

# Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2024/2025

Aufgabenblatt 5

**Abgabe: 3. Dezember 2024 um 12:15 Uhr (in der Übung)**

## Definition(en)

Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$  beliebige Mengen.  $A$  heißt *reduzierbar* auf  $B$  ( $A \leq B$ ), falls es eine totale und berechenbare Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  gibt mit:  $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ .

## Aufgabe 5.1 (3 Punkte)

Sei  $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  eine *totale* Funktion mit der Eigenschaft: Falls für ein  $w \in \Sigma^*$  die TM  $M_w$  angesetzt auf  $w$  hält, dann geschieht dies in weniger als  $f(w)$  Schritten. Zeigen Sie:  $f$  ist nicht berechenbar.

## Aufgabe 5.2 (2 + 1 + 2 + 1 Punkte)

Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$  zwei beliebige Sprachen und sei  $A$  auf  $B$  reduzierbar mittels Funktion  $f$ . Zeigen Sie:

- (i)  $B$  entscheidbar  $\Rightarrow A$  entscheidbar
- (ii)  $A$  nicht entscheidbar  $\Rightarrow B$  nicht entscheidbar
- (iii)  $B$  semi-entscheidbar  $\Rightarrow A$  semi-entscheidbar
- (iv)  $A$  nicht semi-entscheidbar  $\Rightarrow B$  nicht semi-entscheidbar

## Aufgabe 5.3 (2 + 2 + 2 Punkte)

Seien  $A, B, C \subseteq \Sigma^*$  beliebige, nicht-leere Mengen. Zeigen Sie:

- a)  $A \leq B$  genau dann, wenn  $\bar{A} \leq \bar{B}$ .
- b) Aus  $A \leq B$  und  $B \leq C$  folgt  $A \leq C$ .
- c)  $A$  ist entscheidbar genau dann, wenn  $A$  semi-entscheidbar ist und  $A \leq \bar{A}$ .