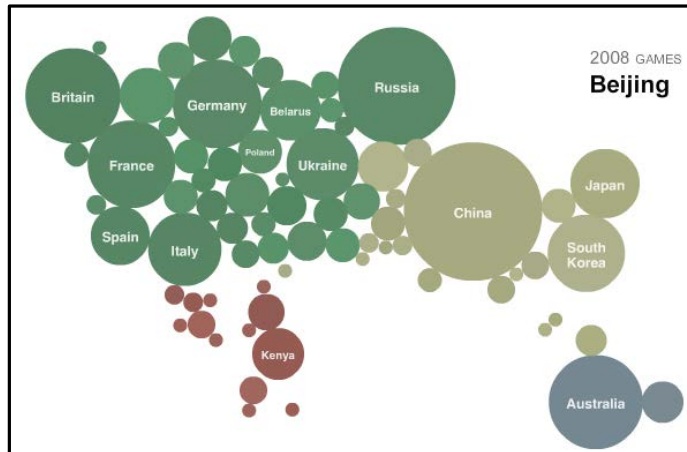


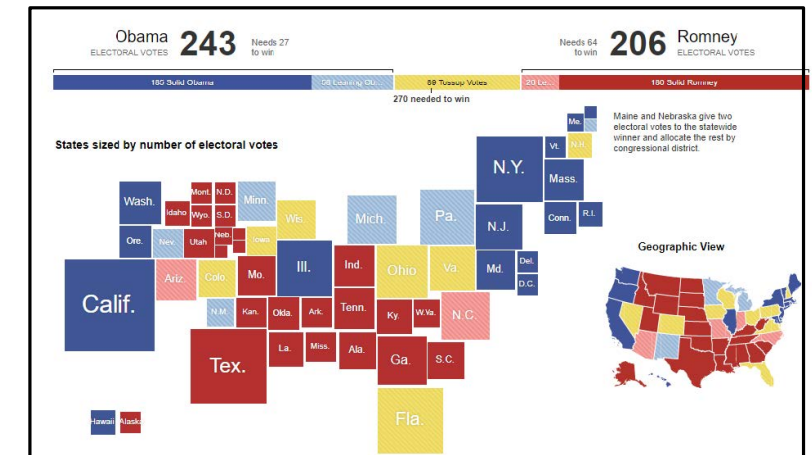
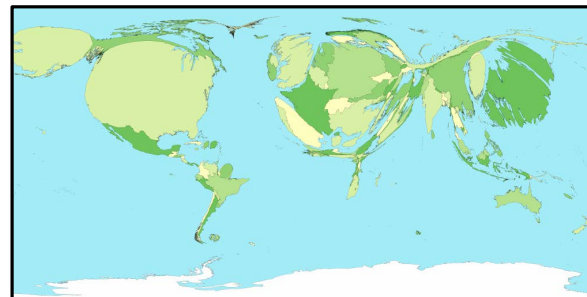
Algorithmen für geographische Informationssysteme

12. Vorlesung Kartogramme



Philipp Kindermann

Teil I: Problemstellung



Wintersemester 2024/25

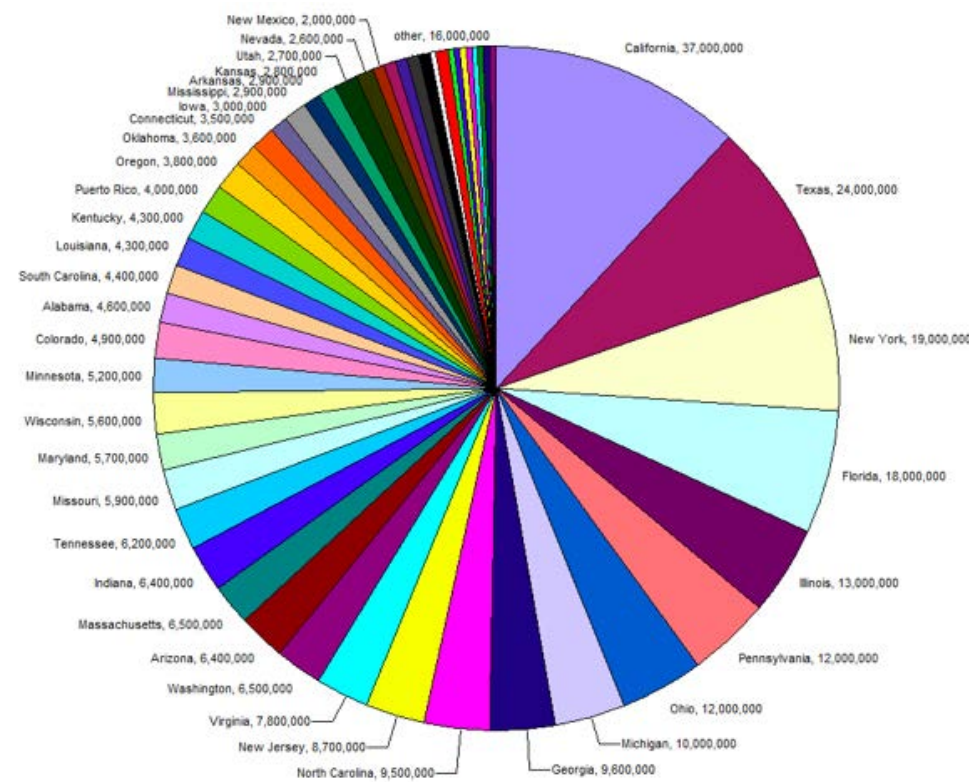


Räumliche statistische Daten

Wie visualisiert man Statistiken zu räumlichen Daten?

Beispiel. Bevölkerung in den USA

State	2011 pop.				
Alabama	4,802,740	Kentucky	4,369,356	Oklahoma	3,791,508
Alaska	722,718	Louisiana	4,574,836	Oregon	3,871,859
Arizona	6,482,505	Maine	1,328,188	Pennsylvania	12,742,886
Arkansas	2,937,979	Maryland	5,828,289	Rhode Island	1,051,302
California	37,691,912	Massachusetts	6,587,536	South Carolina	4,679,230
Colorado	5,116,796	Michigan	9,876,187	South Dakota	824,082
Connecticut	3,580,709	Minnesota	5,344,861	Tennessee	6,403,353
Delaware	907,135	Mississippi	2,978,512	Texas	25,674,681
DC	617,996	Missouri	6,010,688	Utah	2,817,222
Florida	19,057,542	Montana	998,199	Vermont	626,431
Georgia	9,815,210	Nebraska	1,842,641	Virginia	8,096,604
Hawaii	1,374,810	Nevada	2,723,322	Washington	6,830,038
Idaho	1,584,985	New Hampshire	1,318,194	West Virginia	1,855,364
Illinois	12,869,257	New Jersey	8,821,155	Wisconsin	5,711,767
Indiana	6,516,922	New Mexico	2,082,224	Wyoming	568,158
Iowa	3,062,309	New York	19,465,197		
Kansas	2,871,238	North Carolina	9,656,401		
		North Dakota	683,932		
		Ohio	11,544,951		



als Tortendiagramm?

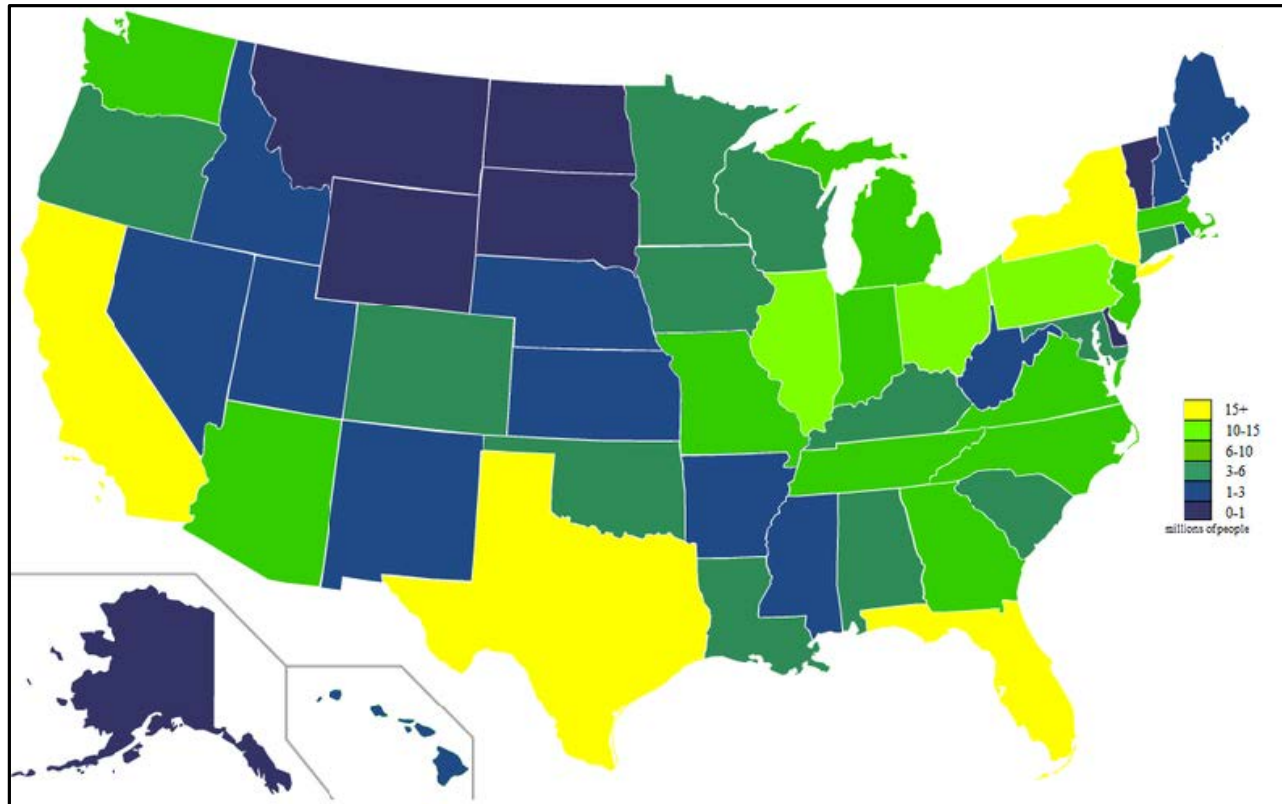


als Balkendiagramm?

als Tabelle?

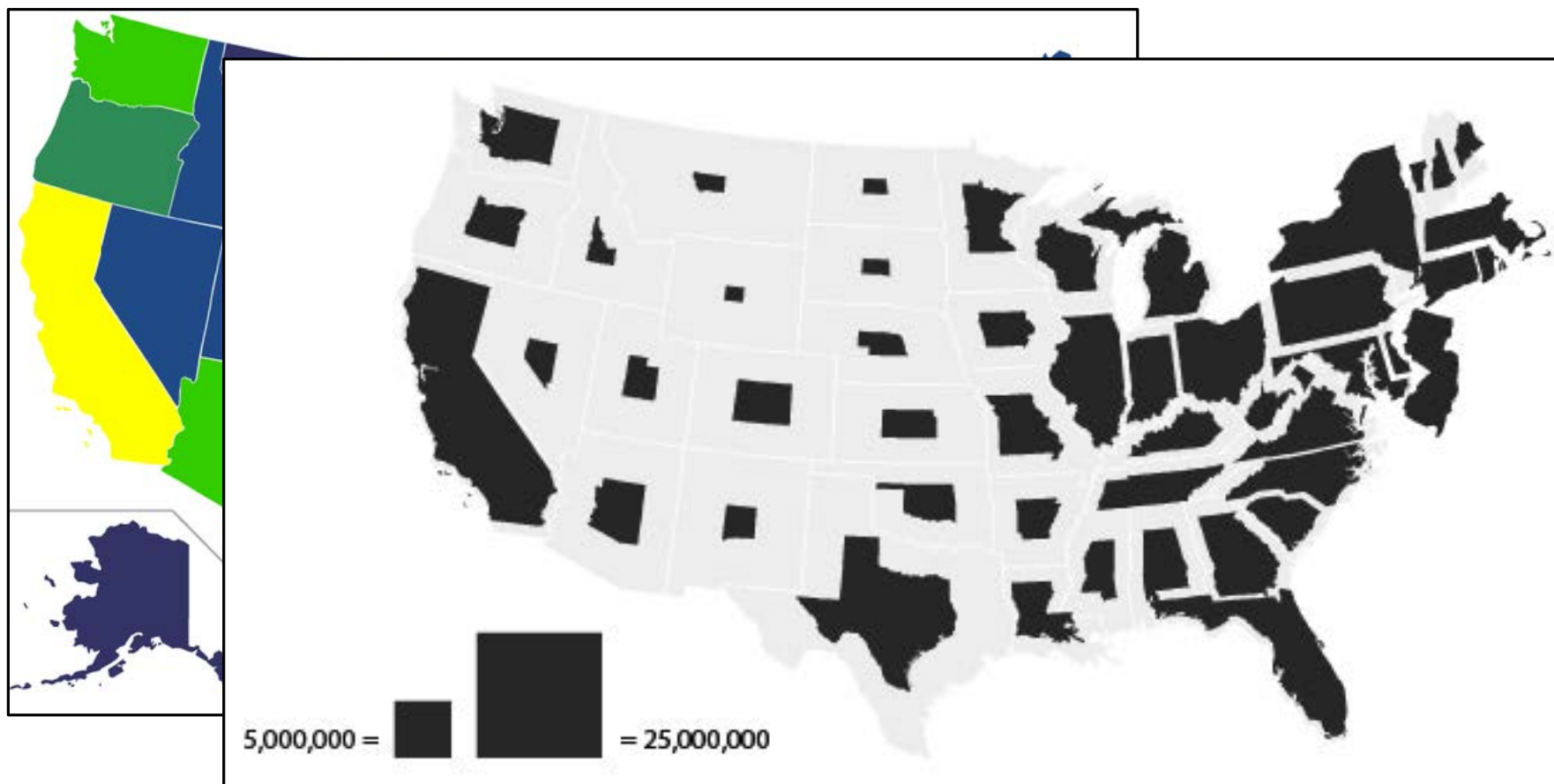
Problem: Standardmethoden zeigen keine räumlichen Muster!

Kartenbasierte statistische Visualisierung



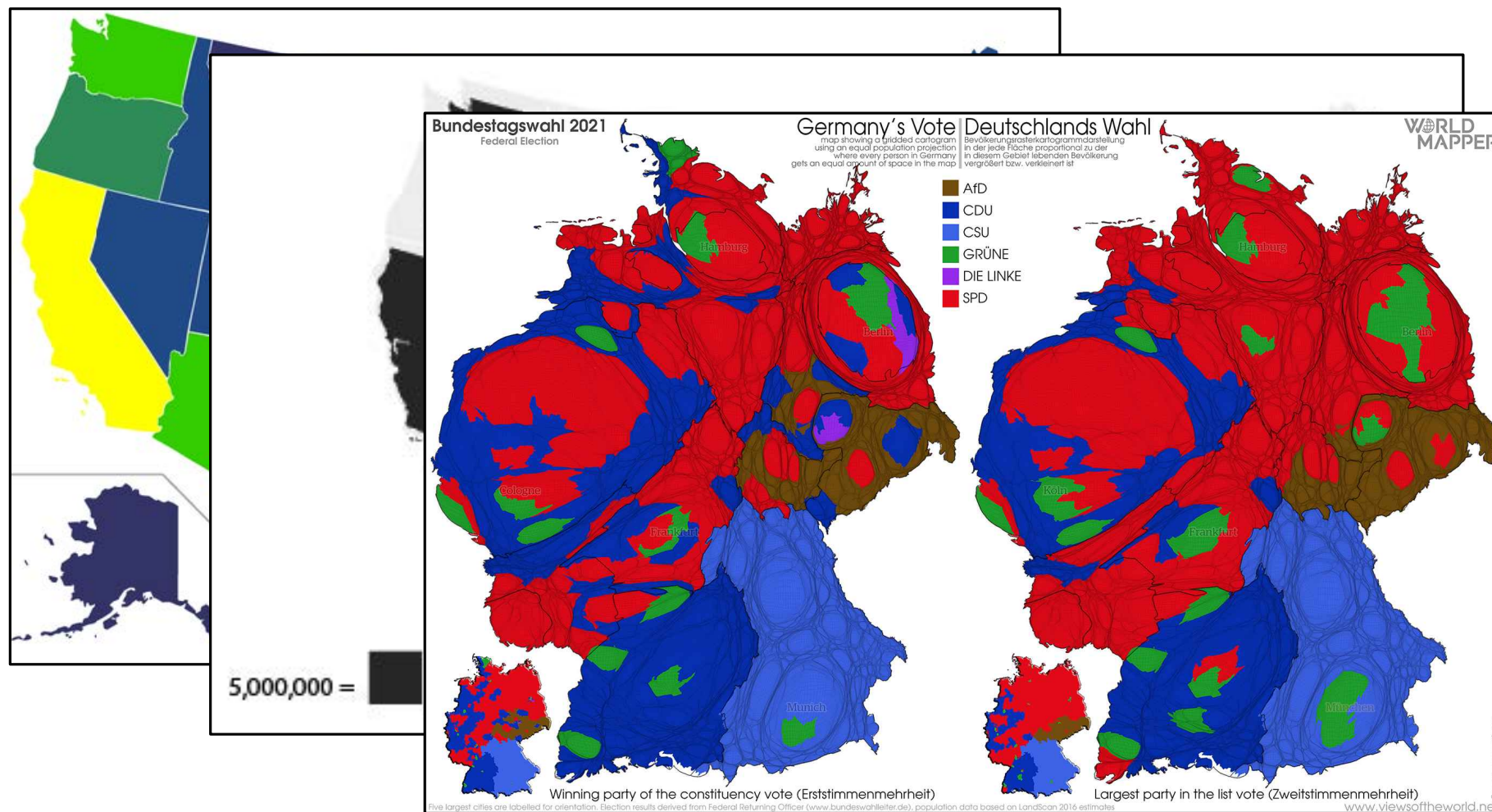
Choroplethenkarte: nutze Farbschema

Kartenbasierte statistische Visualisierung



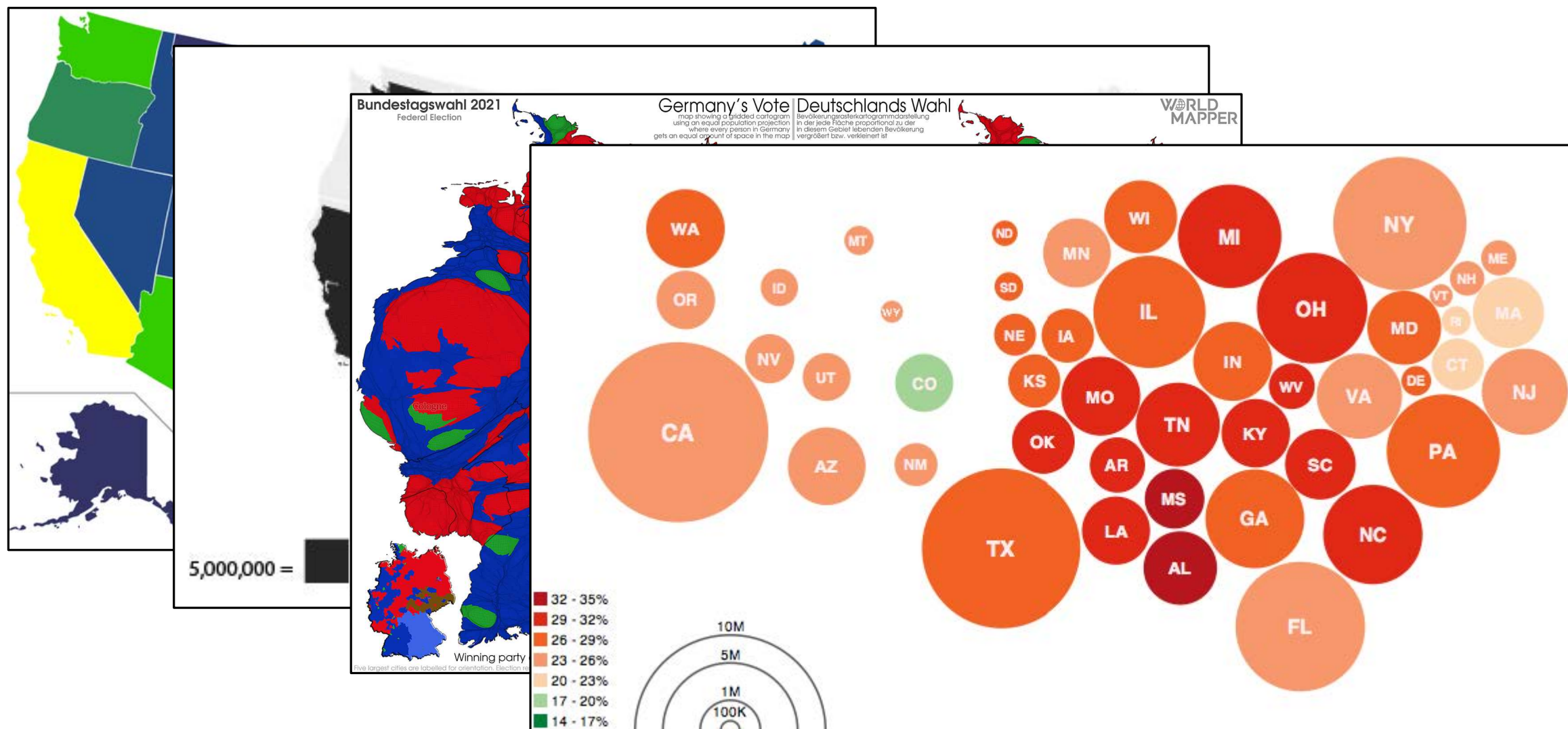
Nichtzusammenhängende Flächenkartogramme:
Fläche proportional zur Bevölkerung

Kartenbasierte statistische Visualisierung



Zusammenhängende Flächenkartogramme:
Diffusionsprozess

Kartenbasierte statistische Visualisierung

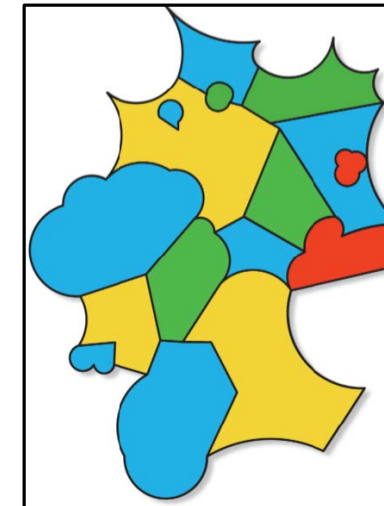
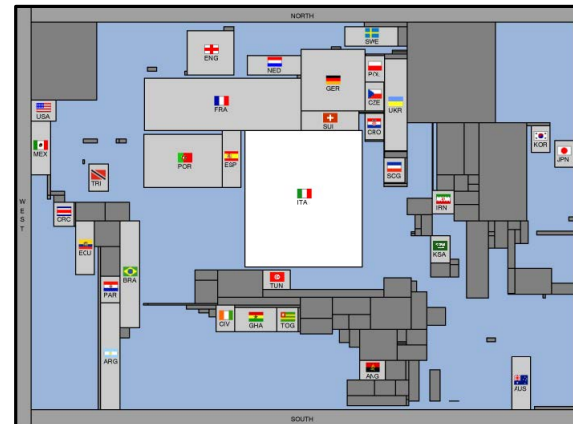
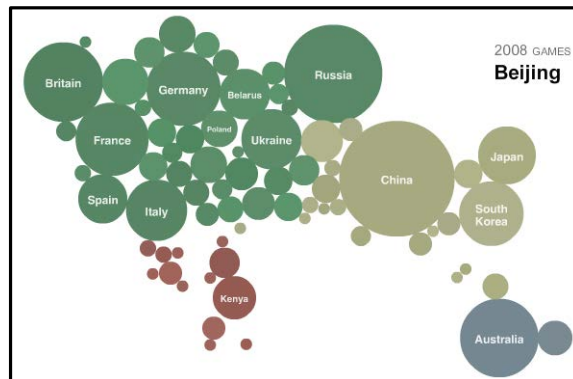
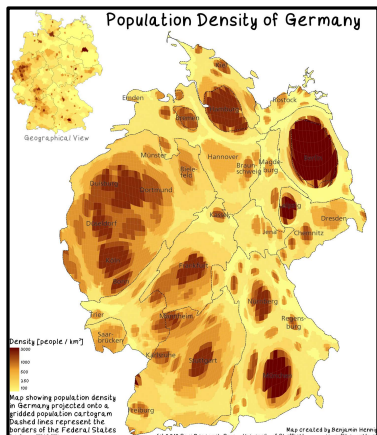


Dorlingkartogramme: Kreisscheiben proportionaler Größe

Flächenkartogramme

Ein **Flächenkartogramm** (dt. *Kartenanamorphote*) ist eine Kartendarstellung, in der jede Flächeneinheit proportional zu einer externen Größe und nicht mehr zur tatsächlichen Fläche ist (z.B. Bevölkerungszahl).

➔ Form, Lage und Nachbarschaften der Regionen werden verzerrt



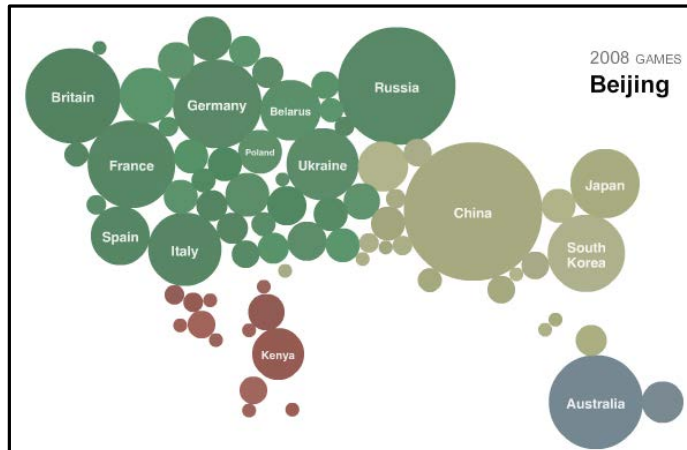
Qualitätskriterien.

- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen

- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesbarkeit der Größe

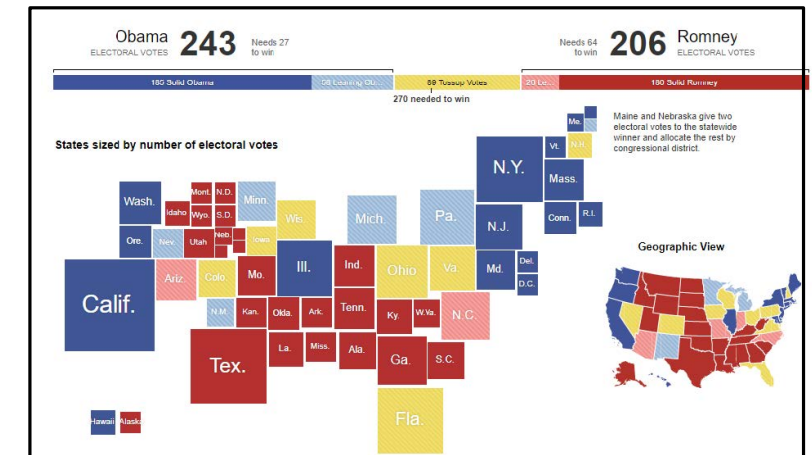
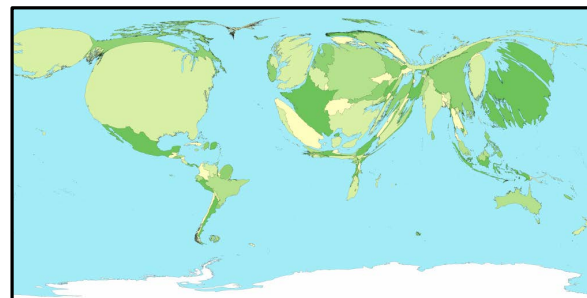
Algorithmen für geographische Informationssysteme

12. Vorlesung Kartogramme



Philipp Kindermann

Teil II: Diffusionskartogramme

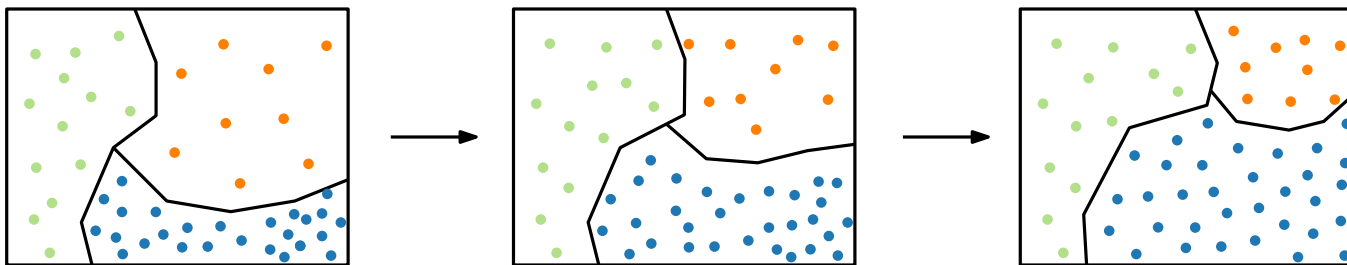


Wintersemester 2024/25

Kartenprojektion durch Diffusion [Gastner, Newman '04]



- Bevölkerungsdichte in Standardkarte sehr unterschiedlich
- ideales Kartogramm hat überall die gleiche Dichte
- modelliere Dichtenausgleich als physikalischen Diffusionsprozess
→ ergibt Transformation $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



- Diffusionsgleichung ist partielle Differentialgleichung
- Implementierung nutzt Fouriertransformation und numerische Lösungsverfahren
- asymptotisch konstante Dichte in ganzer Karte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{4}{L_x L_y} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t), \quad [8]$$

where the sum is over all wave vectors $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = 2\pi(m/L_x, n/L_y)$, with m and n nonnegative integers, and $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ is the discrete cosine transform of $\rho(\mathbf{r}, t = 0)$:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4}(\delta_{k_x,0} + 1)(\delta_{k_y,0} + 1) \times \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(\mathbf{r}, 0) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \quad [9]$$

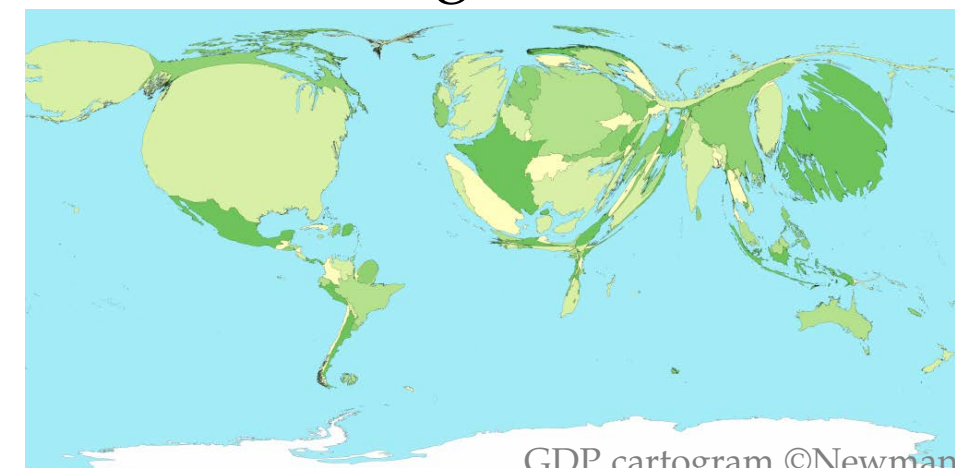
where δ_{ij} is the Kronecker symbol. The velocity field $\mathbf{v}$ is then easily calculated from Eqs. 6 and 8 and has components

$$v_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\sum_{\mathbf{k}} k_x \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t)}{\sum_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t)}, \quad [10a]$$

$$v_y(\mathbf{r}, t) = \frac{\sum_{\mathbf{k}} k_y \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-k^2 t)}{\sum_{\mathbf{k}} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t)}. \quad [10b]$$

It is straightforward to see that our diffusion cartogram satisfies the fundamental definition, Eq. 1, of a cartogram. In the limit $t \rightarrow \infty$, Eq. 8 is dominated by the $\mathbf{k} = 0$ term and gives

$$\rho(\mathbf{r}, \infty) = \frac{4\tilde{\rho}(0)}{L_x L_y} = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(\mathbf{r}, 0) dx dy = \bar{\rho}, \quad [11]$$



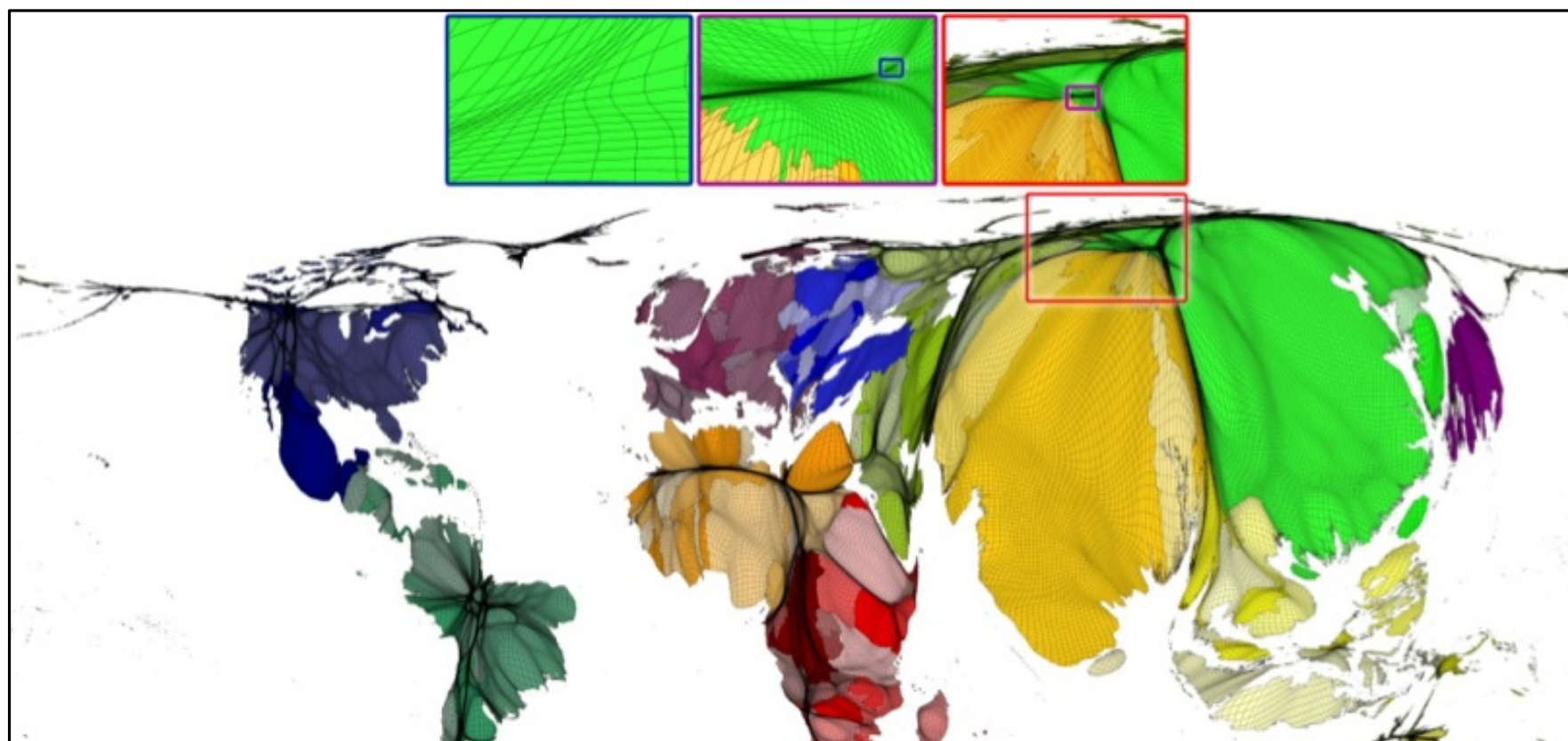
Gitterbasierte Diffusionskartogramme [Hennig '11]



- Erweiterung durch fein aufgelöstes Gitter ($\approx 365K$ Zellen)
- Datenwert für jede Gitterzelle ermöglicht detailliertere Kartogramme (Abbildung von Ballungsräumen etc)



Philipp Hennig



Demo.

<https://sourceforge.net/projects/scapetoad>

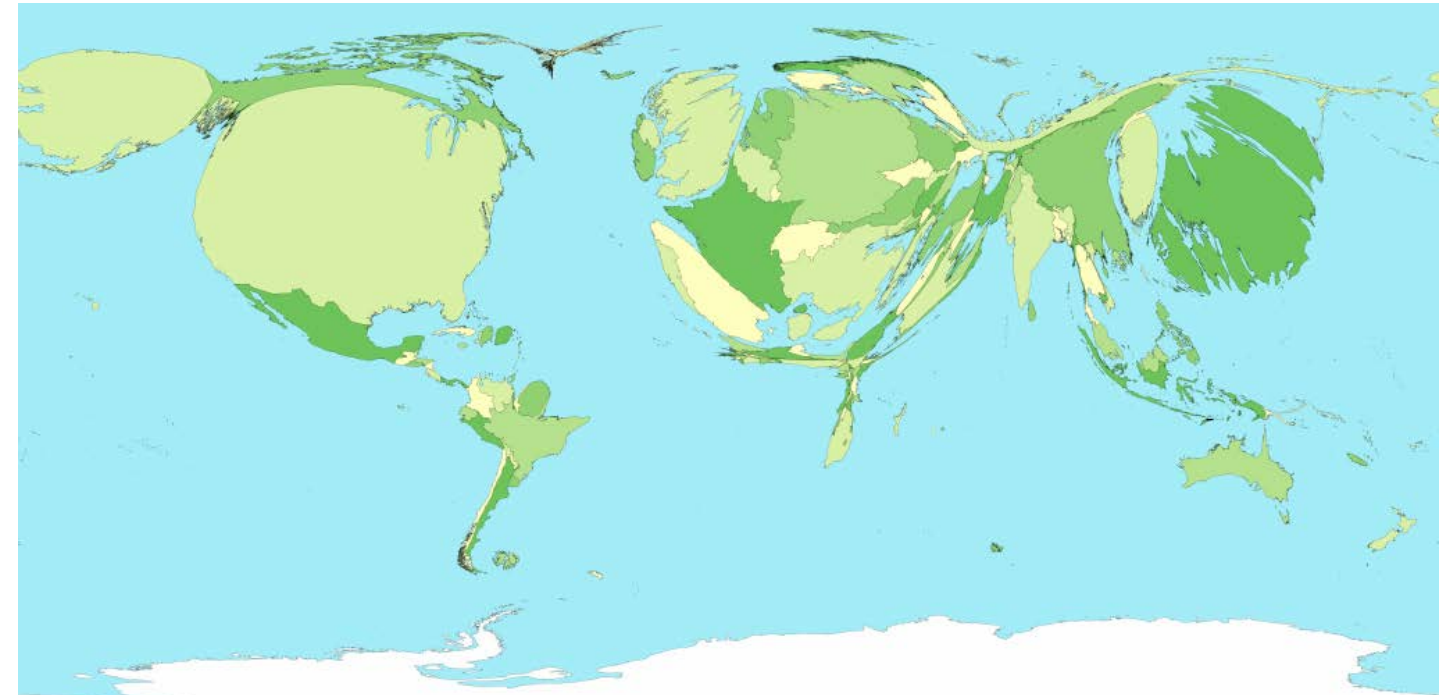
<https://observablehq.com/@riate/flow-based-cartograms-gastner-seguy-more-2018-in-the-browser>

Zusammenfassg. Diffusionskartogramme



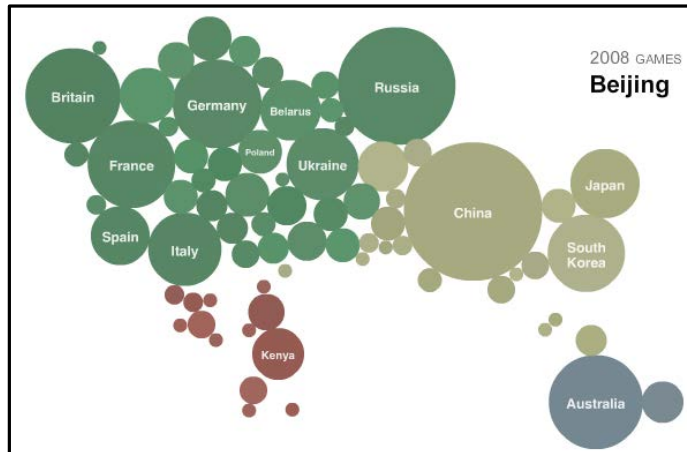
Diskussion.

- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesbarkeit der Größe

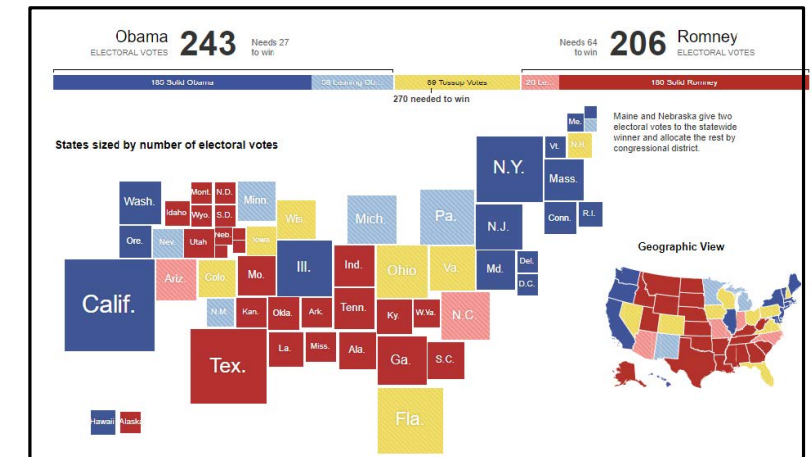
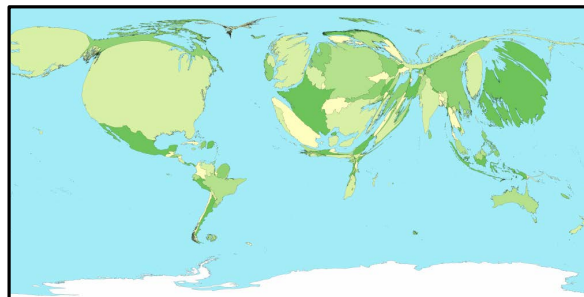


Algorithmen für geographische Informationssysteme

12. Vorlesung Kartogramme



Teil III: Kreiskartogramme (auch Dorling Kartogramme)



