

2.4 Weitere NP-vollständige Probleme

2.4.1 3SAT

Definition. (3SAT)

Gegeben: Boolesche Formel F in KNF mit höchstens 3 Literalen pro Klausel.

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Satz.

3SAT ist NP-vollständig.

Beweis. 1.) $3SAT \in NP$, klar mit “guess and check”-Argument.

2.) 3SAT NP-hart.

Es reicht zu zeigen : $SAT \leq_p 3SAT$.

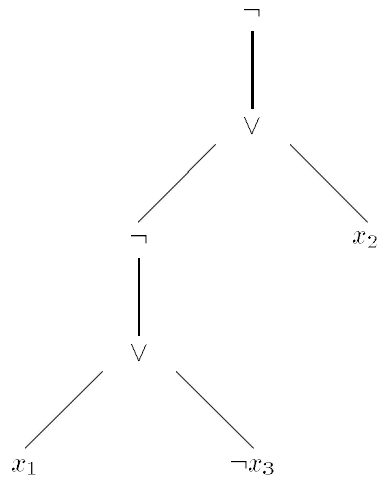
Angabe eines polynomiellen Verfahrens, das eine beliebige Formel F in eine Formel F' in KNF mit höchstens 3 Literalen pro Klausel umformt mit:

$$F \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow F' \text{ erfüllbar.}$$

(Dabei genügt “Erfüllbarkeitsäquivalenz”. “Äquivalenz ist nicht notwendig.)

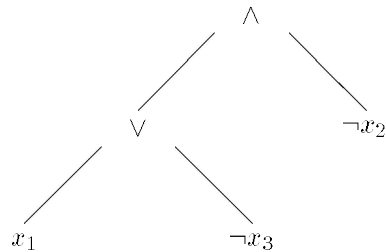
Allgemeine Verfahren zur Überführung von F in äquivalente KNF benötigt i.a. exponentielle Zeit und garantiert nicht, daß alle Klauseln höchstens 3 Literale enthalten.

Erläuterung des Verfahrens am Beispiel:

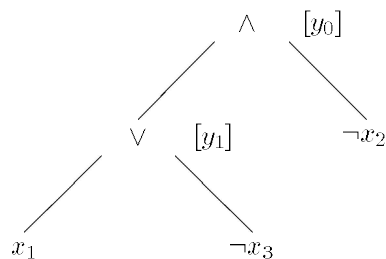


1. Schritt

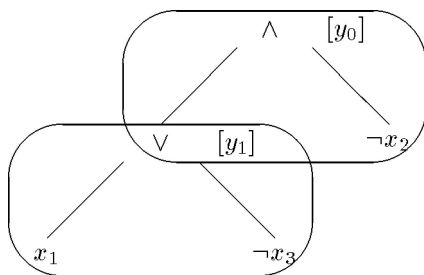
Mit den DeMorgan'schen Regeln werden alle Negationszeichen zu den Variablen gebracht.

2. Schritt

Jedem inneren Knoten wird eine Variable $\{y_0, y_1, \dots\}$ zugeordnet, wobei der Baumwurzel y_0 zugeordnet wird.

3. Schritt

Jedem inneren Knoten wird eine Teilformel der Form $(v \leftrightarrow (y \circ z))$, $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ zugeordnet. Man erhält eine neue Formel F_1 , indem man alle Teilformeln durch $\wedge$ verknüpft und für die Wurzel y_0 die Teilformel $[y_0]$ hinzunimmt.



Es gilt:

$$F \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow F_1 \text{ erfüllbar}$$

$(\rightarrow)$: Eine erfüllende Belegung von F liefert eine erfüllende Belegung von F_1 .
 $(\leftarrow)$: Die Belegung der x -Variablen einer erfüllenden Belegung von F_1 liefert eine erfüllende Belegung für F .

4. Schritt

Umformung jeder Teilformel in KNF.

Es entstehen Klauseln mit höchstens 3 Literalen.

Das Verfahren ist polynomial, da jede Teilformel in konstanter Länge umgeformt werden kann.

Beispiel $[a \rightarrow (b \vee c)] \mapsto (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c)$
 $[a \leftarrow (b \wedge c)] \mapsto (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

$\Rightarrow F_1 = y_0 \wedge (\neg y_0 \vee y_1) \wedge (\neg y_0 \vee \neg x_2) \wedge (y_0 \vee \neg y_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg x_3) \wedge (y_1 \vee x_3)$

mit

F_1 ist erfüllbarkeitsäquivalent mit F .

Umformung von F in F_1 ist in polynomialer Zeit möglich. ■

Bemerkung

Für ein analoges Problem gilt:

$2SAT \in P$, da es nur polynomial viele verschiedene Klauseln mit höchstens 2 Literalen über $\{x_1, \dots, x_n\}$ gibt.

2.4.2 CLIQUE

Definition. (CLIQUE)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Besitzt G eine "Clique" der Größe k ?

Wobei Clique ein vollständiger Teilgraph $G' = (V', E')$ ist, mit

$$(u, v) \in E' \quad \forall u, v \in V', \quad u \neq v$$

Satz.

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis.

1.) CLIQUE $\in NP$ mit "guess and check".

2.) CLIQUE ist NP-hart.

Sei F Formel in KNF mit (genau) 3 Literalen pro Klausel.

$F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \dots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$ mit $z_{i,j} \in \{x_1, x_2, \dots\} \wedge \{\neg x_1, \neg x_2, \dots\}$

Ordne F Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl k zu gemäß:

$$\begin{aligned} V &= \{(1, 1), (1, 2), \dots, (m, 1), (m, 2), (m, 3)\} \\ E &= \{(i, j), (p, q) : i \neq p \text{ und } z_{i,j} \neq \neg z_{p,q}\} \\ k &= m \end{aligned}$$

Es gilt: F ist erfüllbar durch Belegung B .

$\Leftrightarrow$ Jede Klausel hat ein Literal, das unter der Belegung B den Wert 1 annimmt,

z.B.: $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \dots, z_{m,j_m}$.

$\Leftrightarrow$ Es gibt Literale $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \dots, z_{m,j_m}$, die paarweise nicht komplementär sind.

$\Leftrightarrow$ Es gibt Knoten $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (m, j_m)$, die paarweise verbunden sind.

$\Leftrightarrow G$ hat CLIQUE der Größe k . ■

2.4.3 HAMILTON-KREIS

Definition. (GERICHTETER HAMILTON-KREIS)

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$.

Gefragt: Besitzt G einen Hamilton-Kreis?

Wobei ein Hamilton-Kreis eine Permutation der Knotenindizes $(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)})$, so daß $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E \ \forall i = 1, \dots, n-1$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

Definition. (UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Gefragt: Besitzt G einen Hamilton-Kreis?

Satz.

GERICHTETER HAMILTON-KREIS ist NP-vollständig.

Beweis.

GERICHTETER HAMILTON-KREIS $\in NP$ "guess and check".

Noch zu zeigen: GERICHTETER HAMILTON-KREIS NP-hart.

Es wird gezeigt: $3SAT \leq_p \text{GERICHTETER HAMILTON-KREIS}$.

Sei F Formel in KNF mit genau 3 Literalen pro Klausel.

$$\Rightarrow F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \dots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$$

mit

$$z_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \dots, \neg x_n\}$$

Konstruktion eines gerichteten Graphen: