

$(\rightarrow)$: Eine erfüllende Belegung von F liefert eine erfüllende Belegung von F_1 .
 $(\leftarrow)$: Die Belegung der x -Variablen einer erfüllenden Belegung von F_1 liefert eine erfüllende Belegung für F .

4. Schritt

Umformung jeder Teilformel in KNF.

Es entstehen Klauseln mit höchstens 3 Literalen.

Das Verfahren ist polynomial, da jede Teilformel in konstanter Länge umgeformt werden kann.

Beispiel $[a \rightarrow (b \vee c)] \mapsto (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c)$
 $[a \leftarrow (b \wedge c)] \mapsto (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

$\Rightarrow F_1 = y_0 \wedge (\neg y_0 \vee y_1) \wedge (\neg y_0 \vee \neg x_2) \wedge (y_0 \vee \neg y_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg x_3) \wedge (y_1 \vee x_3)$

mit

F_1 ist erfüllbarkeitsäquivalent mit F .

Umformung von F in F_1 ist in polynomialer Zeit möglich. ■

Bemerkung

Für ein analoges Problem gilt:

$2SAT \in P$, da es nur polynomial viele verschiedene Klauseln mit höchstens 2 Literalen über $\{x_1, \dots, x_n\}$ gibt.

2.4.2 CLIQUE

Definition. (CLIQUE)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Besitzt G eine "Clique" der Größe k ?

Wobei Clique ein vollständiger Teilgraph $G' = (V', E')$ ist, mit

$$(u, v) \in E' \quad \forall u, v \in V', \quad u \neq v$$

Satz.

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis.

1.) CLIQUE $\in NP$ mit "guess and check".

2.) CLIQUE ist NP-hart.

Sei F Formel in KNF mit (genau) 3 Literalen pro Klausel.

$F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \dots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$ mit $z_{i,j} \in \{x_1, x_2, \dots\} \wedge \{\neg x_1, \neg x_2, \dots\}$

Ordne F Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl k zu gemäß:

$$\begin{aligned} V &= \{(1, 1), (1, 2), \dots, (m, 1), (m, 2), (m, 3)\} \\ E &= \{(i, j), (p, q) : i \neq p \text{ und } z_{i,j} \neq \neg z_{p,q}\} \\ k &= m \end{aligned}$$

Es gilt: F ist erfüllbar durch Belegung B .

$\Leftrightarrow$ Jede Klausel hat ein Literal, das unter der Belegung B den Wert 1 annimmt,

z.B.: $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \dots, z_{m,j_m}$.

$\Leftrightarrow$ Es gibt Literale $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \dots, z_{m,j_m}$, die paarweise nicht komplementär sind.

$\Leftrightarrow$ Es gibt Knoten $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (m, j_m)$, die paarweise verbunden sind.

$\Leftrightarrow G$ hat CLIQUE der Größe k . ■

2.4.3 HAMILTON-KREIS

Definition. (GERICHTETER HAMILTON-KREIS)

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$.

Gefragt: Besitzt G einen Hamilton-Kreis?

Wobei ein Hamilton-Kreis eine Permutation der Knotenindizes $(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)})$, so daß $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E \ \forall i = 1, \dots, n-1$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

Definition. (UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Gefragt: Besitzt G einen Hamilton-Kreis?

Satz.

GERICHTETER HAMILTON-KREIS ist NP-vollständig.

Beweis.

GERICHTETER HAMILTON-KREIS $\in NP$ "guess and check".

Noch zu zeigen: GERICHTETER HAMILTON-KREIS NP-hart.

Es wird gezeigt: $3SAT \leq_p \text{GERICHTETER HAMILTON-KREIS}$.

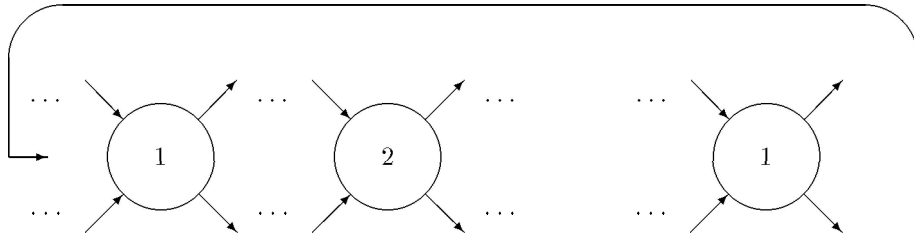
Sei F Formel in KNF mit genau 3 Literalen pro Klausel.

$$\Rightarrow F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \dots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$$

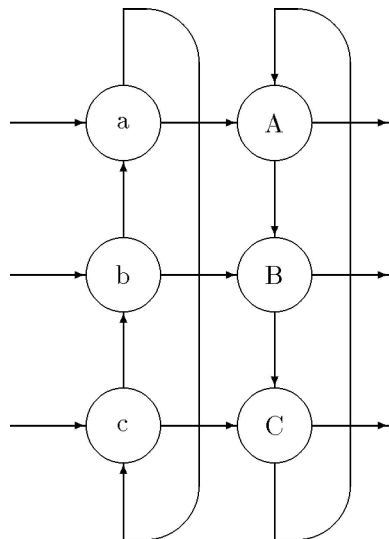
mit

$$z_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \dots, \neg x_n\}$$

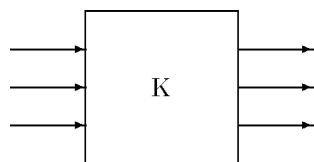
Konstruktion eines gerichteten Graphen:



Vom gleichen Knoten i gehen jeweils 2 Kanten aus.
 Die beiden Kanten führen durch folgenden “Klauselgraph” K , von dem m Kopien bereitstehen.



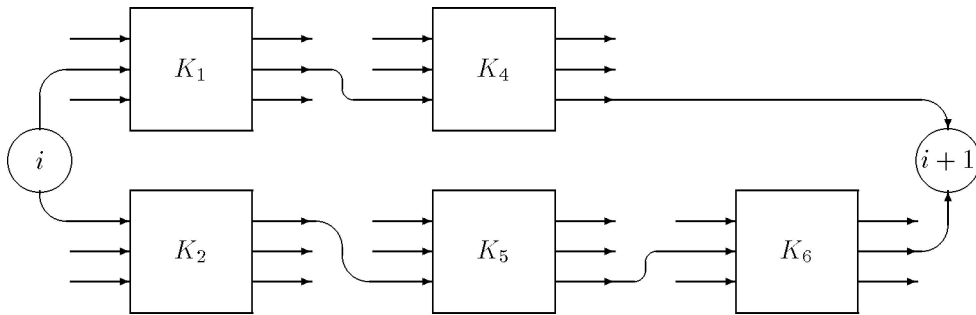
Symbol:



Beispiel.

- Literal x_i kommt in Klausel 1 an Position 2
und in Klausel 4 an Position 3 vor.
- Literal $\neg x_i$ kommt in Klausel 2 an Position 1
in Klausel 5 an Position 3
und in Klausel 6 an Position 2 vor

Verbindungen von i nach $i + 1$:

Beobachtung

Enthält der konstruierte Graph G einen Hamilton-Kreis, so verläßt dieser jedes K wie folgt:

Kommt der Hamilton-Pfad bei $a(b, c)$ an, so verläßt er K in $A(B, C)$.

Beweis.

Annahme: Hamilton-Pfad erreicht K in a und verläßt K nicht in A :

Mögliche Fälle:

$a - A - B$ Sackgasse in b .

$a - A - B - C$ Sackgasse in b .

$a - c - b - B$ A und C sind nicht mehr erreichbar.

$a - c - b - B - C$ A nicht mehr erreichbar.

$a - c - C - A - B$ Sackgasse bei b .

Analog für b und c .

$\Rightarrow$ Ein Hamilton-Pfad kann durch K nur folgende Wege nehmen:

$a - A$

$a - c - C - A$

$a - c - b - B - C - A$

Behauptung.

F erfüllbar $\Leftrightarrow G$ hat Hamilton-Kreis.

Beweis.

$(\rightarrow)$: Habe F erfüllende Belegung:

Gilt $x_i = 1$, dann folge dem oberen Pfad von i an.

Gilt $x_i = 0$, dann folge dem unteren Pfad.

Die entsprechenden "Klauselgraphen" werden durchlaufen.

So wird erreicht, daß bei Rückkehr nach 1 alle Knoten von G durchlaufen wurden.

$(\leftarrow)$: G besitzt Hamilton-Kreis.

Definiere Variablenbelegung für F :

$x_i = 1$, falls Hamilton-Kreis Knoten i nach "oben" verläßt.

$x_i = 0$, falls Hamilton-Kreis Knoten i nach "unten" verläßt.

Die Belegung erfüllt F , da jeder Klauselgraph durchlaufen, entsprechende Klausel also erfüllt wird. ■

Satz.

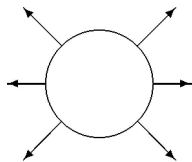
UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS ist NP-vollständig.

Bewies

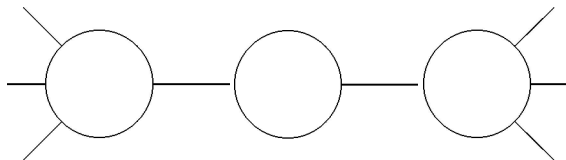
Es gilt:

GERICHTETER HAMILTON-KREIS $\leq_p$ UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS.

Ersetze in gerichtetem Graphen Knoten der Form



durch ungerichteten Teilgraphen



und erzwingen damit, daß jeder Hamilton-Kreis G_v in Pfeilrichtung durchlaufen wird. ■

Bemerkung

Hamilton-Kreis (“Jeder Knoten wird genau einmal durchlaufen”) ist NP -vollständig.
Eulerkreis (“Jede Kante wird genau einmal durchlaufen”) ist in P ($\rightarrow$ Königsberger Brückenproblem).

Definition. (TRAVELING SALESPERSON Problem)

Gegeben: $n \times n$ Matrix $(M_{i,j})$ von “Entfernungen” zwischen n Städten.
Gefragt: $\exists$ Permutation (“Rundreise”) mit

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i), \pi(i+1)} + M_{\pi(n), \pi(1)} \leq k?$$

Satz.

Das TRAVELING SALESPERSON Problem ist NP -vollständig.

Beweis.

TRAVELING SALESPERSON Problem $\in NP$ “guess and check”.

Noch zu zeigen:

UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS $\leq_p$ TRAVELING SALESPERSON Problem:

$$G = (\{1, \dots, n\}, E) \mapsto \begin{cases} \text{Matrix } M_{i,j} = & \begin{cases} 1 & \{i, j\} \in E \\ 2 & \{i, j\} \notin E \end{cases} \\ \text{Rundreiselänge: } & n \end{cases}$$

■