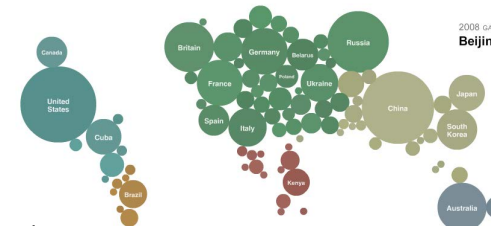
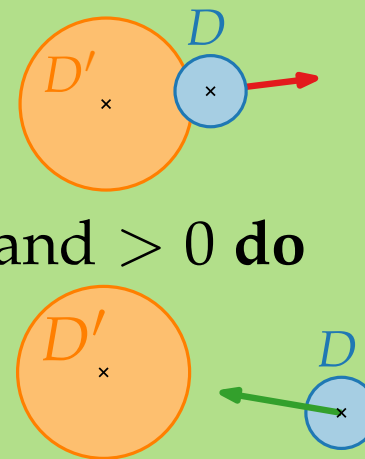
Kreiskartogramme [Dorling '95]

- einfache, abstrakte Form: jede Region als Kreisscheibe
 - Fläche fest skaliert bzgl. gegebener Größe
 - initiale Platzierung im Schwerpunkt der Region
 - iteratives Verschieben zum Auflösen der Überlappungen
- kräftebasierter Algorithmus (ähnlich Spring-Embedder):

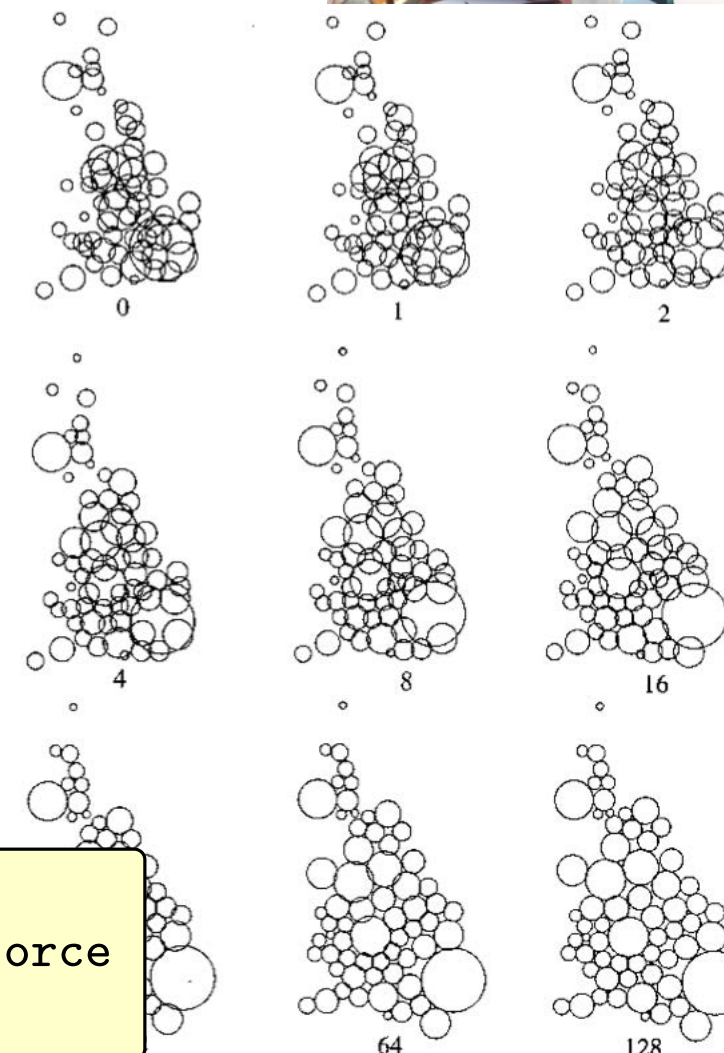
```

while Kräfte >  $\varepsilon$  do
  foreach disk  $D$  do
    foreach disk  $D' \cap D \neq \emptyset$  do
      | Abstoßung von  $D'$ 
    foreach geogr. Nachbar  $D'$  von  $D$  mit Abstand > 0 do
      | Anziehung zu  $D'$ 

```



Danny Dorling



Demo.

<https://observablehq.com/@observablehq/dorling-cartograms-in-plot-with-d3-force>

<https://observablehq.com/@joewdavies/dorling-cartogram-configuration>

Verbesserung Kreiskartogramme [Inoue '11]



Weiteres Kriterium:

- minimiere Abweichung der relativen Lage benachbarter Regionen

Formulierung als nicht-lineares Optimierungsproblem:

Minimiere $\sum_{(i,j) \in E} \left[\alpha \left(\frac{d_{ij}}{r_i + r_j} - 1 \right)^2 + (1 - \alpha) \left(\theta_{ij} - \theta_{ij}^{(0)} \right)^2 \right]$

geogr. Nachbarn

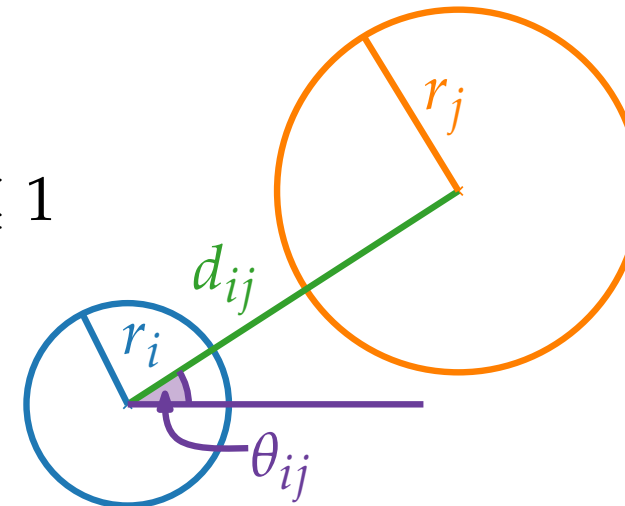
Eingabewinkel

unter den NB. $d_{ij} \geq r_i + r_j \quad \forall i \neq j$

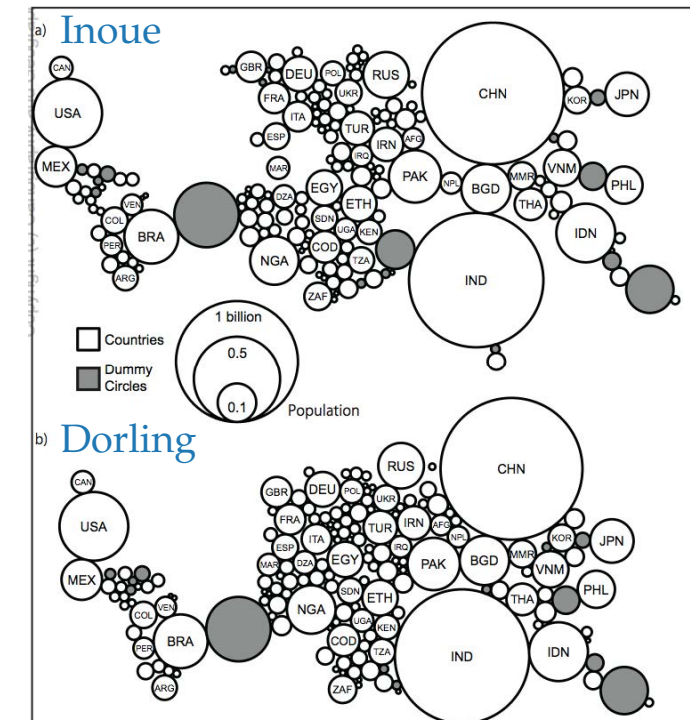
$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\theta_{ij} = \arctan \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Lösung mit Solver NUOPT.



Ryo Inoue

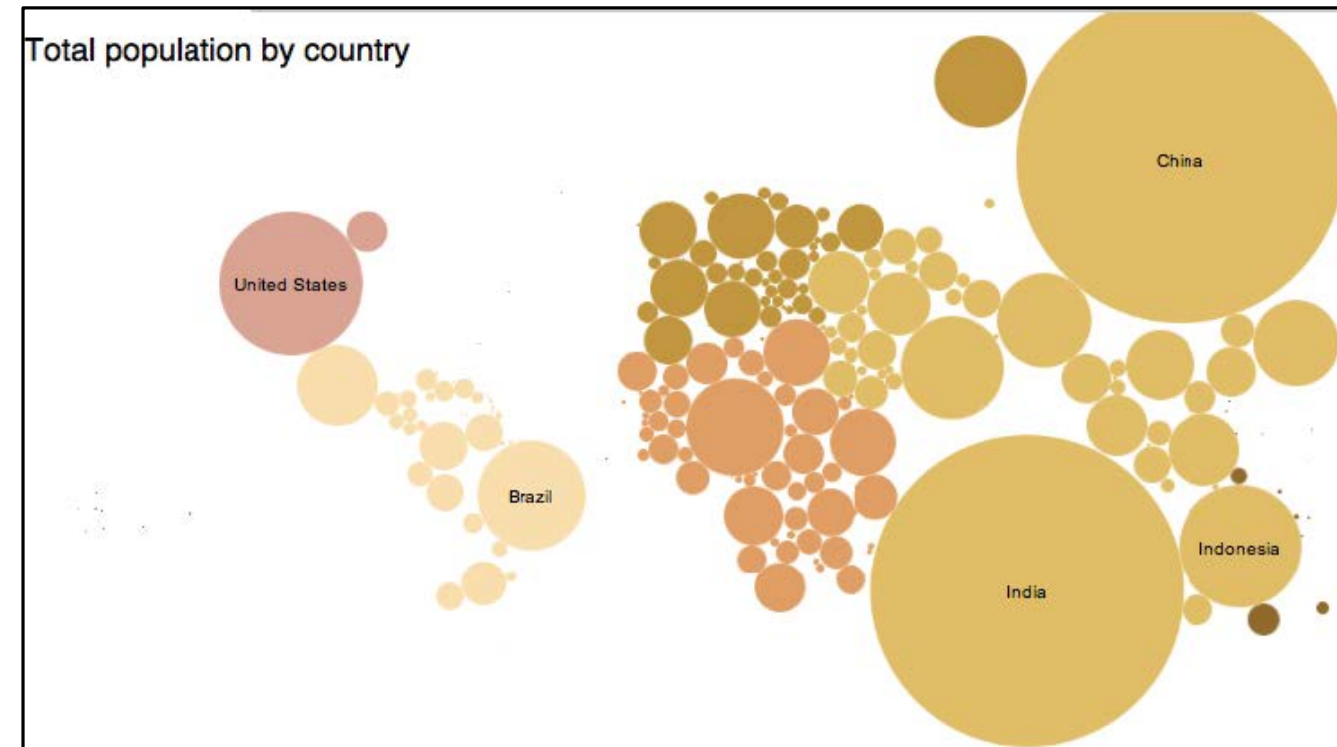


Zusammenfassung Kreiskartogramme



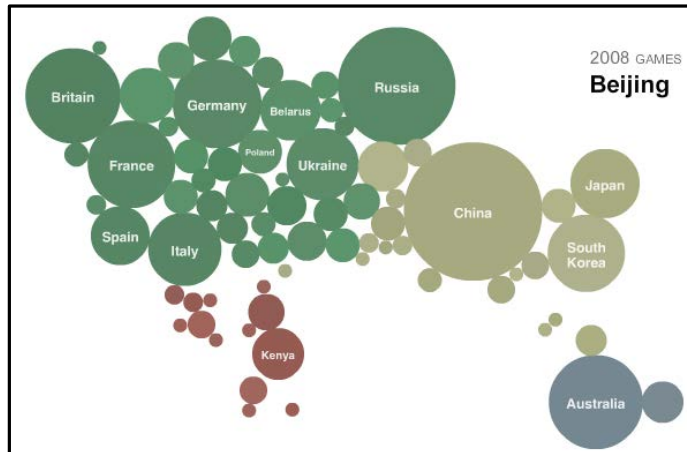
Diskussion.

- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesbarkeit der Größe

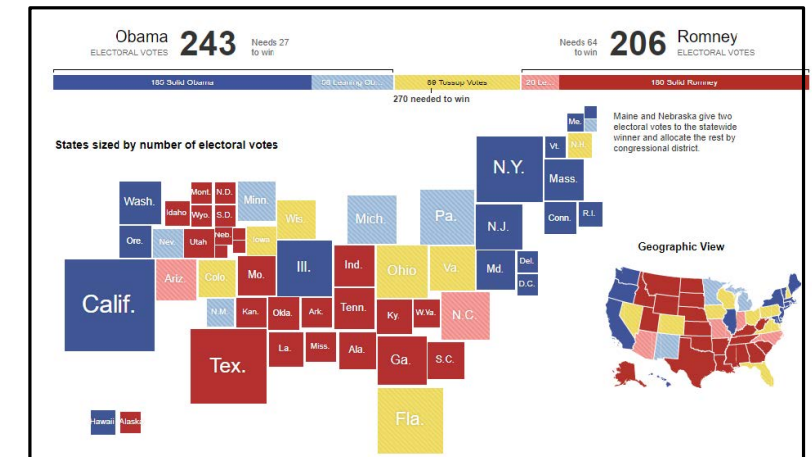
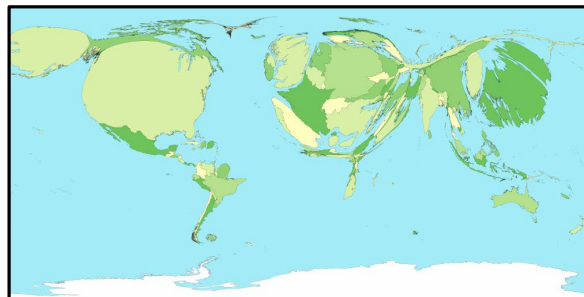


Algorithmen für geographische Informationssysteme

12. Vorlesung Kartogramme



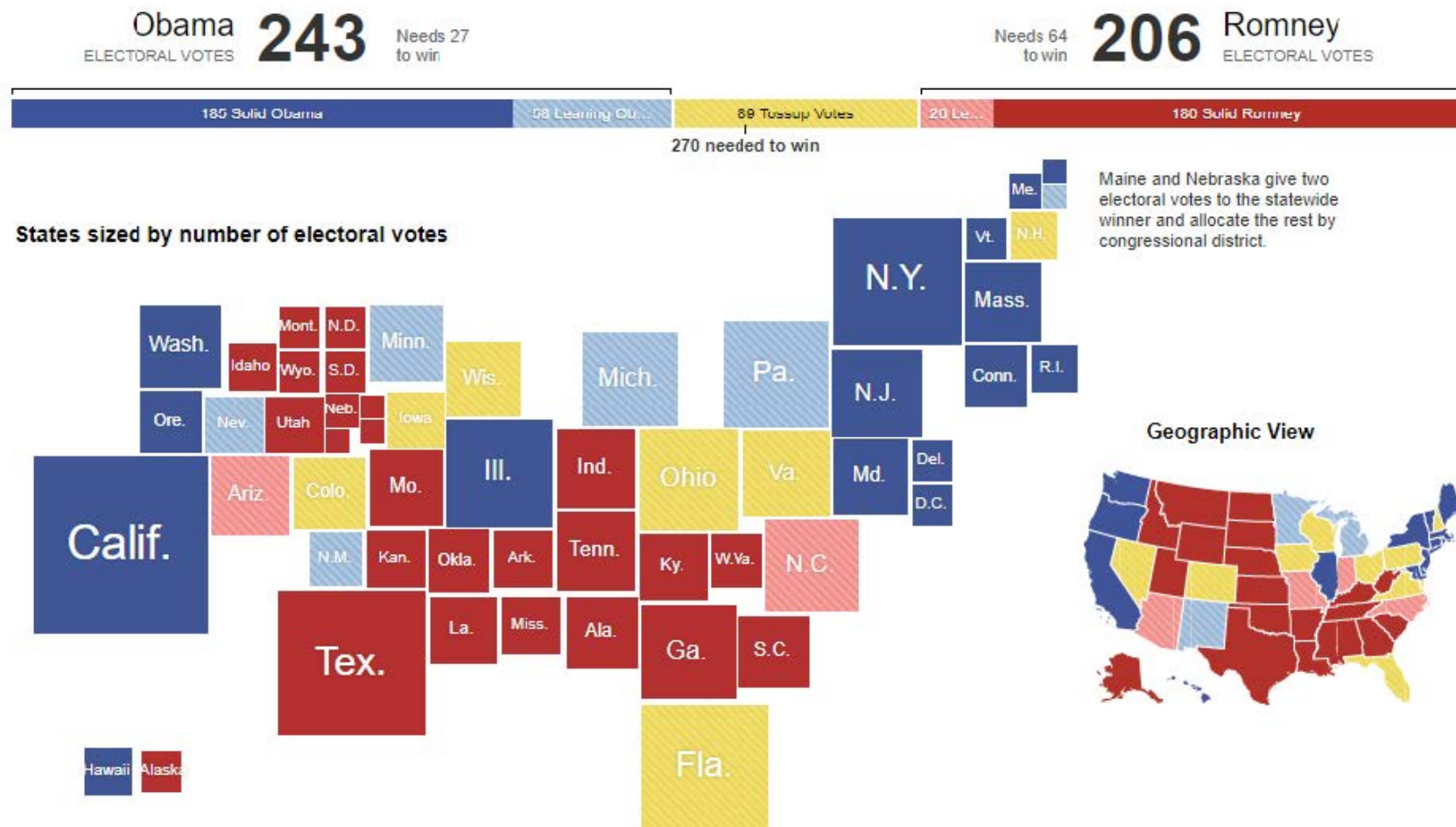
Teil IV: Rechteckskartogramme (auch Demers Kartogramme)



Rechteckskartogramme



- jede Region als Rechteck repräsentiert
- gegebene Zielflächen
- Trade-Off: korrekte Flächen vs. korrekte Adjazenzen



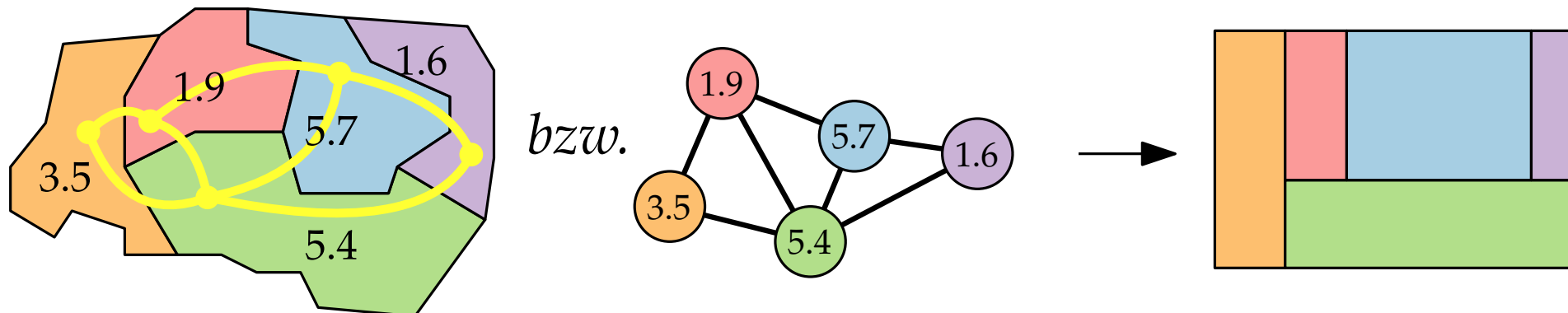
Problemstellung

Gegeben. politische Karte M (Rechtecksunterteilung),
positives Gewicht w_i für jede Region R_i

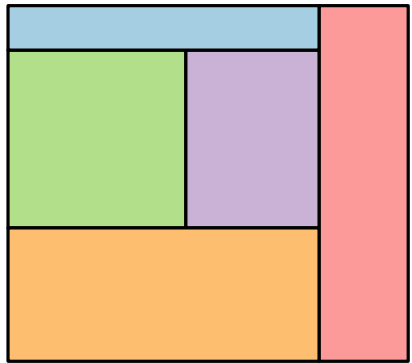
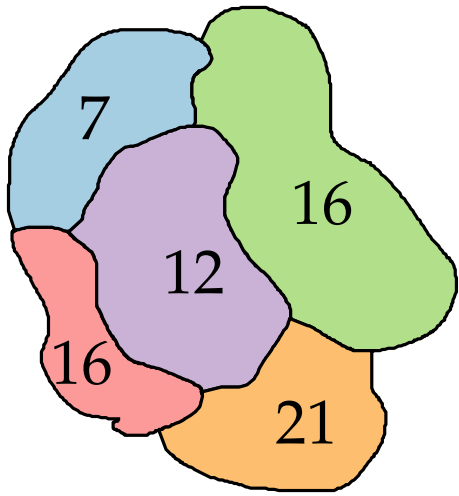
bzw. knotengewichteter intern triangulierter planar eingeb. Graph G dual zu M ,
Knoten v_i entspricht Region R_i , Kanten zw. adjazenten Regionen,
Knotengewichte w_i

Gesucht. verzerrte Karte M' äquivalent zu M mit $|R_i| = w_i$

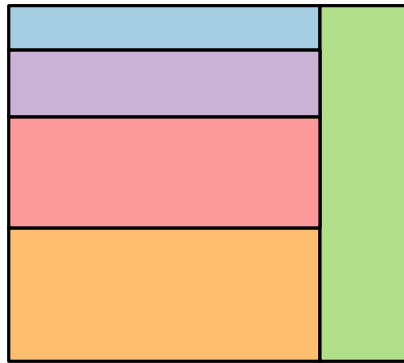
bzw. flächenproportionale Kontaktrepräsentation von G ,
jeder Knoten v_i als geometrisches Objekt s_i mit Fläche w_i ,
so dass s_i und s_j sich berühren $\Leftrightarrow v_i v_j \in E$



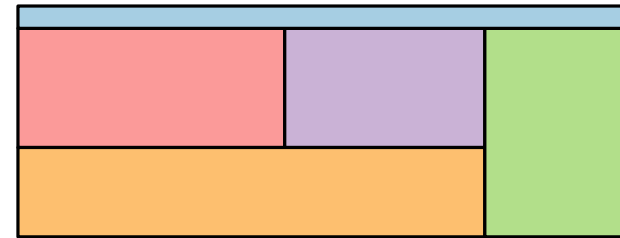
Qualitätskriterien



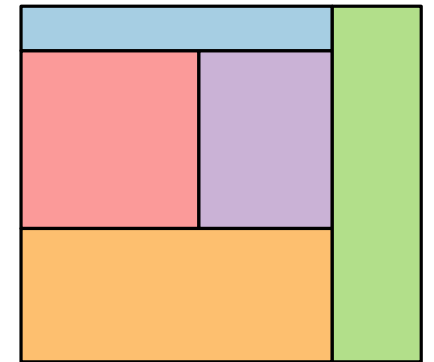
falsche relative Lage



falsche Adjazenzen



schlechtes Seitenverhältnis



gute Lösung

- kleiner Fehler
- korrekte Adjazenzen
- gutes Seitenverhältnis
- korrekte relative Positionen

Überblick des Verfahrens

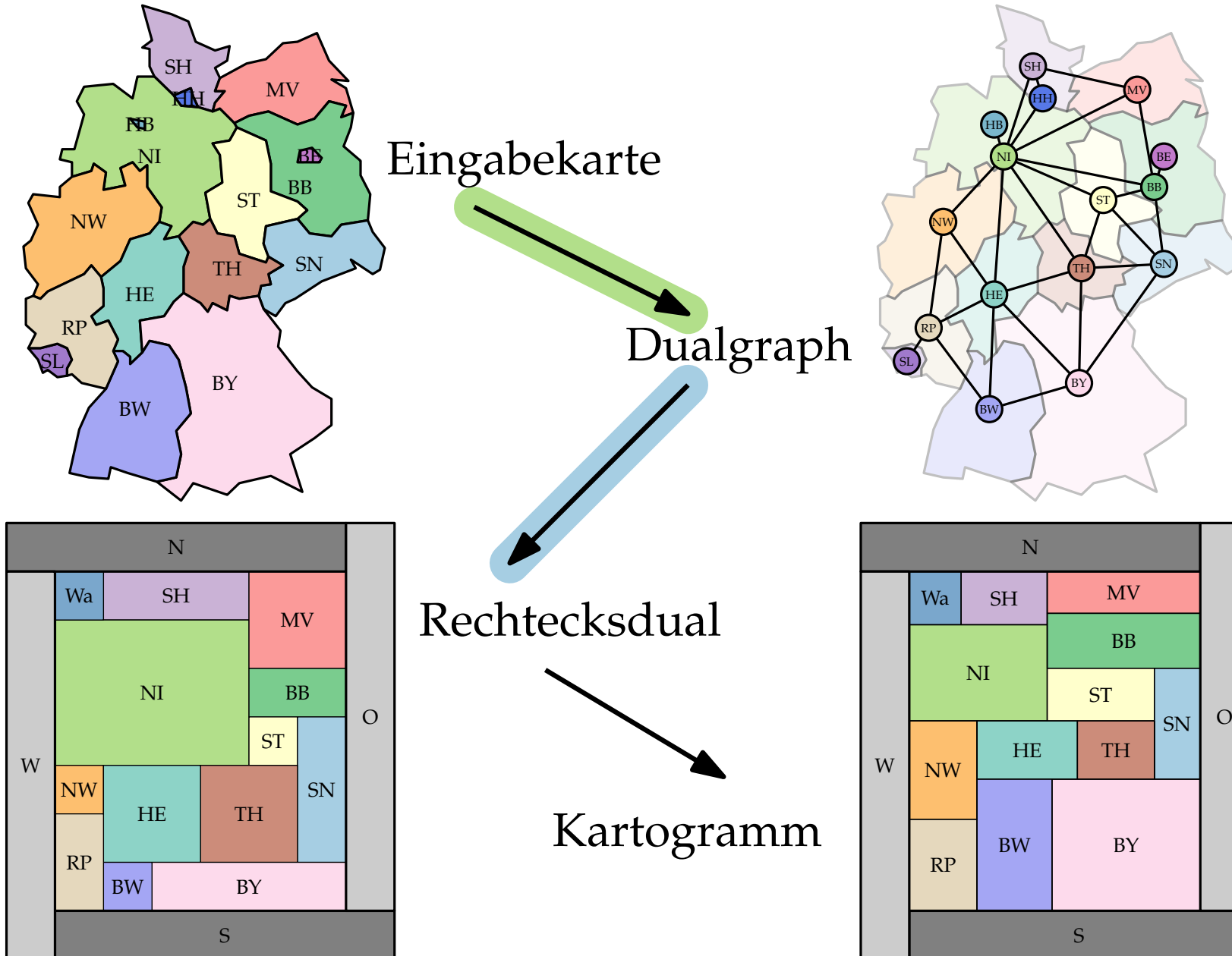
[van Kreveld, Speckmann '07]



Marc van Kreveld



Bettina Speckmann



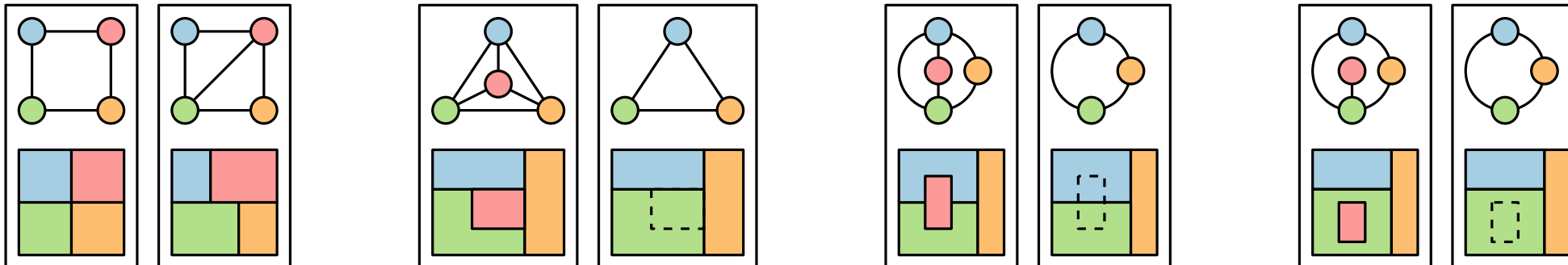
Rechtecksdual

- Ein eingebetteter Graph heißt intern **trianguliert**, wenn jede (innere) Facette ein Dreieck ist.
- Ein Kreis C in G heißt **separierend**, wenn sowohl innerhalb als auch außerhalb von C weitere Knoten liegen.

