

1.7 Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

- Der Berechenbarkeitsbegriff betrifft Funktionen.
- Einführung eines entsprechenden Begriffs für Sprachen.

Definition.

$A \subseteq \Sigma^*$ heißt *entscheidbar*, falls die *charakteristische Funktion* $\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist.

$A \subseteq \Sigma^*$ heißt *semi-entscheidbar*, falls die charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist.

- Man kann an Stelle von $A \subseteq \Sigma^*$ auch $A \subseteq \mathbb{N}$ betrachten.
- Das Entscheidungsproblem für A ist die Frage nach einem stoppenden Algorithmus mit



- Das Semi-Entscheidungsproblem für A ist die Frage nach einem Algorithmus mit



o

Hat der Algorithmus noch nicht gestoppt, dann ist unklar ob $w \in A$ oder nicht.

Beispiel.

Das Entscheidungsproblem für die Prädikatenlogik (“Theorembeweiser”).

Satz.

A ist entscheidbar $\Leftrightarrow$ sowohl A als auch $\overline{A}$ sind semi-entscheidbar.

Beweis.

($\rightarrow$): klar.

($\leftarrow$): Sei M_1 ein Semi-Entscheidungsverfahren für A .

Sei M_2 ein Semi-Entscheidungsverfahren für $\overline{A}$.

Erhalte ein Entscheidungsverfahren für A :

INPUT(x);

FOR $s := 1, 2, 3, \dots$ DO

 IF M_1 bei Eingabe x in s Schritten stoppt

 THEN OUTPUT(1) END;

 IF M_2 bei Eingabe x in s Schritten stoppt

 THEN OUTPUT(0) END;

END

Definition.

$A \subseteq \Sigma^*$ heißt *rekursiv aufzählbar*, falls $A = \emptyset$ oder es eine totale und berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ gibt mit

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

“ f zählt A auf.” (evtl. mit $f(i) = f(j)$ für $i \neq j$!)

Satz.

Eine Sprache ist rekursiv aufzählbar, genau dann wenn sie semi-entscheidbar ist.

Beweis.

($\rightarrow$): Sei A rekursiv aufzählbar mittels der Funktion f .

Erhalte ein Semi-Entscheidungsverfahren für A :

INPUT(x);

FOR $n := 0, 1, 2, 3, \dots$ DO

 IF $f(n) = x$ THEN OUTPUT(1) END;

END

($\leftarrow$): Sei $A \neq \emptyset$ semi-entscheidbar mittels Algorithmus M .

Sei $a \in A$ fixiert

Definiere eine totale und berechenbare Funktion f

mit $f(\mathbb{N}) = A$ mittels folgendem Algorithmus:

INPUT(n);

* Interpretiere n als Kodierung $n = c(x, y)$

mit $x = c_1(n)$, $y = c_2(n)$ *

$x := c_1(n)$;

$y := c_2(n)$;

IF M angesetzt auf x in y Schritten stoppt

THEN OUTPUT(x) ELSE OUTPUT(a) END;

Der Algorithmus stoppt stets und gibt nur Elemente aus A aus.

$\Rightarrow f$ ist total und berechenbar,
 $f(\mathbb{N}) \subseteq A$

Noch zu zeigen: $f(\mathbb{N}) = A$, denn

Sei $b \in A$ beliebig.
 $\Rightarrow M$ stoppt bei Eingabe b in s Schritten.

Betrachte: $n = c(b, s)$
 $\Rightarrow f(n) = b$ nach Konstruktion des Algorithmus ■

Insgesamt erhält man:

Satz.

Eine Sprache A ist entscheidbar, genau dann wenn A und $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar sind.

Zusammenfassung:

Bisher ist die Äquivalenz der folgenden Aussagen gezeigt worden:

A ist rekursiv aufzählbar.
 $\Leftrightarrow A$ ist semi-entscheidbar.
 $\Leftrightarrow A$ ist vom Typ 0 (als formale Sprache).
 $\Leftrightarrow A = L(M)$ für eine TM M .
 $\Leftrightarrow \chi'_A$ ist berechenbar.
 $\Leftrightarrow A$ ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.
 $\Leftrightarrow A$ ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

Abschließende Bemerkung zum Zusammenhang

Abzählbarkeit — rekursive Aufzählbarkeit

Definition.

A heißt *abzählbar*, falls $A = \emptyset$ oder es gibt eine totale Funktion f gibt mit

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

- A ist rekursiv aufzählbar, falls A durch eine totale rekursive Funktion abzählbar ist.

Unterschied:

Sei A abzählbar, $A' \subseteq A \Rightarrow A'$ ist abzählbar

Beweis.

Sei A abzählbar mittels f , $a \in A'$ fixiert.

Betrachte:

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{falls } f(n) \in A' \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

$g(n)$ zählt A' ab, da $A' = \{g(0), g(1), \dots\}$ ■

Sei A rekursiv abzählbar.

Es gibt Teilmengen $A'' \subseteq A$, die nicht rekursiv abzählbar sind.

Beweis.

später.

1.8 Das Halte-Problem und die Reduzierbarkeit

- Kennenlernen unentscheidbarer Probleme.
Besonders berühmt: Das Halteproblem für TM.
Dazu Kodierung der TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ als Wort über $\{0,1\}$

1. Kodierung von M als Wort über $\{0,1,\#\}$:

$$\begin{aligned} \text{Sei } Q &= \{q_0, \dots, q_n\} \\ \Gamma &= \{a_0, \dots, a_k\} \end{aligned}$$

Schreibe $\delta(q_i, a_j) = (q_{i'}, a_{j'}, y)$
als

$$w_{i,j,i',j',y} = \# \# \text{bin}(i) \# \text{bin}(j) \# \text{bin}(i') \# \text{bin}(j') \# \text{bin}(m) \quad \text{mit } m = \begin{cases} 0 & y = L \\ 1 & y = R \\ 2 & y = N \end{cases}$$

Kodierung von M durch Konkatenation aller Worte $w_{i,j,i',j',y}$, die zu δ gehören.

2. Kodierung von M durch ein Wort über $\{0,1\}$:
Kodierung mit Hilfe von

$$0 \mapsto 00$$

$$1 \mapsto 01$$

$$\# \mapsto 11$$

$w_{i,j,i',j',y}$ durch ein Wort über $\{0,1\}$

Sei M_0 eine fixierte TM

$$w \in \{0,1\}^* \mapsto M_w = \begin{cases} M & \text{falls } w \text{ Codewort von } M \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiton

Die folgende Sprache

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

heißt *spezielles Halte-Problem*.

Satz.

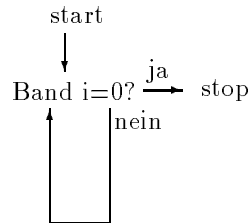
Das spezielle Halte-Problem ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Annahme: K ist entscheidbar.

$\Leftrightarrow \chi_K$ ist berechenbar mittels TM M .

Betrachte: TM M'



M' stoppt, falls M 0 ausgibt.

Gibt M 1 aus, geht M' in eine Endlos-Schleife.

Sei $w' \in \{0, 1\}$ mit $M_{w'} = M$

Es gilt:

M' angesetzt auf w' hält.

$\Leftrightarrow M$ angesetzt auf w' gibt 0 aus.

$\Leftrightarrow \chi_K(w') = 0$ (Def. von M)

$\Leftrightarrow w' \in K$

$\Leftrightarrow M_{w'} = M'$ hält angesetzt auf w' nicht. (Widerspruch) ■

Das Reduktionskonzept ermöglicht eine “leichte” Übertragung dieses Resultats auf weitere Probleme:

Definition.

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$

A heißt *auf B reduzierbar* ($A \leq B$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ gibt mit

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

für alle $x \in \Sigma^*$.

Lemma

(i) Gilt $A \leq B$ und ist B entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.

(ii) Gilt $A \leq B$ und ist B semientscheidbar, so ist auch A semientscheidbar.

Beweis.

(i) Sei $A \leq B$ mittels f

Sei χ_B berechenbar
 $\Leftrightarrow \chi_B \circ f$ ist berechenbar
 Es gilt:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1 & f(x) \in B \\ 0 & f(x) \notin B \end{cases} = \chi_B(f(x))$$

$\Leftrightarrow \chi_A$ ist berechenbar und A ist entscheidbar

(ii) ersetze in (i) χ durch χ' und 0 durch undefiniert. ■

Korollar

$A \leq B$ und A ist nicht entscheidbar.
 $\Rightarrow B$ ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Kontraposition von (i) ■

Definition.

Die Sprache

$$H = \{w\#x \mid M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

heißt (allgemeines) *Halte-Problem*.

Satz.

Das Halte-Problem ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Es reicht zu zeigen: $K \leq H$
 wähle $f(w) = w\#w$
 $\Rightarrow w \in K \Leftrightarrow f(w) \in H$ ■

Definiton

Die Sprache

$$H_0 = \{w \mid M_w \text{ angesetzt auf leeren Band hält}\}$$

heißt *Halte-Problem auf leeren Band*.

Satz.

Das Halte-Problem auf dem leeren Band H_0 ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Es reicht zu zeigen: $H \leq H_0$.
 Ordne $w\#x$ folgende TM zu: