

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2025/2026

Aufgabenblatt 1

Abgabe: 28. Oktober 2025 um 12:15 Uhr (in der Übung)

Aufgabe 1.1 (2 + 3 Punkte)

Gegeben ist eine Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ mit Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_e\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, \square\}$, Blanksymbol $\square$, Startzustand q_0 , Endzustandsmenge $F = \{q_e\}$ und Zustandsüberföhrungsfunktion δ mit:

$\delta(q, w)$	0	1	$\square$
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_1, 0, R)$
q_1	$(q_1, 0, L)$	$(q_1, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$
q_2	$(q_2, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$	$(q_e, \square, R)$

- Geben Sie die Folge der Konfigurationen an, die M bei Eingabe 101 durchläuft.
- Welche Funktion $s : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ und welche Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet M ?

Aufgabe 1.2 (2 + 3 Punkte)

- Zeigen Sie, dass man zu jeder Turingmaschine eine neue Turingmaschine konstruieren kann, die in jedem Schritt den Schreib-Lese-Kopf entweder eine Position nach links oder eine Position nach rechts bewegt. (D. h. der Kopf darf in keinem Schritt stehen bleiben – die Kopfbewegungen sind aus $\{L, R\}$.)
- Zeigen Sie, dass man zu jeder Turingmaschine eine neue Turingmaschine konstruieren kann, die keine Felder links der *initialen Eingabe* benutzt. D. h. das Arbeitsband ist nur rechtsseitig unendlich; die linke Seite besitzt einen Rand.

(*Hinweis:* Bei beiden Teilaufgaben reicht jeweils eine Beweisskizze – es sind keine formalen Beweise gefordert. Überlegen Sie sich bei der ersten Teilaufgabe, wie Sie das “Stehenbleiben” mithilfe von zusätzlichen Zuständen umgehen können. Überlegen Sie sich bei der zweiten Teilaufgabe, wie Sie sicherstellen können, dass die TM links vom aktuellen Wort immer ein freies Feld für weitere Symbole hat.)

Aufgabe 1.3 (4 + 1 Punkte)

Als Erweiterung der in der Vorlesung eingeföhrten Turingmaschine kann man *Zweiband-Turingmaschinen* (ZTM) definieren. Eine ZTM besitzt zwei Arbeitsbänder mit jeweils eigenen Schreib-Lese-Köpfen. Formal ist eine ZTM auch ein 7-Tupel $(S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, \square, F)$. Der Unterschied ist, dass die Übergangsfunktion alle Arbeitsbänder betrachtet, also als $\delta : S \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow S \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, N, R\} \times \{L, N, R\}$ definiert ist.¹

- Konstruieren Sie eine Zweiband-Turingmaschine, welche als Eingabe zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ bekommt und ausgibt, ob beide Zahlen gleich sind, ob die erste Zahl

¹Man kann die Definition allgemein auf k Bänder erweitern.

kleiner als die zweite Zahl ist, oder ob sie größer als die zweite Zahl ist. Formal soll die ZTM also die folgende Funktion berechnen:

$$f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \{-1, 0, 1\}, (x, y) \mapsto \begin{cases} -1, & x < y \\ 0, & x = y \\ 1, & x > y \end{cases}$$

Nehmen Sie ruhig an, dass die beiden Zahlen binär kodiert sind und durch ein Trennzeichen getrennt auf dem ersten Arbeitsband als Eingabe stehen.

- b) Welchen Vorteil bietet eine ZTM gegenüber einer TM?