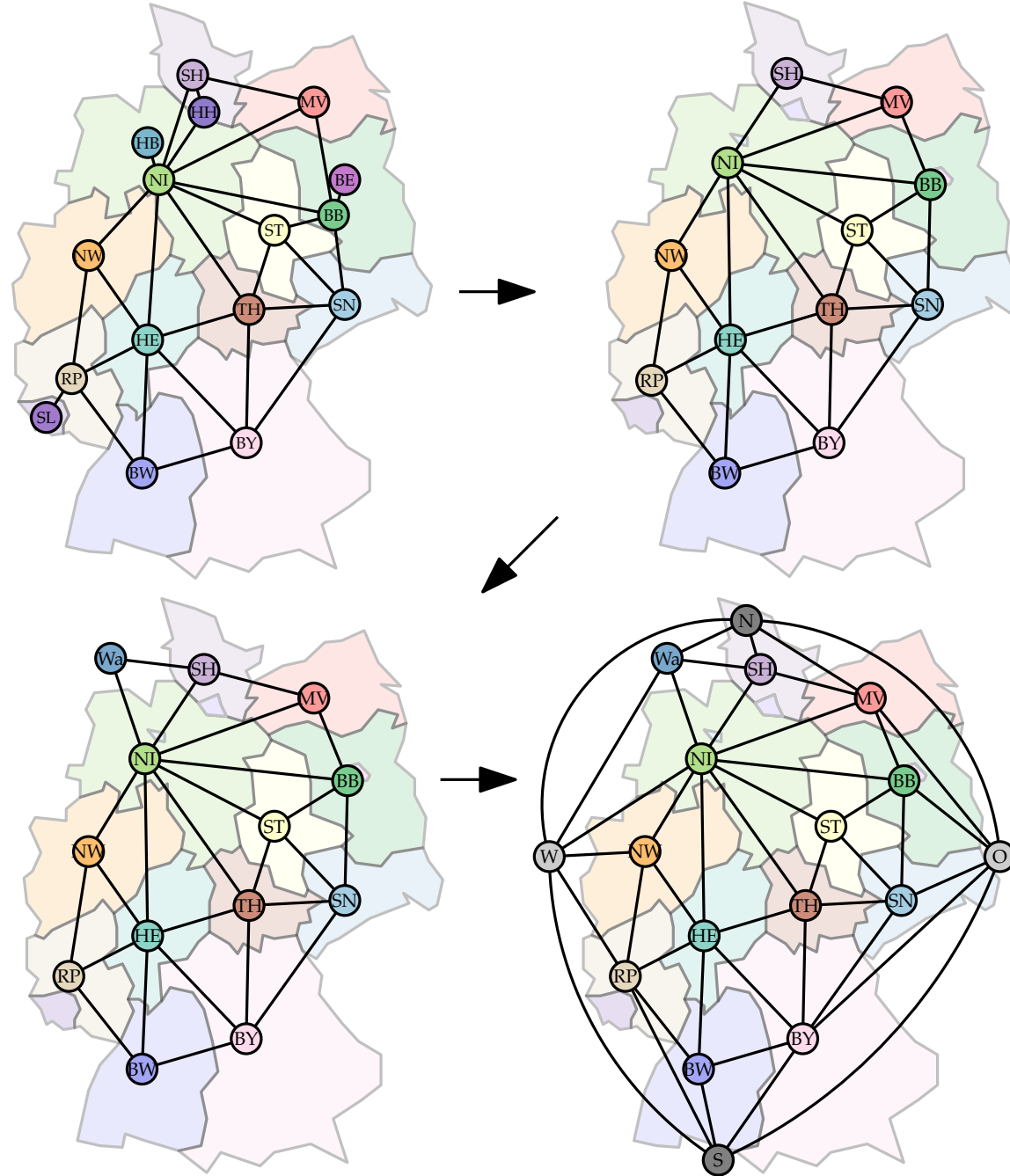
Satz. Ein planar eingebetteter Graph G hat ein Rechtecksdual $\mathcal{R}$ mit vier äußeren Rechtecken gdw.

- G intern trianguliert,
- äußere Facette ein Viereck,
- G enthält keine separierenden Dreiecke.

Graphmodifikationen:



Beispiel Deutschland



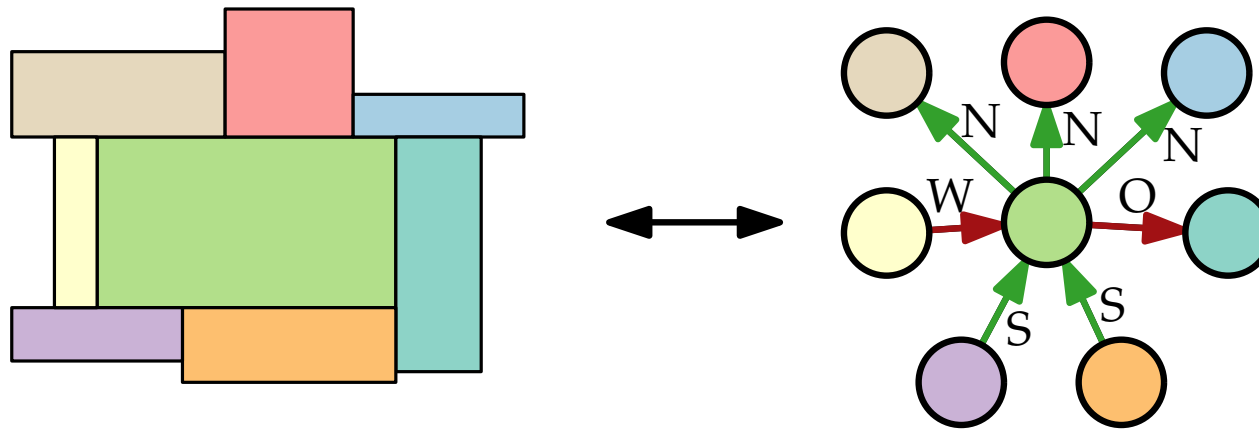
Entferne Grad-1- und Grad-2-Knoten.

Füge flexiblen Meeresknoten als Puffer hinzu.

Erstelle äußeres Viereck
→ **Satz** gilt.

Reguläre Kantenbeschriftung

Die Nachbarn jedes inneren Rechtecks lassen sich in vier nichtleere Gruppen einteilen (N, O, S, W) und bilden in der zyklischen Ordnung vier Blöcke.



ist nicht eindeutig!

Eine Beschriftung der Kanten eines Graphen G mit $\{N, O, S, W\}$ heißt **reguläre Kantenbeschriftung**, falls obige Bedingung an jedem inneren Knoten erfüllt ist.

- richte Kanten von W nach O und von S nach N
- färbe W–O Kanten rot und S–N Kanten grün

Konstruktion Rechtecksdual

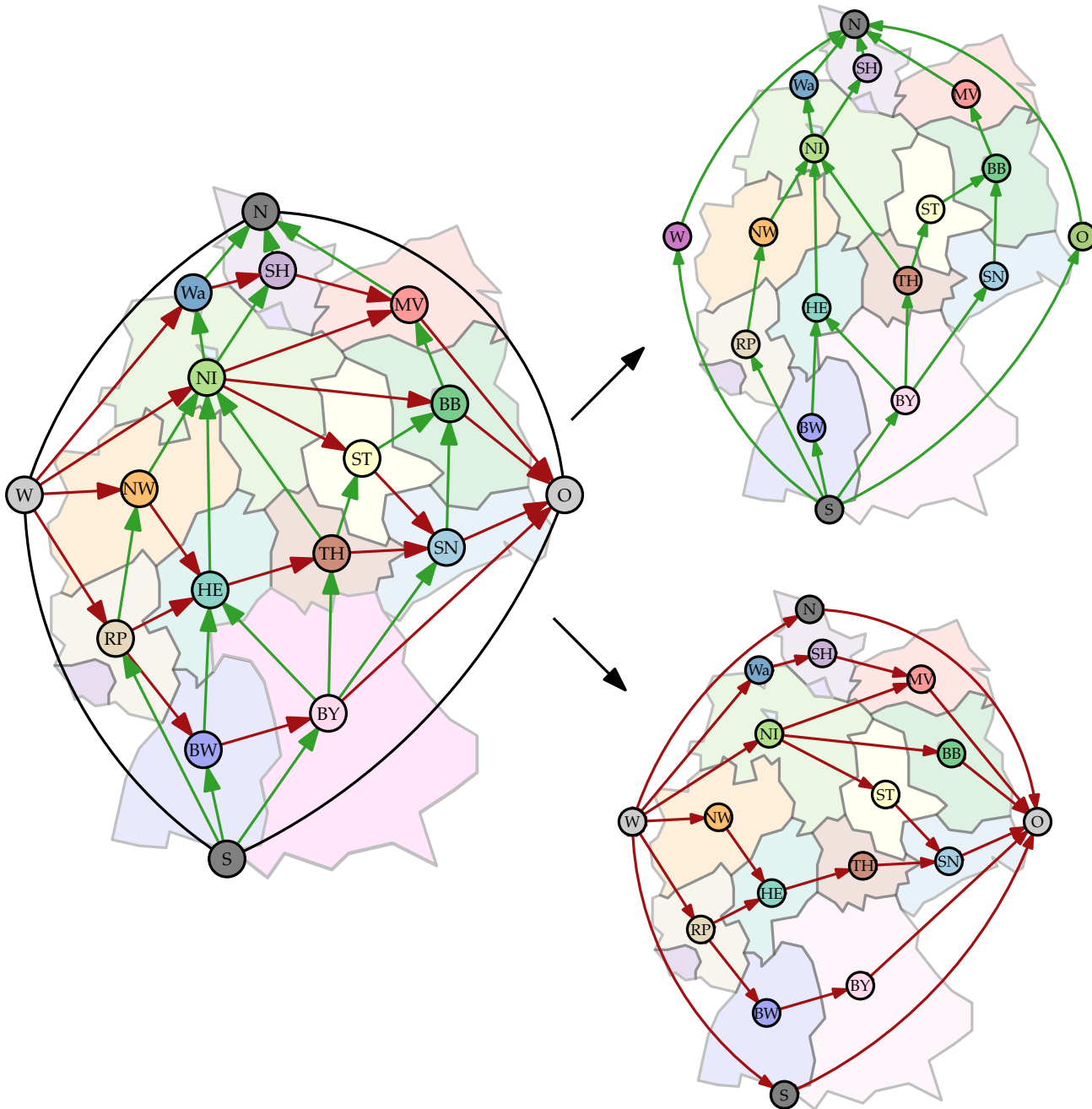
[He, Kant '97]



Xin He



Goos Kant



Konstruktion Rechtecksdual

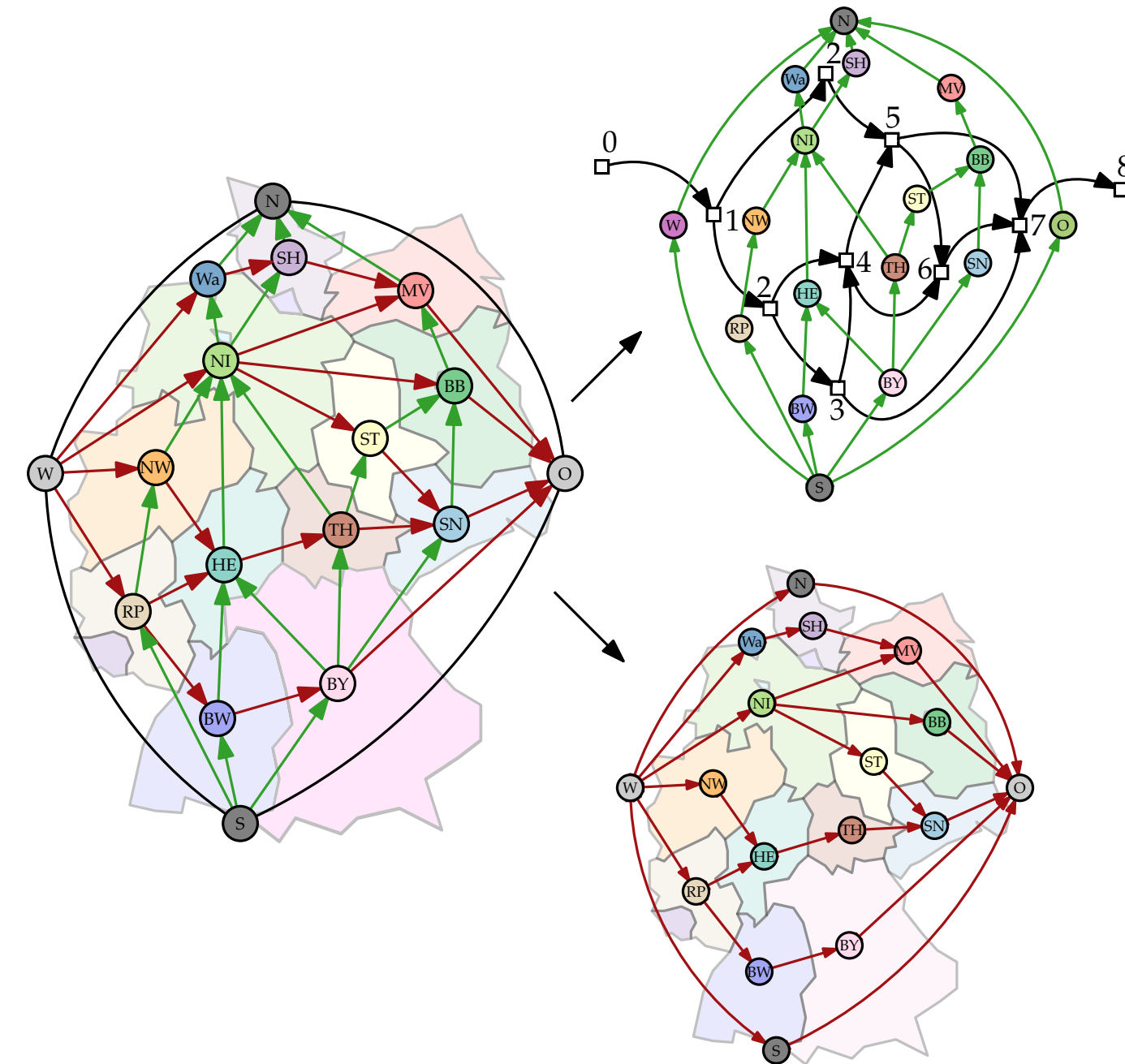
[He, Kant '97]



