

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2025/2026

Aufgabenblatt 5

Abgabe: 9. Dezember 2025 um 12:15 Uhr (in der Übung)

Definition(en)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ beliebige Mengen. A heißt *reduzierbar* auf B ($A \leq B$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ gibt mit: $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

Aufgabe 5.1 (3 Punkte)

Sei $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ eine *totale* Funktion mit der Eigenschaft: Falls für ein $w \in \Sigma^*$ die TM M_w angesetzt auf w hält, dann geschieht dies in weniger als $f(w)$ Schritten. Zeigen Sie: f ist nicht berechenbar.

Aufgabe 5.2 (2 + 1 + 2 + 1 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei beliebige Sprachen und sei A auf B reduzierbar mittels Funktion f . Zeigen Sie:

- (i) B entscheidbar $\Rightarrow A$ entscheidbar
- (ii) A nicht entscheidbar $\Rightarrow B$ nicht entscheidbar
- (iii) B semi-entscheidbar $\Rightarrow A$ semi-entscheidbar
- (iv) A nicht semi-entscheidbar $\Rightarrow B$ nicht semi-entscheidbar

Aufgabe 5.3 (2 + 2 + 2 Punkte)

Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ beliebige, nicht-leere Mengen. Zeigen Sie:

- a) $A \leq B$ genau dann, wenn $\bar{A} \leq \bar{B}$.
- b) Aus $A \leq B$ und $B \leq C$ folgt $A \leq C$.
- c) A ist entscheidbar genau dann, wenn A semi-entscheidbar ist und $A \leq \bar{A}$.