

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

Wintersemester 2025/2026

Aufgabenblatt 8

Abgabe: 10. Februar 2026 um 12:15 Uhr (in der Übung)

Definition(en)

- Eine *Clique* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge von Knoten $V' \subseteq V$, die paarweise benachbart sind. Für alle $u, v \in V'$ (mit $u \neq v$) gilt also $uv \in E$. Als *Größe* der Clique bezeichnen wir die Anzahl der Knoten $|V'|$.
- k -CLIQUE (für $k \in \mathbb{N}$):
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
 - **gefragt:** Hat G eine Clique der Größe k ?
- CLIQUE:
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
 - **gefragt:** Hat G eine Clique der Größe k ?
- 2-SAT:
 - **gegeben:** Ein Boolesche Formel $\mathcal{F}$ in konjunktiver Normalform mit genau 2 Literalen pro Klausel (d. h. $\mathcal{F}$ ist von der Form $(\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2}) \wedge (\ell_{2,1} \vee \ell_{2,2}) \dots \wedge (\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2})$, wobei $\ell_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$).
 - **gefragt:** Hat $\mathcal{F}$ eine erfüllende Belegung?
- FÄRBBARKEIT:
 - **gegeben:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
 - **gefragt:** Gibt es eine Funktion $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, sodass für alle $v, u \in V$ (mit $vu \in E$) gilt: $f(v) \neq f(u)$?
(Anders ausgedrückt: Kann man die Knoten des Graphen so färben, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?)

Aufgabe 8.1 (2 + 2 + 2 Punkte)

- a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der eine 3-Clique, aber keine 4-Clique enthält.
- b) Zeigen Sie: $k\text{-CLIQUE} \in \text{P}$. (*Hinweis: k ist Teil der Problemdefinition.*)
- c) Zeigen Sie: $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$. (*Hinweis: k ist Teil der Eingabe.*)

Aufgabe 8.2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: $2\text{-SAT} \in \text{P}$. (Es ist kein formaler Beweis gefordert. Es reicht, wenn Sie Ihre Überlegungen kurz skizzieren.)

(*Hinweis: Formen Sie die Klauseln zu je zwei Implikation um. Überlegen Sie sich, was es für diese Implikationen bedeutet, wenn jeweils eines der beiden Literale auf *wahr* gesetzt wird und wie Sie diese Abhängigkeit in einem Graph darstellen können.*)

Aufgabe 8.3 (2 + 2 Punkte)

- a) Zeichnen Sie einen Graphen mit genau 5 Knoten, der sich *nicht* mit 3 Farben färben lässt.
- b) Zeigen Sie: $\text{FÄRBBARKEIT} \in \text{NP}$.