Xin He



Goos Kant



Konstruktion Rechtecksdual

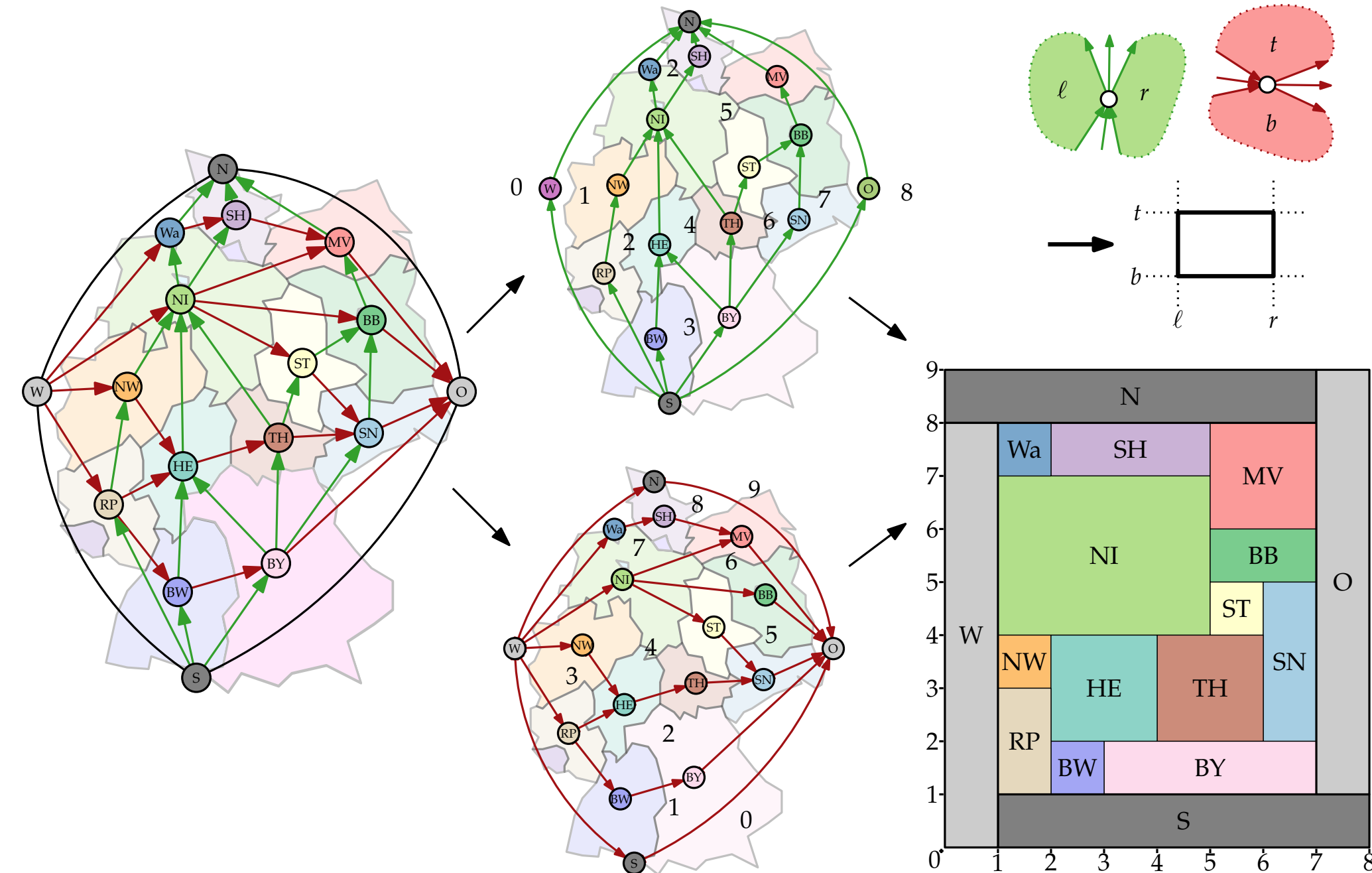
[He, Kant '97]



Xin He



Goos Kant



Überblick des Verfahrens

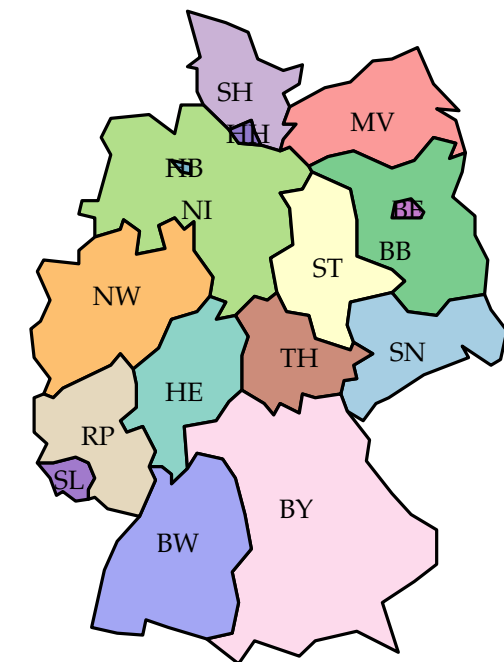
[van Kreveld, Speckmann '07]



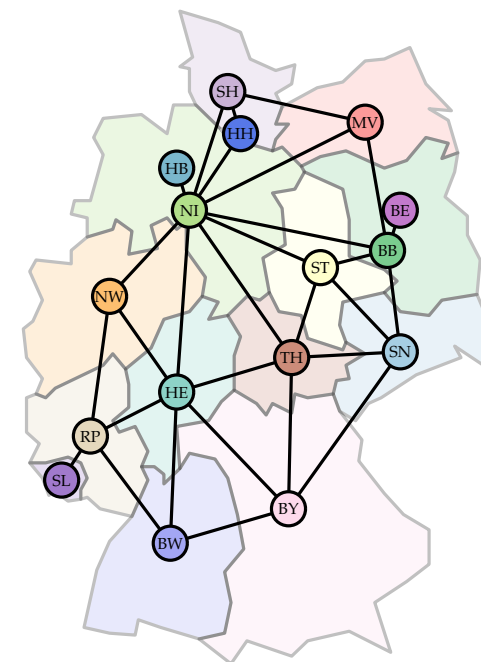
Marc van Kreveld



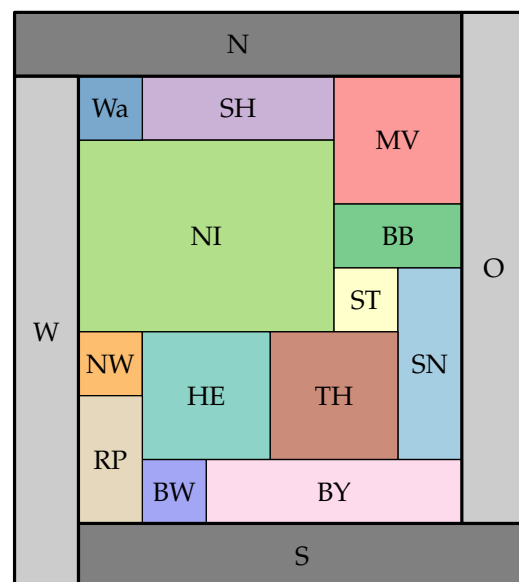
Bettina Speckmann



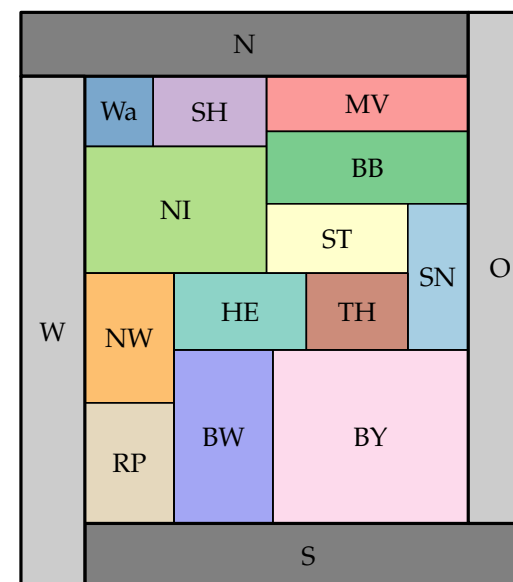
Eingabekarte



Dualgraph



Rechtecksdual

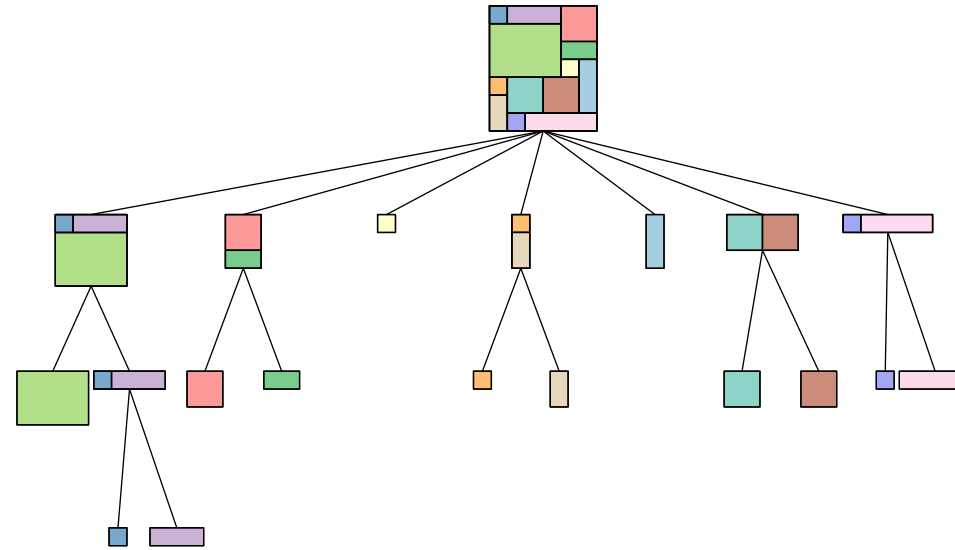
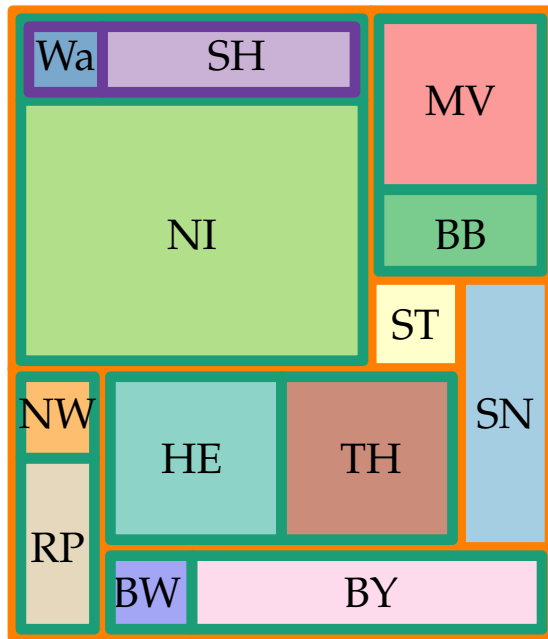


Kartogramm

Problem: Flächenzuweisung

Abstraktes Rechtecksdual benötigt noch korrekte Flächen

Betrachte hierarchische Rechteckszerlegung:

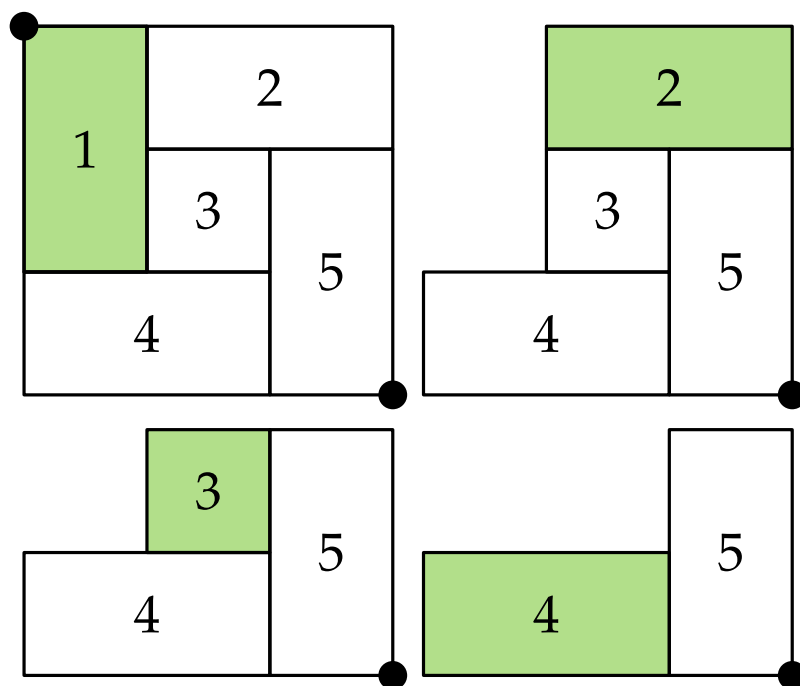


Gruppieren Rechtecke, die zusammen größere Rechtecke bilden

- **zerschneidbare** Layouts, die in zwei Teile zerfallen ➔ leichter Fall
- komplexere Rechtecke ➔ Algorithmus für **L-zerlegbare** Layouts

L-zerlegbare Layouts

Ein **irreduzibles** Rechteckslayout $\mathcal{R}$ heißt **L-zerlegbar**, falls es eine Folge $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ der Rechtecke in $\mathcal{R}$ gibt, so dass R_1 und R_n in gegenüberliegenden Ecken von $\mathcal{R}$ liegen und für $i \in \{1, \dots, n\}$ das Polygon $\bigcup_{j=i}^n R_j$ L-förmig ist.

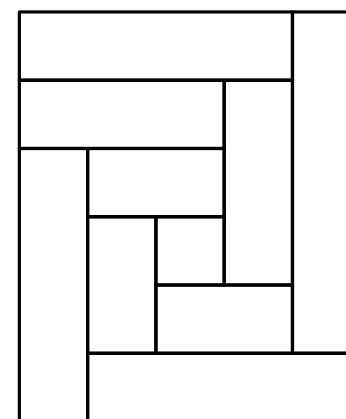


L-Zerlegungssequenz

irreduzibel: Keine Teilmenge $S \subseteq \mathcal{R}$ mit $|S| > 1$ bildet Rechteck

Demo.

<https://bspeckmann.win.tue.nl/demos/game/index.html>



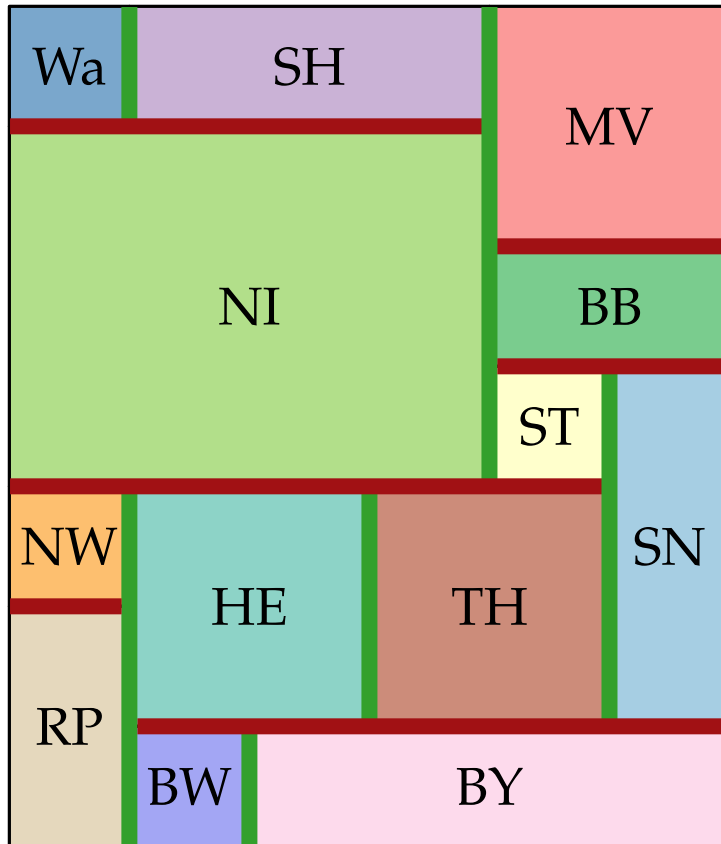
nicht L-förmig zerlegbar

Satz. Ein L-zerlegbares Layout hat entweder genau eine oder keine Lösung als Kartogramm ohne Flächenfehler und mit korrekten Adjazenzen.



Heuristik für Rechteckskartogramme

Nicht jedes Rechtecksdual ist L-zerlegbar, nicht jede Flächenzuweisung für L-zerlegbare Layouts hat eine Lösung.



SEGMENTMOVING

while lokale Verbesserung möglich **do**
 s = beliebiges maximales Segment
 bewege s in bessere Richtung
 ggf. berücksichtige Adjazenzen
 ggf. berücksichtige Seitenverhältnis

- liefert immer ein Layout
- findet lokale Optima
- Wasser benötigt keine Zielfläche
- keinerlei Garantie oder Konvergenz bewiesen

Demo.

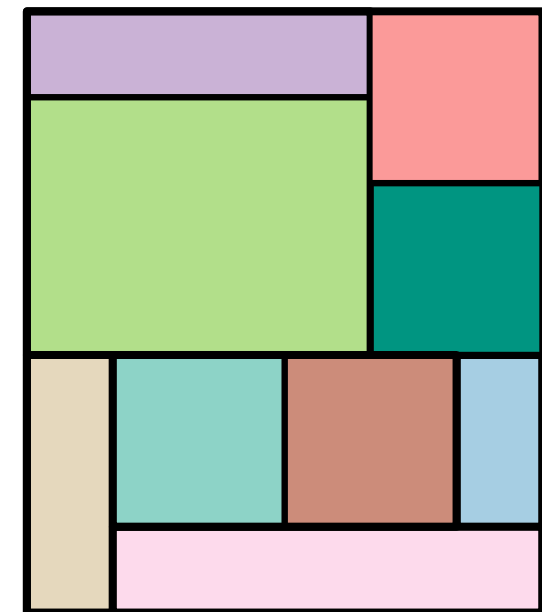
<https://bspeckmann.win.tue.nl/demos/carto/index.html>



Weitere Heuristik

- Gegeben.**
- Ein Rechtecksdual $\mathcal{R}$ bestehend aus den Rechtecken $R_1, \dots, R_n$.
 - **Zielbreiten** $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^+$
 - **Zielhöhen** $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^+$

- Gesucht.**
- Für jedes Rechteck R_i Breite w'_i und Höhe h'_i , so dass
- die Adjazenzen aus $\mathcal{R}$ erhalten bleiben, und
 - $w'_i \geq w_i$ und $h'_i \geq h_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, und
 - $\sum_{i=1}^n w'_i + \sum_{i=1}^n h'_i$ minimiert wird

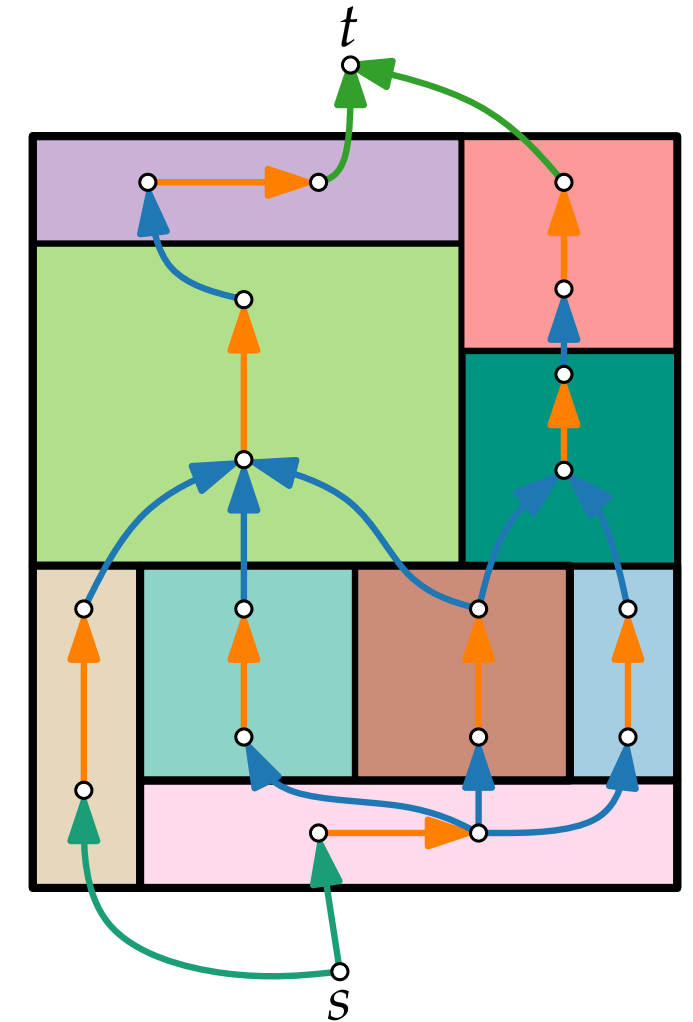


Lösung

analog: Flussnetzwerk N_{ver} für vertikale Kanten.

Idee. Flussnetzwerk N_{hor} für horizontale Kanten

1. Für jedes R_i zwei Knoten u_i, v_i
2. Knoten s und t
3. Kante $e_i = (u_i, v_i)$ mit $l(e_i) = w_i$, $u(e_i) = \infty$, $cost(e_i) = 1$
4. Kante $e = (u_i, v_j)$ zwischen je zwei Knoten u_i und v_j getrennt durch horz. Kante (aufwärts).
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
5. Kanten $e = (u_i, t)$ zwischen Knoten der obersten Reihe und t .
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$ und $cost(e) = 0$
6. Kanten $e = (s, v_j)$ zwischen s und Knoten der untersten Reihe
 $l(e) = 0$, $u(e) = \infty$, $cost(e) = 0$
7. $b(s) = \text{gewünschte Breite}$ $b(t) = -b(s)$
 $b(v) = 0$ für restl. Knoten v



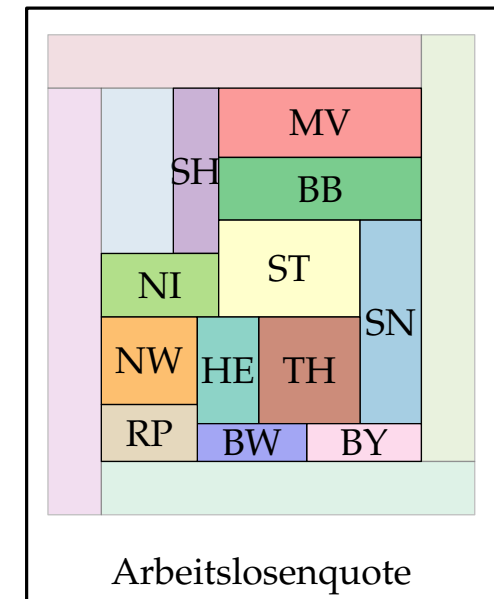
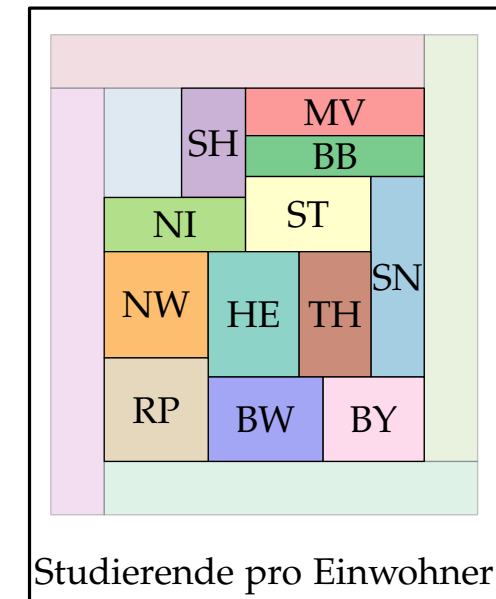
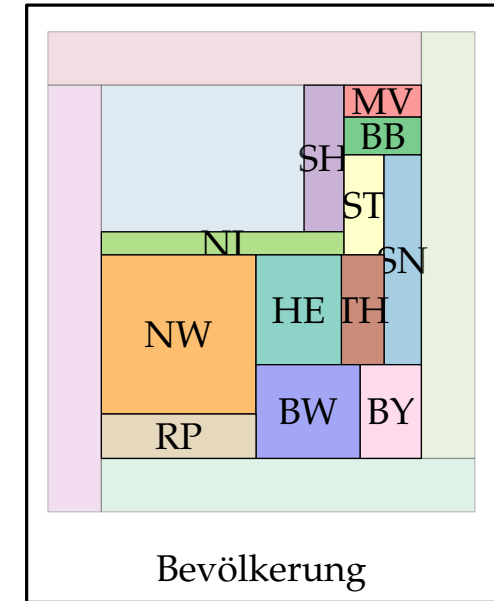
Frage. Kann ähnliches Netzwerk auch für Flächen konstruiert werden?

Nein, denn eine reine Flächenzuweisung zu Rechtecken bestimmt die Form der Rechtecke nicht.

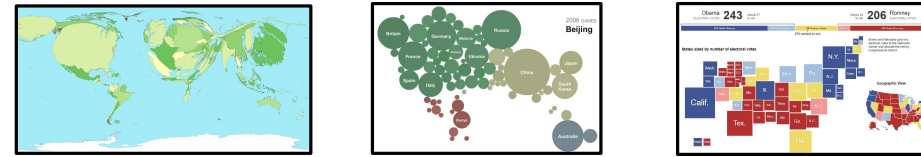
Zusammenfassg. Rechteckskartogramme

Diskussion.

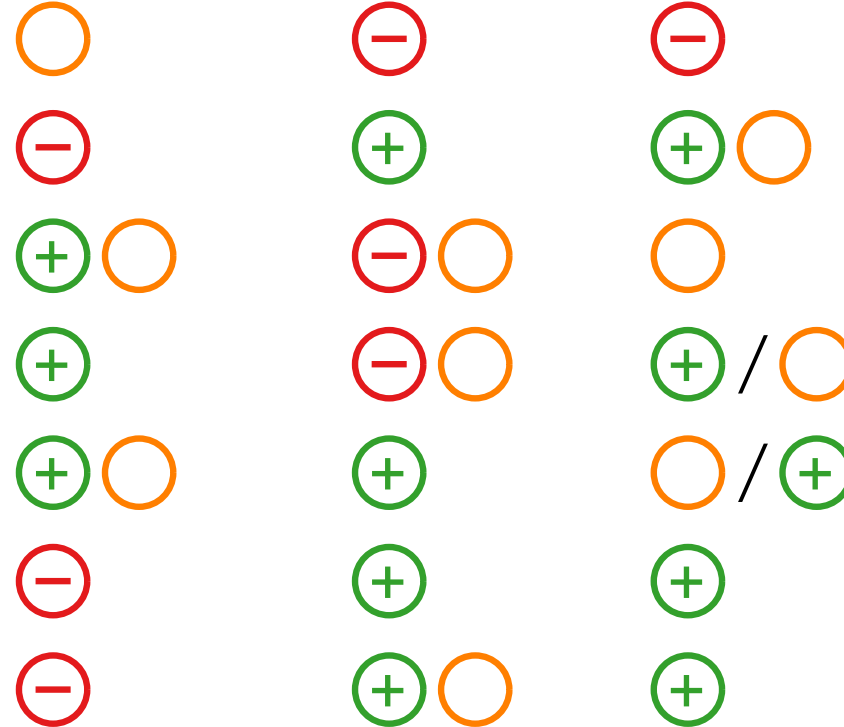
- Wiedererkennbarkeit der Form
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche



Zusammenfassung Kartogramme



- Wiedererkennbarkeit
- Vergleichbarkeit
- Lage der Regionen
- korrekte Adjazenzen
- kleiner Flächenfehler
- geringe Komplexität
- Ablesen der Fläche



Kein Kartogrammtyp ist perfekt, alle haben ihre Vor- und Nachteile. Auswahl sollte je nach Anwendungszweck erfolgen.

Was noch?



Type	Statistics	Contiguity	Geography	Topology	Example
Rubber map method [Tob73]	Not accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Pseudo-cartogram method [Tob86]	Not accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Constraint based approach [Koc97]	Not accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Cartodraw [KNP04]	Not accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Medial-axis-based cartograms [KPN05]	Not Accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Cellular automata method [Dor96]	Accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Dorling cartograms [Dor96]	Accurate	Not contiguous	Shape not preserved (circles)	Topology not preserved	
Rectangular cartograms [BSV12]	Depends on the variant	Contiguous	Shape not preserved (rectangles)	Depends on the variant	

Type	Statistics	Contiguity	Geography	Topology	Example
Diffusion-based cartograms [GN04]	Almost accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Circular-arc cartograms [KKN13]	Not Accurate	Contiguous	Shape mostly preserved	Topology-preserving	
Optimal rubber sheet method [Sun13b]	Almost accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
Fast, free-form rubber-sheet method [Sun13a]	Almost accurate	Contiguous	Distorted	Topology-preserving	
T-shape cartograms [ABF*13]	Accurate	Contiguous	Shape not preserved	Topology-preserving	
Non-contiguous cartograms [Ols76]	Accurate	Not contiguous	Shape preserved	Topology not preserved	
Demers cartograms [BDC02] (figure from [NYT12])	Accurate	Not contiguous	Shape not preserved (squares)	Topology not preserved	
Mosaic cartograms [CBC*15]	Not accurate	Contiguous	Shape mostly preserved	Topology-preserving	
Table cartograms [EFK*13]	Accurate	Contiguous	Shape not preserved	Topology not preserved	

The State of the Art in Cartograms [Nusrat & Kobourov 2016]